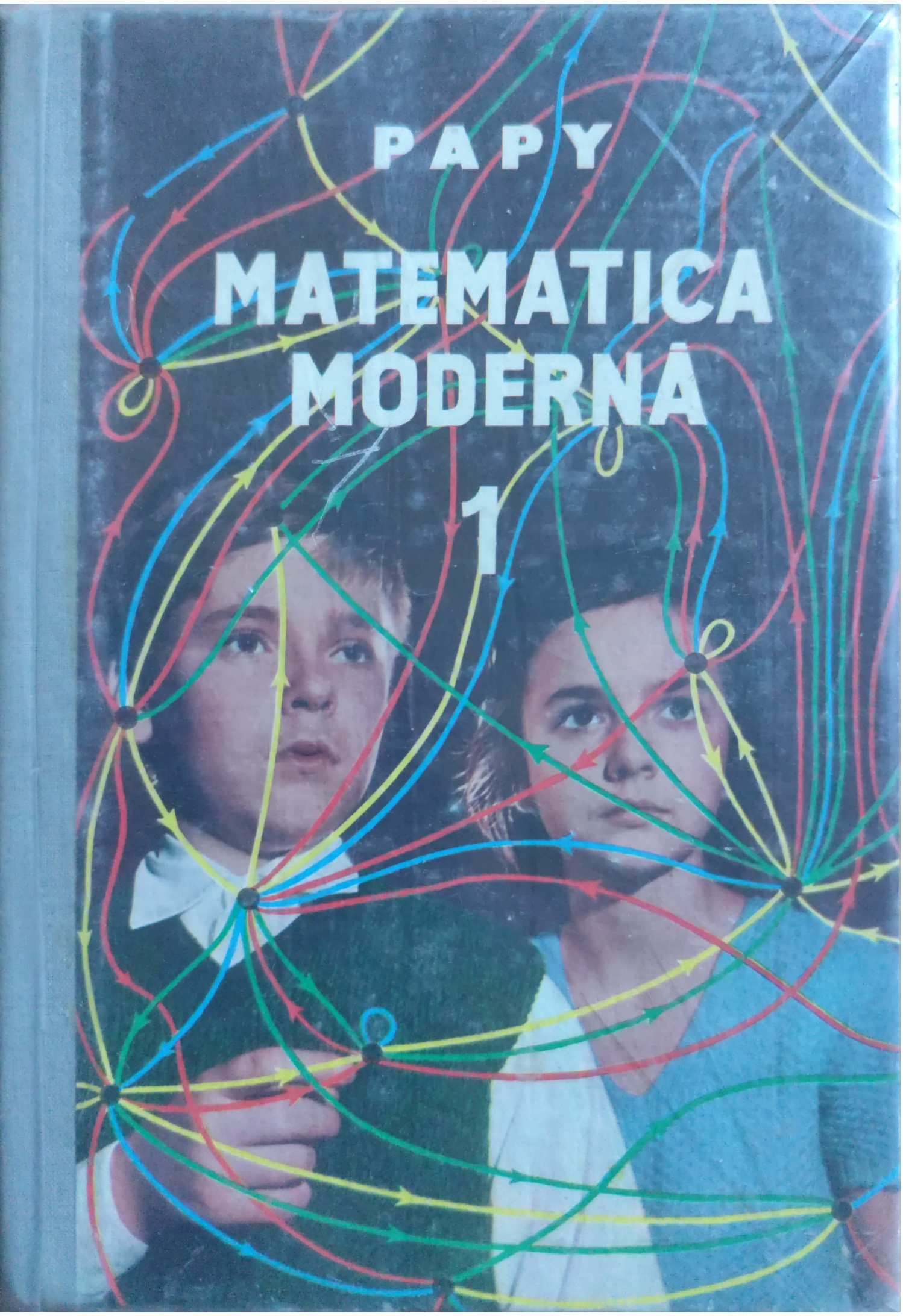
PAPY

MATEMATICA MODERNĂ

1



Scanned with OKEN Scanner

MATEMATICA MODERNĂ

VOLUMUL I

PAPY

PROF. LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE
A UNIVERSITĂȚII DIN BRUXELLES

Cu colaborarea lui
FREDERIQUE PAPY — PROF. LA ȘCOALA
NORMALĂ BERKENDAEL — BRUXELLES

EDITURA TINERETULUI
BUCUREȘTI 1967

Scanned with OKEN Scanner

Desenele după ediția în limba franceză

Traducere din limba franceză
de
MARIUS STOKA şi VASILE SUCIU

MATHÉMATIQUE MODERNE
Premier Volume

MARCEL DIDIER, Editeur
Bruxelles — Paris
1964

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Matematica, știință care la începutul acestui secol n-avea alte aplicații în afară de fizică și inginerie, a devenit un element fundamental al vieții contemporane și un instrument de neînlocuit în cele mai multe domenii ale gîndirii, ale științei și tehnicii. De aceea astăzi se impune predarea elementelor de bază ale matematicii moderne tuturor elevilor din școlile medii, pentru că fiecare din ei poate deveni un mînuitor al acestei matematici.

Din fericire dezvoltarea și varietatea aplicațiilor matematicii au modificat și umanizat profund fața acestei științe.

Progresele realizate în cursul ultimului secol au transformat matematica pînă în temeliile ei, făcînd-o mai folositoare, mai clară, mai accesibilă, mai interesantă.

Înainte, în predarea matematicii la cursul elementar nu puteau fi prezentate decît situații stereotipe, în care se amestecau, în mod derutant, cînd elemente neexplicite, bazate pe o intuiție vagă, cînd elemente brusc tehnice.

Astăzi se poate proceda cu totul altfel. Cei ce se inițiază în tainele matematicii, participă la construirea edificiului matematic pornind de la situații simple și obișnuite.

Așa vom proceda și noi în paginile acestei cărți, destinată tuturor celor ce vor să se inițieze în matematica modernă, oricare ar fi vîrsta și pregătirea lor anterioară. Ea le este de folos mai ales elevilor (de 12 ani) din clasa a 6-a, care au adoptat programul experimental oficial al Ministerului Educației Naționale și Culturii din Belgia.

Lucrarea de față este rezultatul predării matematicii în ultimii cinci ani la clasele cu program experimental. Conținutul ei a fost predat integral unor elevi de 12—13 ani.

Alegerea materiilor și metodelor de predare sînt conforme cu programul de la Dubrovnik (1960) și cu recomandările Simpozionului UNESCO (Budapesta 1962).

Primele cinci capitole introduc pe cititor în universul matematicii actuale constituit din teoria mulțimilor. Este vorba, firește, de o expunere simplă și descriptivă, pe care am căutat însă s-o prezentăm în așa fel, încît la un studiu ulterior mai aprofundat să nu fie necesare modificări importante.

Algebra mulțimilor introduce un calcul ale cărui reguli nu sînt cele ale aritmeticii elementare, ceea ce permite, în special, să se scoată în relief caracterele proprii ale calculului algebric obișnuit. Se știe, de altfel, că algebra mulțimilor, sau algebra lui Boole joacă astăzi un rol fundamental în teoria circuitelor și că ea este un instrument necesar celor care utilizează marile mașini electronice. Mai semnalăm de asemenea că regulile de calcul referitoare la c.m.m.d.c. și la c.m.m.m.c. vor fi obținute ulterior ca o aplicație foarte simplă a algebrei mulțimilor.

Scanned with OKEN Scanner

La capitolul 6, noțiunile despre mulțimi sînt folosite pentru introducerea clară și precisă a primelor elemente ale geometriei afine a planului. Diagramele mulțimilor constituie un material intuitiv pentru exemplificarea logică a teoriei.

În concepția sa actuală, matematica a devenit esențial rațională. Ea se interesează mai mult de relațiile dintre obiecte decît de natura lor.

Grafia multicoloră constituie un mijloc pedagogic eficace în predarea noțiunilor fundamentale ale teoriei relațiilor pe baza unor situații obișnuite.

Această metodă a fost introdusă de noi în învățămînt, în anul 1959, la școala normală Gardienne din Berkendael, în urma multor încercări infructuoase. Ea a fost imediat adoptată de autorii Programului de la Dubrovnik și recomandată în raportul Simpozionului de la Budapesta.

La capitolul 7 sînt introduse relațiile pe baza unor situații obișnuite care interesează pe copii și exploatează înclinările lor pentru joc. Astfel de relații nu au neapărat proprietățile interesante ale relațiilor importante în matematică, ceea ce duce la scoaterea în relief a acestora la capitolul 8.

Situațiile obișnuite introduc în mod natural compunerea relațiilor, care trebuie să fie prezentată în forma ei cea mai generală. Asociativitatea compunerii relațiilor este un fapt fundamental adesea util pentru stabilirea proprietăților particulare ale relațiilor considerate.

Noțiunile de echivalență, ordine, funcție, permutare sînt instrumente indispensabile în toate ramurile matematicii. Studiul lor constituie obiectul capitolelor 10—13.

Importanța materiilor studiate în primele 13 capitole depășește cu mult cadrul matematicii și constituie, de fapt, o inițiere în metodele raționale folosite în mod curent în toate domeniile gîndirii, științei și tehnicii. Să semnalăm, în special, că grafiile utilizate aci în scop pur pedagogic sînt folosite în mod obișnuit în discipline foarte diferite, de la teoria circuitelor pînă la lingvistică.

În capitolul 14 sînt prezentate transformări geometrice (respectînd statutul lor de funcțiuni). [Într-o situație sugerată de elevi, cititorul avertizat va putea recunoaște funcția complexă $f(z) = z / |z|$ *pentru* $z \neq 0$ *și* $f(0) = 0$*].*

Primele noțiuni referitoare la ordine în geometrie au fost introduse în capitolul 11. Ele au condus la noțiunea de convexitate, a cărei importanță este deosebit de mare în analiză și în programarea liniară. Capitolul 15 lămurește mai mult noțiunea de ordine în legătură cu proiecțiile paralele. Aici găsim explicitate, sub formă de axiome sau leme, fapte prea adesea escamotate în expunerile obișnuite[1]*. Capitolul 16 cuprinde metode intuitive pentru un prim studiu al numerelor cardinale și caracterizarea mulțimilor finite și infinite după considerentele lui Dedekind. Ordonarea numerelor cardinale va conduce la teorema lui Bernstein care, eventual, poate fi admisă ca axiomă în predarea la clasele mici.*

---

[1] În mica lucrare *Papy-Debbaut: Geometrie afină plană și numere reale* [Presses Universitaires de Bruxelles, Bruxelles 1962(65 p.)], cititorul interesat va găsi o expunere mai amănunțită asupra acestui subiect, precum și demonstrația lemelor admise aici ca axiome.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolele 17 și 18 sînt consacrate adunării și înmulțirii numerelor naturale. Aci se caută pe cît posibil să se facă o expunere care rămîne valabilă pentru studiul ulterior al numerelor cardinale infinite și, din cînd în cînd, se dau cu titlu de exercițiu, cîteva calcule cu numere cardinale la numărător. Experiența a arătat că teoria adunării și a înmulțirii, prezentată în raport direct cu mulțimile și relațiile, interesează foarte mult pe elevi, cărora le place să stabilească legături între cunoștințele anterioare de aritmetică elementară și cunoștințele lor mai recente referitoare la mulțimi. Ori de cîte ori sînt date două demonstrații, cititorul sau profesorul va trebui să rețină numai cea pe care o consideră mai accesibilă. Întrucît chiar de la începutul acestei cărți elevul a fost obișnuit să reprezinte cele mai diverse obiecte prin litere, calculul literal se impune în mod firesc și fără nici o dificultate.

În capitolul 19 numerația de poziție este studiată în cazul numerației binare utilizată la mașinile electronice și considerată din ce în ce mai mult ca o metodă admirabilă pedagogică. [1]

Capitolul 20 prezintă inelul numerelor întregi raționale, cel mai comod cadru pentru studiul aritmeticii. Se studiază ecuațiile în grupul $Z, +y$.

Capitolele 18 și 20 conțin numeroase exerciții care familiarizează pe elev cu metodele calculului algebric.

Capitolele 21—23 urmăresc construirea geometriei afine a planului, orientată spre structurile vectoriale care domină toată matematica actuală. Pentru a evita confuziile de limbă, rezervăm cuvîntul vector *pentru* vectorii liberi *sau translații.* Vectorul localizat *este, firește, numit cuplu. După introducerea echipolenței, la care se dau numeroase exerciții de construcție și de calcul, se trece la primele demonstrații geometrice demne de acest nume. Ele sînt prezentate sub formă de filme sau benzi desenate, care constituie un suport pictural pentru însăși structura demonstrației și scot în relief desfășurarea acesteia, adesea prin ilustrări succesive și diferite ale unei aceleiași situații. Demonstrația este accesibilă în mai multe etape distincte. Prima constă în a înțelege filmul și a-l putea explica prin cuvinte obișnuite. Etapa următoare constă în a reconstitui o demonstrație. Apoi se vor cere explicații mai formale. Numai ulterior se va trece la redactarea propriu-zisă a demonstrației.*

De la început s-a urmărit să se pună la îndemîna elevului instrumente care să-i rămînă utile indiferent de ocupația aleasă după terminarea studiilor. Astfel, teorema 2 din capitolul 21 se referă la proiecția echipolențelor și pregătește teorema lui Tales.

Translațiile sînt prezentate drept clase de echipolență și conduc dintr-o dată la grupul comutativ al translațiilor. Să subliniem importanța pedagogică a grupului $\Pi_0, +$ *(grupul planului punctat), izomorf grupului translațiilor.*

În capitolul 23 se trece la grupul translațiilor și simetriilor centrale al căror studiu îmbogățește viziunea planului și leagă strîns algebra de geometrie. Acest capitol este o pregătire pentru studiul ulterior al grupului izometriilor.

---

[1] Vezi, privitor la aceasta, *Papy Debbaut*, op. cit., p. 38 și urm.

Scanned with OKEN Scanner

Grupurile apar în această carte sub forme foarte diverse: în mod implicit în capitolul 4 o dată cu diferența simetrică, în mod explicit în capitolul 13 (grup de permutări), în capitolul 20 (grup aditiv al numerelor întregi raționale), în capitolul 22 (grupul translațiilor), în capitolul 23 (grupul translațiilor și simetriilor centrale). Există deci un material suficient pentru a motiva un prim studiu al grupurilor. Acest lucru se face în ultimul capitol al cărții, după introducerea grupurilor ciclice, atît de distractive. Aici se arată elevilor importanța unui astfel de studiu abordîndu-se ecuațiile într-un grup oarecare, ceea ce permite numeroase aplicații în situații foarte diferite.

Notele istorice sînt numai ocazionale și au fost scrise pentru copii.

Cartea a fost redactată sub controlul permanent al lui Frédérique. Numai datorită severității sale susținute s-a putut realiza această lucrare. Îi exprim toată afectuoasa mea recunoștință.

Mulțumesc doamnei Maddy Noël care a recitit părți importante din manuscris: observațiile sale au îmbunătățit redactarea.

Domnișoara Cagnant a realizat desenele, care constituie sufletul acestei cărți, cu talent și . . . o răbdare pentru care îi sînt recunoscător.

Mulțumesc domnului Pierre Debbaut pentru întocmirea indicelui lucrării, precum și domnilor Lucien Delmotte și Joseph Lievens care au contribuit la corectarea temelor.

Toată recunoștința mea se îndreaptă către editorii Didier pentru grija excepțională acordată editării cărții.

Exprim, în sfîrșit, afectuoasa mea prietenie tuturor elevelor de la cursurile experimentale ale Școlii normale din Berkendael, voioase inspiratoare ale acestei lucrări.

Bruxelles, ianuarie 1963 PAPY

Scanned with OKEN Scanner

1

Mulțimi

1 — Ideea de **mulțime** este foarte obișnuită.

Cu diverse nuanțe, ea este evocată de următoarele cuvinte:
clasă, mulțime, grup, grupare, colecție, colectivitate, trupă, echipă, familie, turmă, clan, escadrilă, roi, ceată, regiment, gloată, asociație, societate, școală.

EXERCIȚIU — Dați alte exemple care evocă ideea de mulțime.

2 — EXEMPLE

E1 Un ansamblu de două piese, format din această fustă și această bluză.
E2 Acest roi de albine.
E3 Această trupă de soldați.
E4 Această clasă de elevi.
E5 Această pereche de ghete.
E6 Această turmă de oi.
E7 Această escadrilă de avioane.
E8 Mulțimea claselor (camerelor) din școala noastră.
E9 Mulțimea meselor din sufragerie.
E10 Mulțimea picioarelor meselor din sufragerie.
E11 Mulțimea cifrelor: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
E12 Mulțimea teoremelor dintr-un curs de geometrie.
E13 Această legătură de morcovi (mulțime de morcovi).
E14 Această mulțime de legături de morcovi.
E15 Acest buchet de flori (mulțime de flori).
E16 Mulțimea atomilor din această moleculă de acid sulfuric.
E17 Mulțimea vagoanelor acestui tren.
E18 Mulțimea meselor și picioarelor meselor din această sufragerie.
E19 Mulțimea prenumelor elevilor din clasa noastră.
E20 Mulțimea elevilor din clasa noastră.

Scanned with OKEN Scanner

3 — *O mulțime este determinată atunci cînd se cunosc obiectele din care este constituită; atunci cînd se cunosc care sînt elementele sale.*

Cuvîntul *obiect* este folosit aici într-un sens foarte larg.

În exemplul E1 fusta și bluza sînt obiecte.
În exemplul E2 albinele sînt obiecte.
În exemplul E12 fiecare teoremă este un obiect.
În exemplul E13 morcovii sînt obiecte.
În exemplul E14 legăturile de morcovi sînt obiecte.

Acest ultim exemplu arată că noi considerăm mulțimile ca obiecte.

Orice mulțime este un obiect.

4 — ELEMENTE

În exemplul E2 vom spune că fiecare albină este un element al roiului.

În general, vom spune că un obiect dintr-o mulțime **este un element** al acestei mulțimi. Vom spune că mulțimea **cuprinde** fiecare din elementele sale. Aceasta corespunde vorbirii obișnuite.

« Cîți membri are familia dumitale? »
« Suita cortegiului regal cuprindea treizeci și șapte de persoane ».

În loc să se spună că un obiect este **element al unei mulțimi,** se spune că acest obiect **aparține** acestei mulțimi.

Astfel, în cazul exemplului E6, vom spune că această oaie aparține cutărei turme.

În exemplul E1 o fustă bine determinată și o bluză bine determinată sînt singurele obiecte ale mulțimii. Un nasture cusut pe bluză nu este un element al mulțimii.

În exemplul E2 aripile albinelor nu sînt elemente ale mulțimii.
În exemplul E9 picioarele meselor nu sînt elemente ale mulțimii.
În exemplul E10 mesele nu sînt elemente ale mulțimii.
În exemplul E18 mesele din sufragerie și picioarele lor sînt singurele elemente ale mulțimii.
În exemplul E6 nici capetele oilor, nici picioarele lor nu fac parte din turmă.

Scanned with OKEN Scanner

5 — TERMENI — EGALITATE

În matematică, obiectele sînt deseori reprezentate prin **termeni** care sînt semne sau grupări de semne.

Astfel:

2, 27, 9×3, $54 : 2$, $6 + 6$, $2 + 3 - 5 + 4$, $1/2$ sînt termeni care reprezintă obiectele următoare:

« numărul doi »
« numărul douăzeci şi şapte »
« numărul douăzeci şi şapte »
« numărul douăzeci şi şapte »
« numărul doisprezece »
« numărul patru »
« numărul o jumătate ».

Dacă doi termeni indică acelaşi obiect, se spune că ei sînt egali şi acest fapt se arată cu ajutorul semnului $=$, în modul cunoscut:

$$27 = 9 \times 3$$

$$54 : 2 = 9 \times 3$$

În cazul contrar, se utilizează semnul $\neq$. Astfel:

$$2 \neq 54 : 2$$

$$27 \neq 2 + 3 - 5 + 4$$

$$6 + 6 \neq 1/2$$

Mulţimile vor fi deseori notate cu litere. Dacă A reprezintă mulţimea care cuprinde numai elementele 1, 3, 5, 7 şi 9,

dacă B reprezintă mulţimea numerelor întregi mai mari decît 0 şi mai mici decît 10,

dacă C reprezintă mulţimea numerelor întregi impare mai mari decît 0 şi mai mici decît 10,

vom avea

$$A \neq B$$

$$B \neq C$$

$$A = C$$

ceea ce se va scrie în mod concentrat

$$B \neq A = C$$

Scanned with OKEN Scanner

6 — PROPRIETĂȚILE EGALITĂȚII

Dacă a, b, c, reprezintă fiecare un obiect, avem următoarele proprietăți:

1. Pentru orice obiect a : $a = a$ **(Reflexivitatea** egalității).
2. **Dacă** $a = b$, **atunci** $b = a$ **(Simetria** egalității).
3. **Dacă** $a = b$ și $b = c$ **atunci** $a = c$ **(Tranzitivitatea** egalității).

EXERCIȚIU — a, b, c reprezintă fiecare un obiect.

Dacă $a = b$ și $b = c$, **atunci** $c = a$ **(Circularitatea** egalității).

7 — SEMNUL DE APARTENENȚĂ

Să presupunem că a este un obiect și că E este o mulțime.
Dacă obiectul a aparține mulțimii E, notăm

$$a \in E \tag{1}$$

În cazul contrar notăm

$$a \notin E \tag{2}$$

Astfel, dacă notăm cu C clasa noastră, iar cu m pe colega noastră Monica, vom scrie

$$m \in C \tag{3}$$

Dacă notăm cu g obiectul « Gagarin », va trebui să scriem

$$g \notin C \tag{4}$$

Dacă E este o mulțime, pentru orice obiect x avem una, și numai una, din eventualitățile $x \in E$ *sau* $x \notin E$.

8 — SĂ CONSTITUIM MULȚIMI DUPĂ FANTEZIA NOASTRĂ !

Vom fi definit o mulțime E, dacă pentru orice obiect t, este evident că avem una și numai una dintre eventualitățile

$$t \in E \quad \text{sau} \quad t \notin E$$

Uneori se dă o mulțime enumerîndu-se elementele sale. (Este ceea ce se numește o definiție *sintetică*).

Putem forma orice mulțime vrem, punînd împreună orice obiect după bunul nostru plac.

Scanned with OKEN Scanner

Exemple de mulțimi. (Notați denumirea care se înțelege de la sine!)

E21 : H = { Charlie Chaplin, Walt Disney, Victor Hugo }

E22 : A = { acest agent de poliție, acest castravecior, acest vîrf de sare }

E23 : B = { această floare, această cratiță }

EXERCIȚII

1. Nici o petală nu este element al mulțimii B (din exemplul E23).
2. Nasul agentului de poliție nu este element al mulțimii A (din exemplul E22).

9 — SCHEME

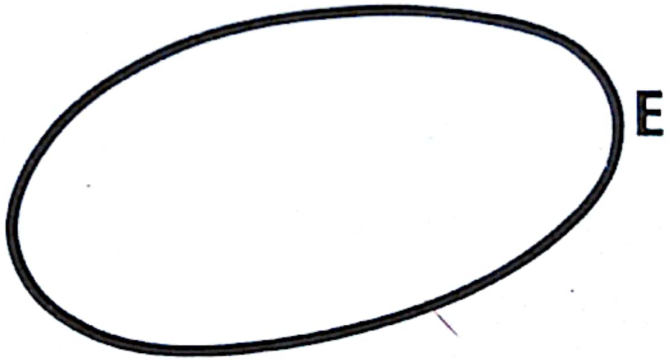
Elevii au prezentat mulțimea următoare:
E = { tabla (cu picior), o farfurie, colega noastră Simona }
Să notăm tabla cu *t*, farfuria cu *a* și pe Simona cu *s*.
Deci, avem:

$$E = \{ t, a, s \}$$

Nimic nu lasă să se ghicească că o mulțime fusese constituită din *a*, *s* și *t*. Pentru a ne aminti că am format o mulțime care cuprindea numai aceste obiecte, le-am încercuit cu o curbă lungă, închisă.

Acest procedeu va fi utilizat deseori pentru reprezentarea grafică a mulțimilor. Nu urmărim nici să reprezentăm, nici să situăm obiectele, totul se limitează la desenarea curbei.

Astfel, mulțimea E va fi reprezentată simplu prin desenul



Vom conveni să reprezentăm orice obiect printr-un punct. Elementele mulțimii vor fi reprezentate prin puncte în interiorul curbei; obiectele care nu fac parte din mulțime vor fi reprezentate prin puncte situate în exteriorul curbei.

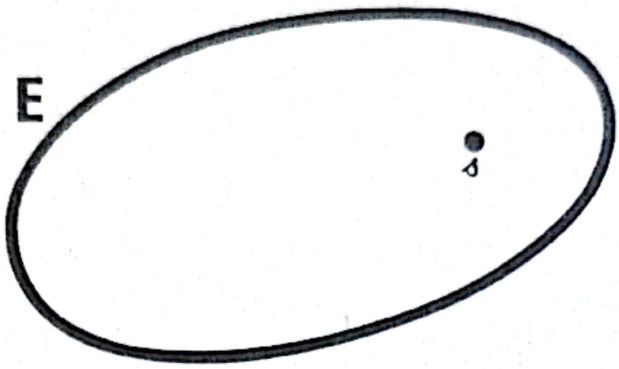
Orice obiect este reprezentat, deci, printr-un punct fie în interiorul curbei, fie în exteriorul ei. Nici un obiect nu este reprezentat printr-un punct situat pe curbă.

Nu vom nota decît punctele obiectelor asupra cărora dorim să atragem atenția.

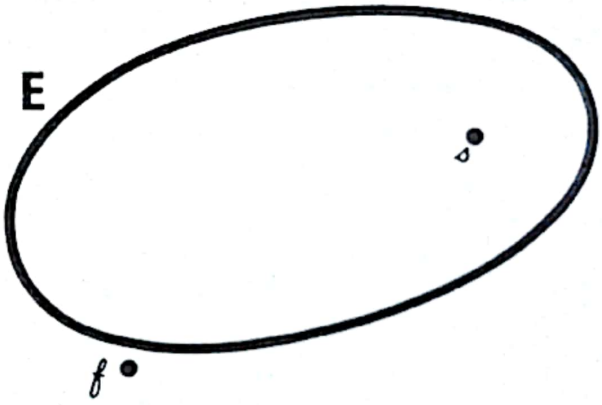
Astfel, desenul de mai sus reprezintă perfect mulțimea E.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă vrem să arătăm că Simona este element al mulțimii E, vom nota un punct care reprezintă pe Simona.

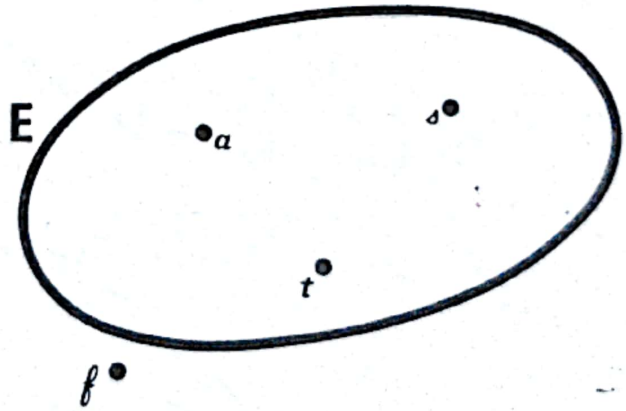


Să arătăm grafic că turnul Eiffel, notat cu f, nu este element al lui E



Să reprezentăm grafic formulele:

$$t \in E, \quad a \in E, \quad s \in E, \quad f \notin E$$

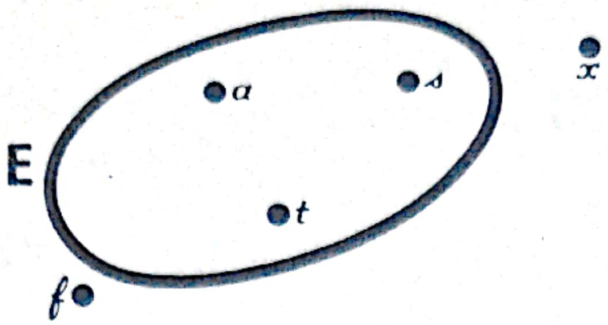


Știm că t, a, s sînt singurele elemente ale mulțimii E.
Pentru orice alt obiect x, vom avea formula

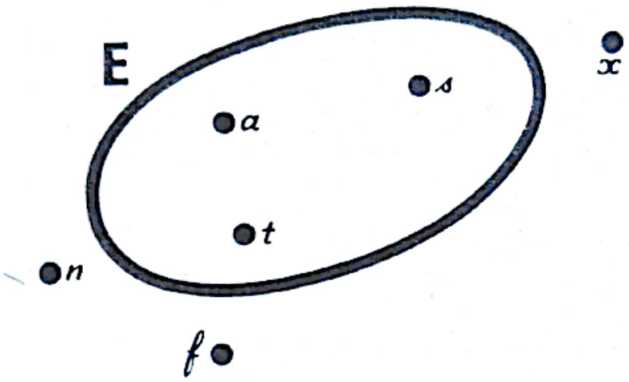
$$x \notin E$$

Scanned with OKEN Scanner

Să notăm această informație pe grafic



Dacă n reprezintă nasul Simonei $n \notin E$



10 — DEFINIȚIE ANALITICĂ

Deseori, definim o mulțime enunțînd o proprietate caracteristică a elementelor sale, adică o proprietate pe care o au toate elementele sale, și pe care numai ele o au.

E24 — Mulțimea C a elevilor clasei noastre care poartă ochelari. Aci proprietatea este: « a fi elev al clasei noastre și a purta ochelari ».

Scriem

$C = \{x \mid x$ este elev al clasei noastre și poartă ochelari$\}$ ceea ce se citește:

« C *este mulțimea elementelor* x, **astfel încît** x *este un elev din clasa noastră care* poartă ochelari ».

Este important să se ocolească și să se înlăture proprietățile care nu sînt destul de clare. Fraza: « elevele clasei noastre care au ochi albaștri » nu permite definirea unei mulțimi. Într-adevăr, două din colegele noastre — una cu ochi căprui, de o nuanță închisă și cealaltă cu ochi albaștri, de o nuanță deschisă — au fost indicate independent să stabilească « elevele clasei noastre care — după părerea lor — au ochi albaștri ». Prima din colegele noastre a găsit 10 eleve cu ochi albaștri, iar cea de-a doua a numărat 3 !

Proprietatea aleasă era de natură *subiectivă* (ea pare că depinde mai ales de culoarea ochilor persoanei care face alegerea) și nu definește o mulțime în sens matematic.

Scanned with OKEN Scanner

11 — MULȚIME CU DOUĂ ELEMENTE — MULȚIME CU UN SINGUR ELEMENT. — MULȚIME FĂRĂ NICI UN ELEMENT (MULȚIME VIDĂ)

Elevele clasei noastre se pot afilia la următoarele cercuri sau cluburi:

« Cercul sportiv »
« Teatru pentru tinerii amatori »
« Tineretul muzical »
« Cine-club »
« Fotograful amator »
« Cercul naturaliștilor »

Nici o elevă nu poate să se afilieze la mai mult de două cercuri sau cluburi, sau să se afilieze simultan la *Teatru pentru tinerii amatori* și la *Cine-club*.

Toate elevele au depus o cerere semnată de capul familiei și în care se arată alegerea făcută. Toate cererile au fost depuse.

Situația este clară. Secretariatul școlii poate spune care sînt elevele din fiecare clasă afiliate la fiecare club.

Să considerăm cazul clasei noastre și să stabilim următoarele definiții:

K = mulțimea elevelor din clasa noastră.
S = mulțimea elevelor din clasa noastră afiliate la *Cercul sportiv*.
T = mulțimea elevelor din clasa noastră afiliate la *Teatru pentru tinerii amatori*.
M = mulțimea elevelor din clasa noastră afiliate la *Tineretul muzical*.
C = mulțimea elevelor din clasa noastră afiliate la *Cine-club*.
I = mulțimea elevelor din clasa noastră afiliate la *Fotograful amator*.
N = mulțimea elevelor din clasa noastră afiliate la *Cercul naturaliștilor*.

Fiecare din elevele clasei noastre va fi notată cu o literă mică din alfabetul latin.

Astfel avem:

$K = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, u, v, w, x\}$

Aproape toate elevele clasei noastre s-au afiliat la *cercul sportiv*, mai precis:

$S = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, t, v, x\}$

De asemenea, majoritatea elevelor au optat fie pentru *Teatru pentru tinerii amatori*, fie pentru *Cine-club*. Acest lucru se vede din formulele

$$T = \{a, d, h, n\}$$
$$C = \{b, g, k, m, p, q, r, t, v, w, x\}$$

Celelalte trei cluburi au avut mult mai puțin succes.
Numai elevele *f* și *w* s-au hotărît să nu ducă nici o activitate.

Scanned with OKEN Scanner

Notăm

$$N = \{f, w\}$$

și vom spune că mulțimea N este *o pereche*.

Tineretul muzical a avut și mai puțin succes: c este singura noastră melomană. Vom continua să notăm

$$M = \{c\}$$

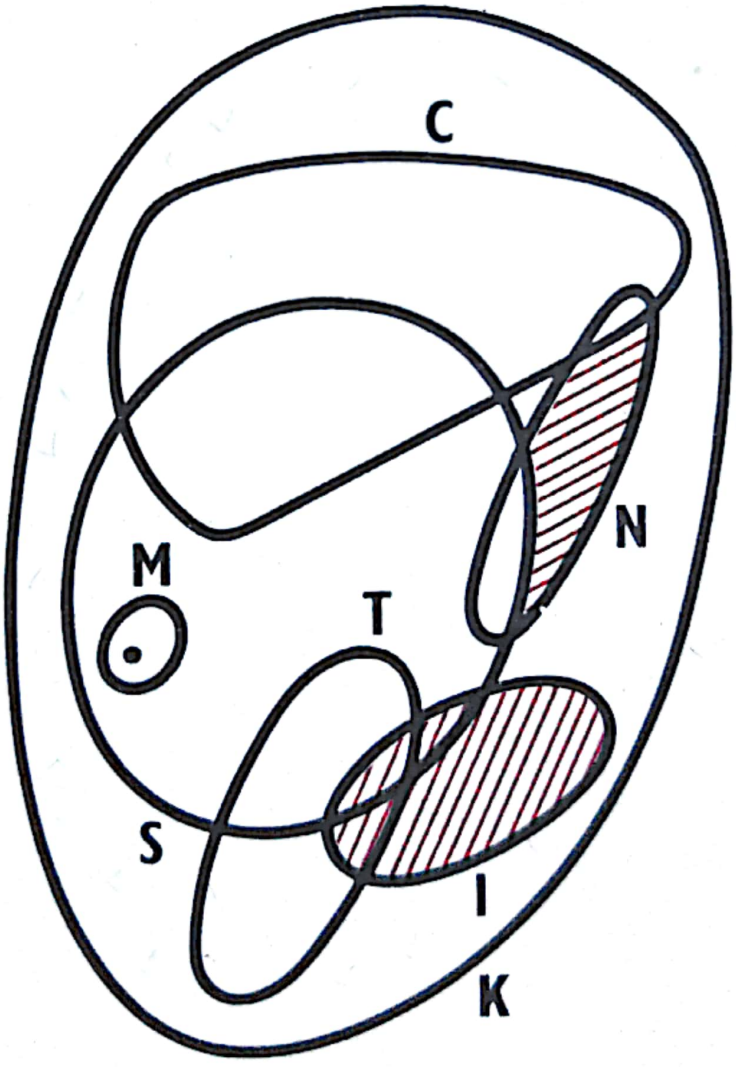
și vom spune că mulțimea M este o mulțime cu un singur element.

Nici una din colegele noastre nu s-a afiliat la cercul *Fotograful amator*. Nu este firesc să arătăm acest lucru notînd

$$I = \{\ \}$$

Vom spune că mulțimea I este **vidă**.

Să reprezentăm situația din clasa noastră printr-o diagramă în care vom haşura regiunile sau zonele în care nu pot exista puncte care reprezintă o elevă.



Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

1. Se cere să se noteze punctele care reprezintă pe elevele clasei noastre, în schema de mai sus.
2. Să notăm cu X mulțimea elevelor din clasa noastră care nu s-au afiliat la nici un club, cu Y mulțimea elevelor care s-au afiliat numai la un singur club, cu Z mulțimea elevelor care s-au afiliat la două cluburi, cu T mulțimea elevelor care s-au afiliat la trei cluburi. Se cere să se definească X, Y, Z, T sintetic, adică să se completeze formulele de mai jos:

$$X = \{\ldots\}$$
$$Y = \{\ldots\}$$
$$Z = \{\ldots\}$$
$$T = \{\ldots\}$$

Se cere să se traseze pe desenul de la pag. 9 o diagramă pentru X, o diagramă pentru Y și o diagramă pentru T.

Haşurați tot ce poate fi haşurat pe acest desen.

12 — EGALITATEA MULȚIMILOR. — MULȚIMEA ∅

— Mulțimile sînt obiecte.

Să le aplicăm ceea ce am spus despre egalitate la § 5.

Să presupunem că A reprezintă o mulțime și că B reprezintă de asemenea o mulțime.

Cînd vom putea nota A = B?

— Dacă și numai dacă A și B reprezintă aceeași mulțime. Adică dacă și numai dacă din A și B fac parte aceleași obiecte.

— Vom avea deci A = B dacă și numai dacă pentru orice obiect *t* avem același răspuns la cele două întrebări « *t* este element al lui A? », « *t* este element al lui B? »

Să presupunem că fiecare din literele V, W reprezintă o mulțime.

Sîntem preveniți că mulțimea notată cu V este vidă.

Ni se semnalează de asemenea că mulțimea notată cu W este vidă.

Să ne punem întrebările : « este obiectul *t* un element al lui V? » ; « este obiectul *t* un element al lui W? ».

Constatăm că trebuie să răspundem *nu* la toate aceste întrebări, oricare ar fi obiectul *t*.

Deci V = W.

Am stabilit deci că nu există decît o singură mulțime vidă.

Ea se notează cu simbolul ∅.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă a și b reprezintă obiecte distincte, există o mulțime și numai o singură mulțime care cuprinde pe a și b ca singure elemente. O notăm cu {a, b}. O astfel de mulțime se numește o pereche.

Există o mulțime și numai una care cuprinde pe a ca singur element. O notăm cu {a}. O astfel de mulțime se numește o mulțime cu un singur element.

Există o mulțime și numai una care nu cuprinde nici un element. Aceasta este mulțimea vidă pe care o notăm cu ∅.

Există o mulțime care cuprinde numai numerele naturale 0, 1, 2, . . . Vom nota această mulțime cu ω.

Astfel $\omega = \{x \mid x \text{ este un număr natural}\}$

Se va scrie de asemenea

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

EXERCIȚII

1. Dați ca exemplu mai mulți termeni care reprezintă obiectul « numărul douăzeci și opt ».
2. Avem {Monica, Gilbert} = {Gilbert, Monica} = = {Monica, Monica, Monica, Gilbert}
3. Dacă $a \neq b$, spunem că mulțimea $\{a, b\}$ este o pereche. Mulțimea {Gilbert Bécaud, tatăl fiului lui Gilbert Bécaud} este o pereche?
4. Fraza

   « *elevele clasei noastre care au părul blond* »

   permite să se definească o mulțime?
5. Definiți sintetic mulțimea numerelor naturale pare cuprinse între 17 și 83.
6. Dați o definiție analitică a mulțimii (1, 2, 8).
7. Care este mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100 și divizibile cu 13 și 17?
8. Vom nota cu *div* 12 mulțimea divizorilor lui 12. Avem deci:

   $div\ 12 = \{x \mid x \text{ este un divizor al lui } 12\}$

   $div\ 12 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

   Prima din aceste formule definește *analitic* pe *div* 12. A doua definește *sintetic* pe *div* 12.

   Vreți să definiți sintetic pe *div* 20, *div* 72, *div* 100, *div* 13, *div* 7, *div* 19, *div* 29, *div* 2, *div* 97, *div* 1024?

   Comentați rezultatele obținute!

   Arătați că $div\ 1 = \{1\}$ și că $div\ 0 = \omega$

Scanned with OKEN Scanner

9. Avem $\{x \in \omega \mid 6 \text{ este un divizor al lui } x\} = \{0, 6, 12, \ldots\}$
Această mulțime se mai notează cu $6\,\omega$.
În mod analog dați patru notații pentru mulțimea multiplilor lui 15.

10. Un număr natural p se numește număr prim dacă și numai dacă *div* p este o pereche.

În rezumat

p prim $\Longleftrightarrow$ *div* p este o pereche.

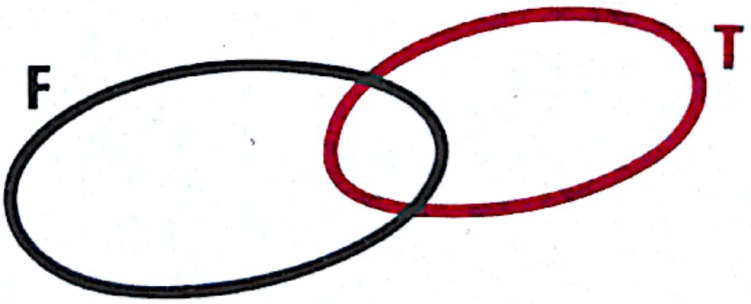
Arătați că 1 nu este prim.
Ce puteți spune despre *div* 1?

11. Vreți să definiți sintetic mulțimea numerelor prime prin care este divizibil numărul 18?
Același lucru pentru 1024, 100, 7?
Comentați rezultatele obținute.

12. Notați cu puncte ceasul profesorului vostru, pe șeful întreprinderii, buretele clasei, luna. Trasați o diagramă a mulțimii F admițînd ca elemente numai aceste obiecte.
Reprezentați printr-un punct acul mare al ceasului profesorului vostru.

13. Notați pe o schemă mulțimea C a elevelor din clasa voastră, mulțimea T a elevelor din clasa voastră care poartă șorț, mulțimea L a elevelor din clasa voastră care poartă ochelari?

14. Notați cu F mulțimea florilor dintr-un magazin și cu T mulțimea lalelelor din acest magazin.
Vreți să reprezentați aceste mulțimi pe același desen?
Vreți să reprezentați un mărgăritar din magazin, o lalea din alt magazin?
Schema de mai jos este oare complet greșită?

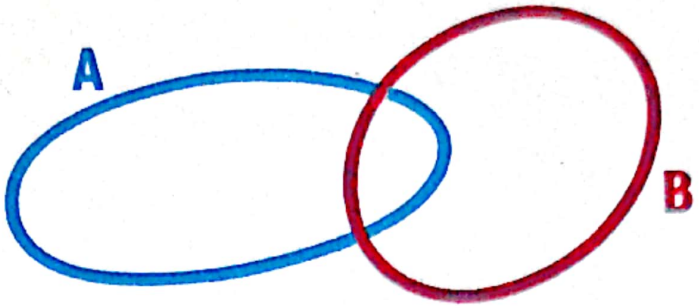


Îmbunătățiți această schemă hașurînd zonele goale.

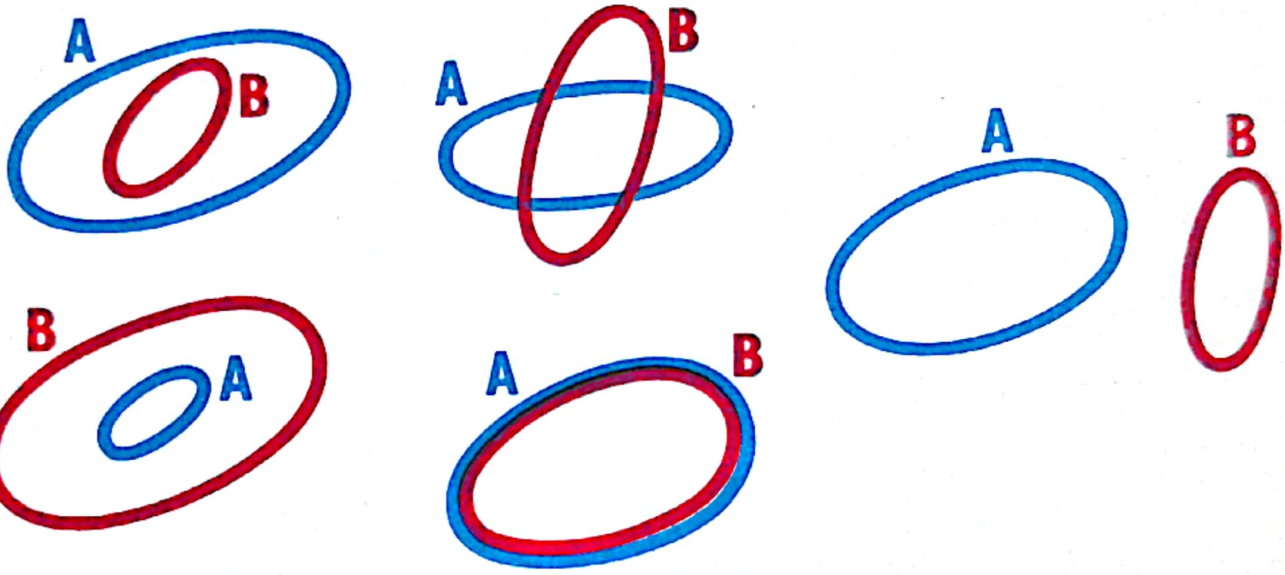
15. Se cere să notați pe o schemă mulțimea automobilelor înscrise în Belgia, mulțimea mașinilor Citroën din Belgia, mulțimea mașinilor Fiat înscrise în Belgia, mulțimea mașinilor Fiat 600 înscrise în Belgia, mulțimea mașinilor înscrise în Belgia și care nu au răcire cu apă.

Scanned with OKEN Scanner

16. Se dă următoarea schemă.



Se menționează că A = B. Ce zone puteți haşura?
Aceeaşi întrebare pentru următoarele scheme.



Ce puteți spune în plus în cazul schemei din dreapta?

17. Un cultivator ajunge la tîrg cu o încărcătură completă de morcovi: o mulțime C de morcovi pe care o vom reprezenta printr-o diagramă. Fiecare legătură de morcovi definește o mulțime, pe care o vom numi simplu o legătură.

Fie B o legătură (o mulțime de morcovi). Vreți să trasați o diagramă a lui B?

Care sînt obiectele reprezentate prin puncte situate în interiorul curbei B?

Care sînt obiectele reprezentate prin puncte situate în interiorul curbei C?

Care sînt obiectele situate fie în interiorul curbei C, fie în exteriorul acestei curbe?

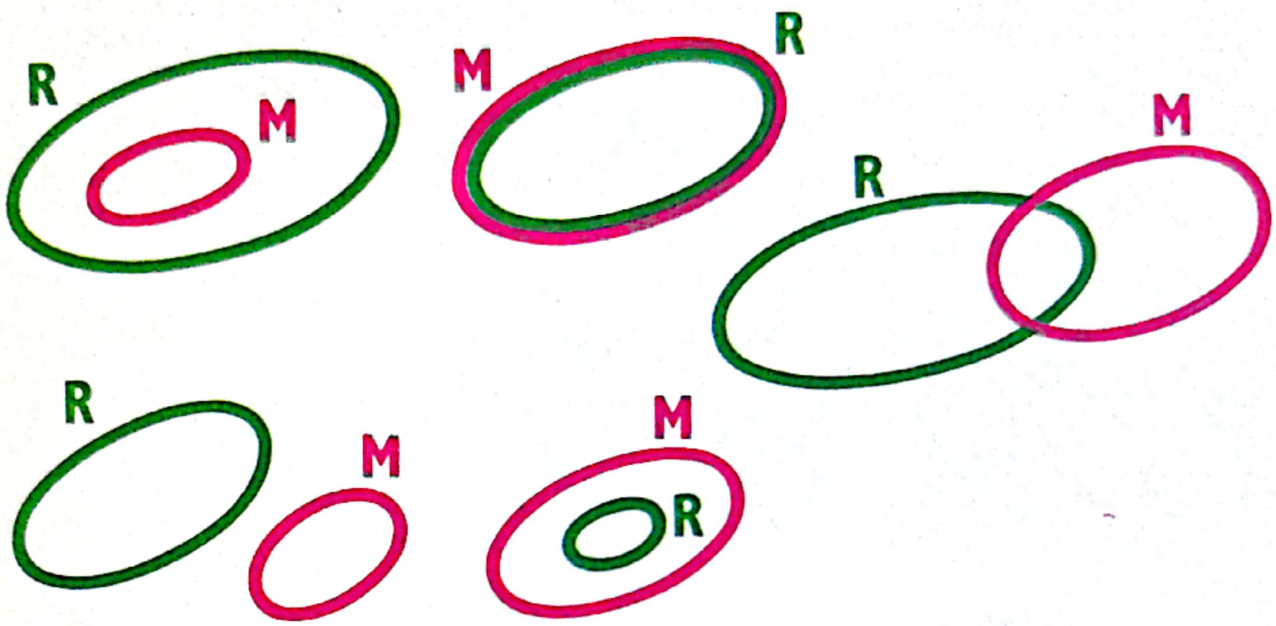
Legătura B este un obiect. Unde situăm un punct care să-l reprezinte pe B?

Se cere să se reprezinte mulțimea legăturilor de morcovi.

Scanned with OKEN Scanner

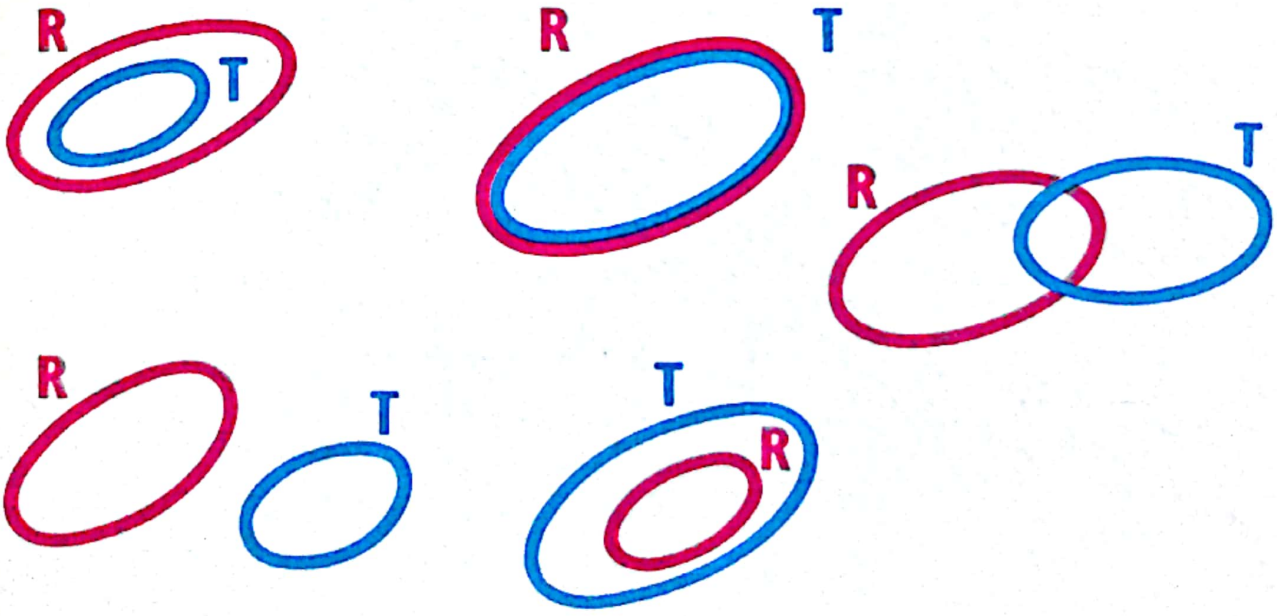
18. Să notăm cu M mulțimea mamiferelor și cu R mulțimea rumegătoarelor.

Se cere să se arate care dintre schemele de mai jos pot fi folosite pentru a reprezenta pe M și pe R. Haşurați zonele goale.



19. Fie R mulțimea mașinilor roșii înscrise în Belgia.
Fie T mulțimea mașinilor Ford Taunus înscrise în Belgia.

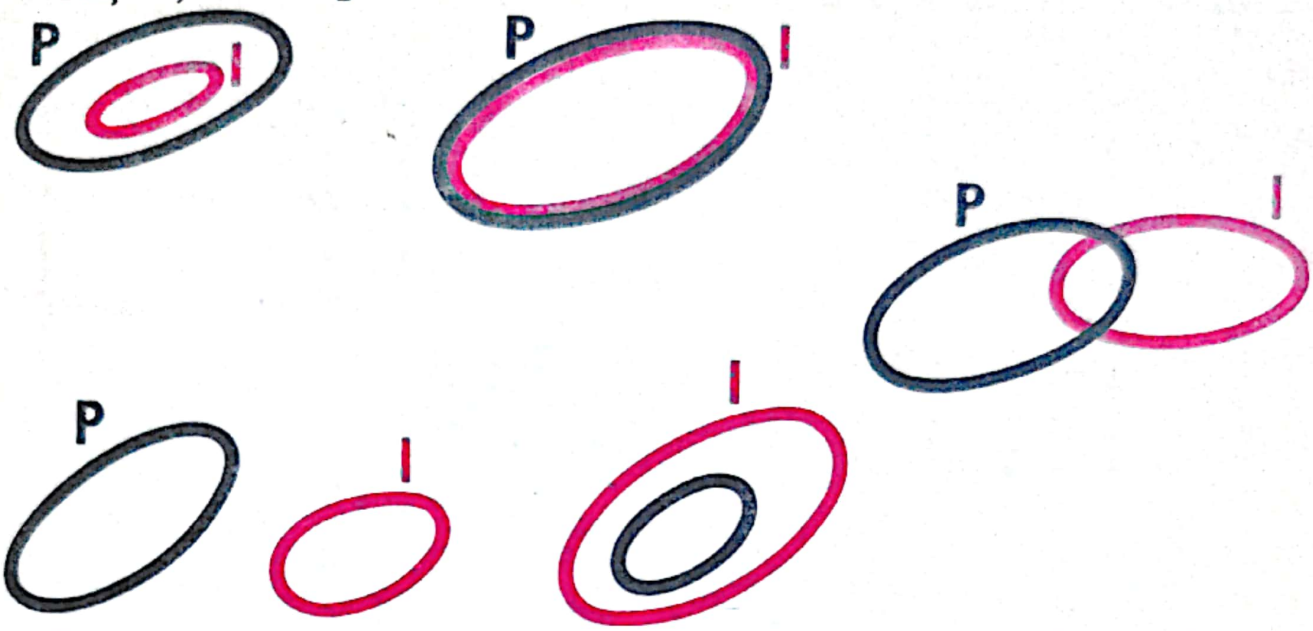
Care dintre schemele de mai jos pot fi folosite pentru a reprezenta pe R și pe T?
Haşurați zonele goale.



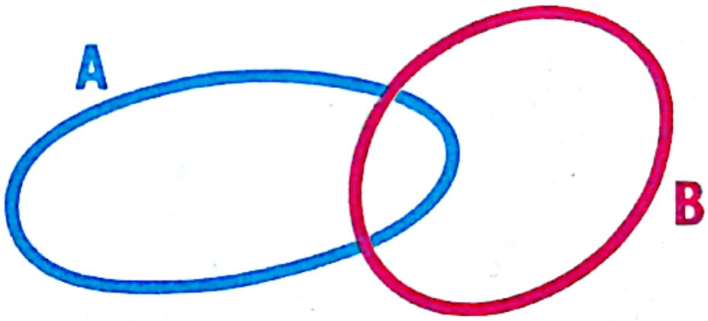
Scanned with OKEN Scanner

20. Fie P mulțimea numerelor pare și I mulțimea numerelor impare.

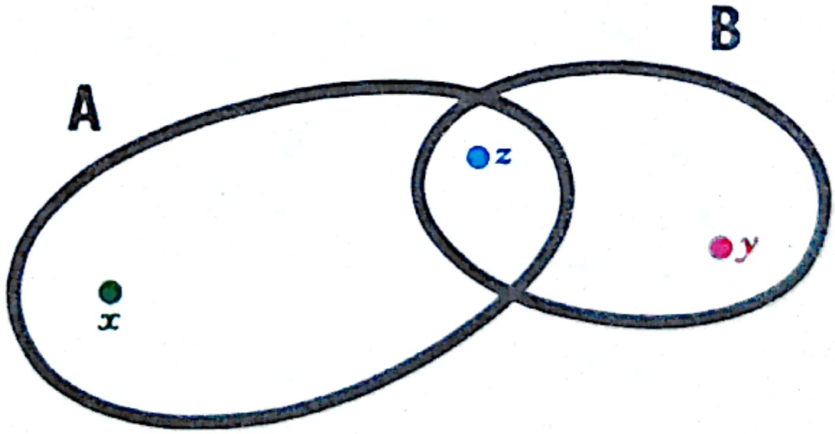
Care dintre schemele de mai jos pot folosi la reprezentarea lui P și I? Haşurați zonele goale.



21. Închipuiți-vă două mulțimi A și B și nu-mi spuneți nimic despre ele! Ele pot fi reprezentate prin această schemă.



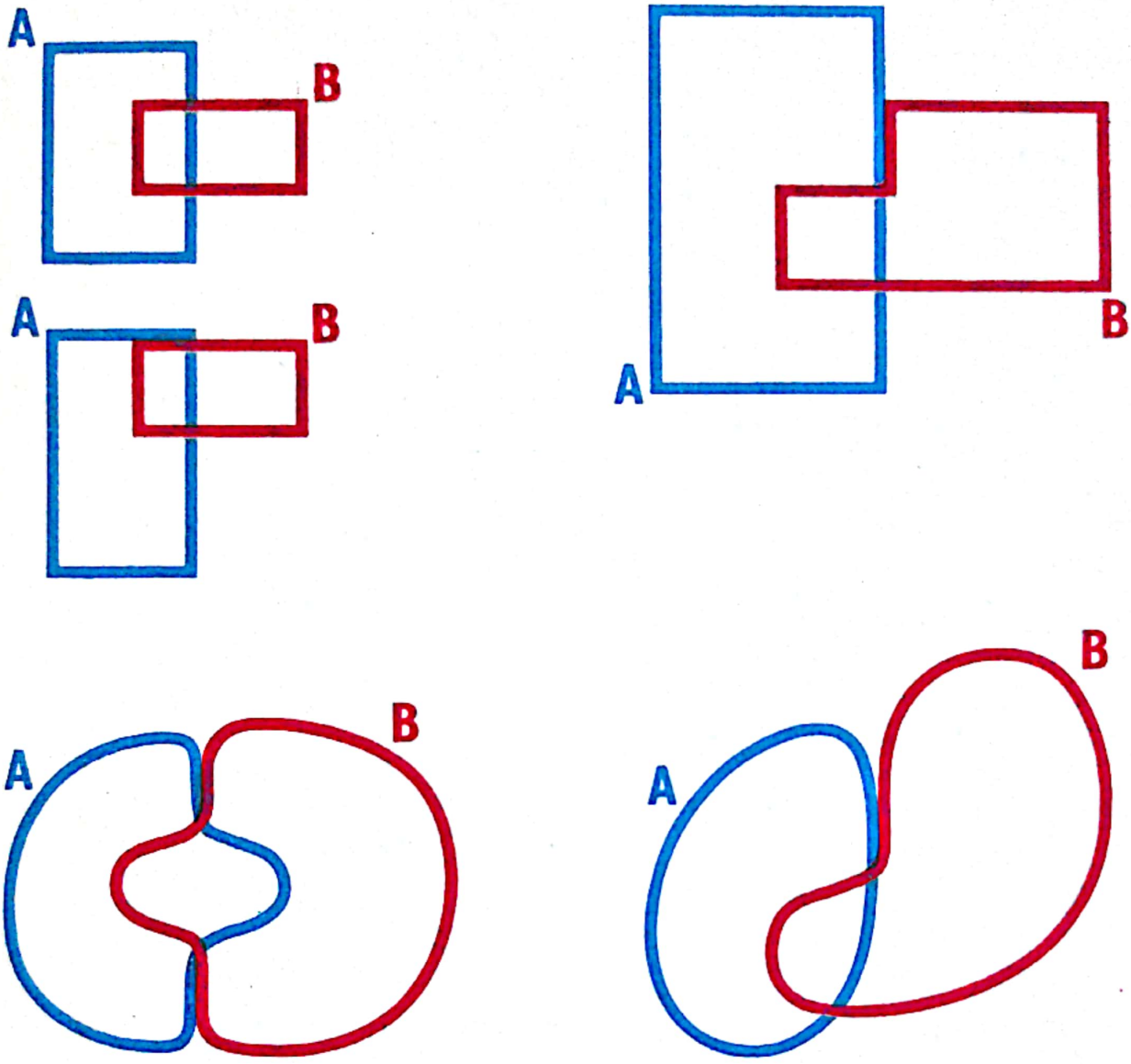
22. Explicați schema următoare.



$x \in A$ $x \notin B$ $\quad y \notin A$ $y \in B$ $\quad z \in A$ $z \in B$ $\quad t \notin A$ $t \notin B$

Scanned with OKEN Scanner

23. Închipuiți-vă o mulțime A și o mulțime B. Ele pot fi reprezentate prin fiecare din schemele de mai jos.



Închipuiți-vă alte scheme care să poată reprezenta mulțimea A și B, *oricare ar fi acestea*!

24. Mulțimea vidă $\varnothing$ este un obiect.
Mulțimea cu un singur element $\{\varnothing\}$ este mulțimea care are pe $\varnothing$ ca singur element.

Pentru orice obiect t: $t \notin \varnothing$

Din contra $\varnothing \in \{\varnothing\}$

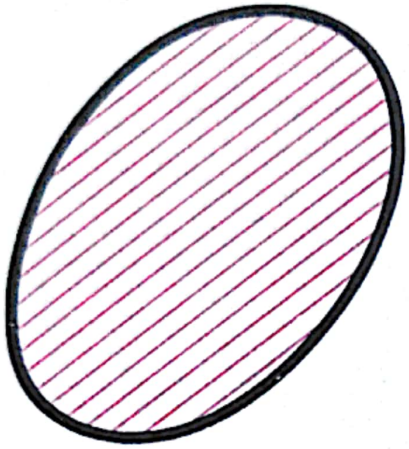
Deci $\varnothing \notin \varnothing$ și $\varnothing \in \{\varnothing\}$

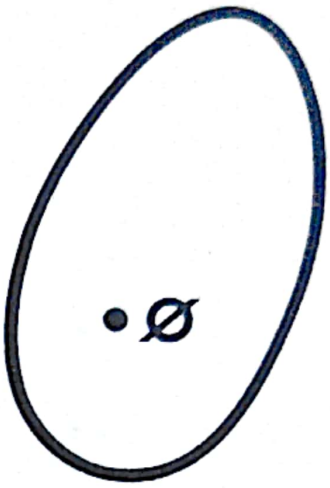
Explicați formula $\varnothing = \{\ \} \neq \{\varnothing\}$

Scanned with OKEN Scanner

Justificați schema

$\varnothing = \{\ \}$ $\{\varnothing\}$





Avem formula $\{\{\ \}\} = \{\varnothing\}$

25. Verificați formulele

$$\varnothing = \{\ \} = \{x \mid x \neq x\}$$

$$\varnothing = \{\ \} = \{x \mid x = 1 \text{ și } x = 2\}$$

$$\{1, 2\} = \{x \mid x = 1 \text{ sau } x = 2\}$$

$$\{9\} = \{x \mid x = 9\}$$

Scanned with OKEN Scanner

2

Părţi

1 — PĂRŢILE UNEI MULŢIMI

Conform vorbirii curente vom spune că mulţimea L a elevelor din clasă care poartă ochelari este *o parte* (din mulţimea C a elevelor) din clasă.

Arătăm acest lucru notînd

$$L \subset C$$

De asemenea, mulţimea R a rumegătoarelor este o parte din mulţimea M a mamiferelor, ceea ce se notează

$$R \subset M$$

În general, numim *parte a unei mulţimi E* orice mulţime P de elemente ale lui E. Se arată că P este o parte a lui E prin formula $P \subset E$

Deoarece E este o mulţime de elemente ale lui E, avem formula $E \subset E$

Deoarece $\varnothing$ este o mulţime vidă de elemente ale lui E, avem formula

$$\varnothing \subset E$$

Putem găsi părţile unei mulţimi considerînd elementele acestei mulţimi care satisfac o proprietate suplimentară.

Astfel, în mulţimea C a elevelor clasei noastre, putem distinge partea L formată din elevele clasei noastre care poartă ochelari.

Acest lucru îl vom nota pe scurt prin formula

$$L = \{x \in C \mid x \text{ poartă ochelari}\}$$

care se citeşte:

«L este egal cu mulţimea elementelor x care fac parte din C, x fiind elevele care poartă ochelari».

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea,

$$T = \{x \in C \mid x \text{ poartă un șorț}\}$$

este partea din C formată din elevele care poartă un șorț.

Deoarece L și T sînt părți ale lui C, scriem:

$$T \subset C,\ L \subset C$$

De asemenea, mulțimea elevelor din clasa noastră care sînt mai înalte de 2 m este o parte a lui C.

Deci avem

$$\varnothing = \{x \in C \mid x \text{ este mai înaltă de 2 m}\} \subset C$$

De asemenea,

$$C = \{x \in C \mid x \text{ este mai înaltă de 1 m}\} \subset C$$

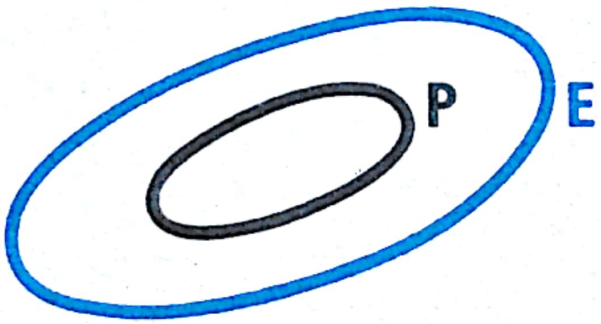
Regăsim astfel formulele

$$C \subset C \text{ și } \varnothing \subset C.$$

Vom spune de asemenea că A este o parte din B, spunînd că A este inclus în B. Semnul $\subset$ este semnul incluziunii.

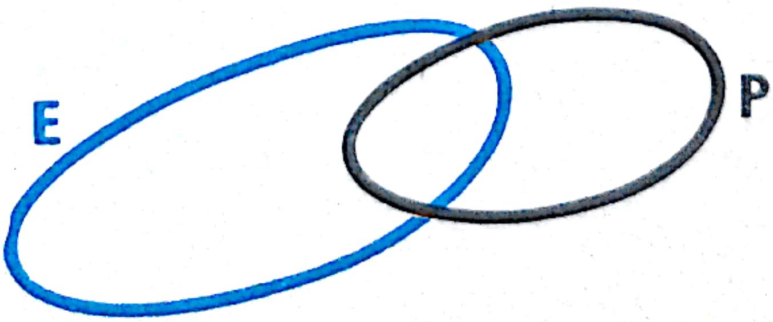
În loc să scriem $A \subset B$, mai putem scrie în mod echivalent $B \supset A$, ceea ce se citește « **B conține pe A** ».

Dacă P este o parte din mulțimea E, putem reprezenta această situație prin următoarea schemă



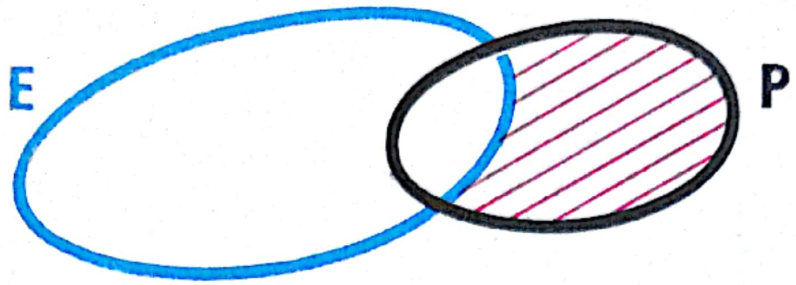
P ⊂ E

Schema generală



Scanned with OKEN Scanner

nu este incompatibilă cu P ⊂ E. Dacă știm că P este o parte din E, există o zonă vidă. Este cazul s-o haşurăm.



$P \subset E$

EXERCIȚII

1. Stabiliți următoarele formule

$$div\ 18 \subset div\ 36 \subset div\ 108 \subset \omega$$

$$\omega \supset 2\ \omega \supset 6\ \omega \supset 60\ \omega \supset \{o\}$$

$$\{a, b, c\} = \{a, a, c, b\} \supset \{b, c\} \supset \{b\} = \{b, b\}$$

2. Dacă V înseamnă mulțimea păsărilor, iar P mulțimea găinilor, avem $P \subset V$

3. Scrieți formulele de incluziune referitoare la următoarele mulțimi:

Mulțimea P a locuitorilor Parisului.
Mulțimea E a locuitorilor Europei.
Mulțimea F a locuitorilor Franței.
Mulțimea T a locuitorilor Pământului.
Mulțimea V a oamenilor.

Pe tine, cititorule, te notăm cu *t*. Care sînt mulțimile de mai sus din care face parte *t*?

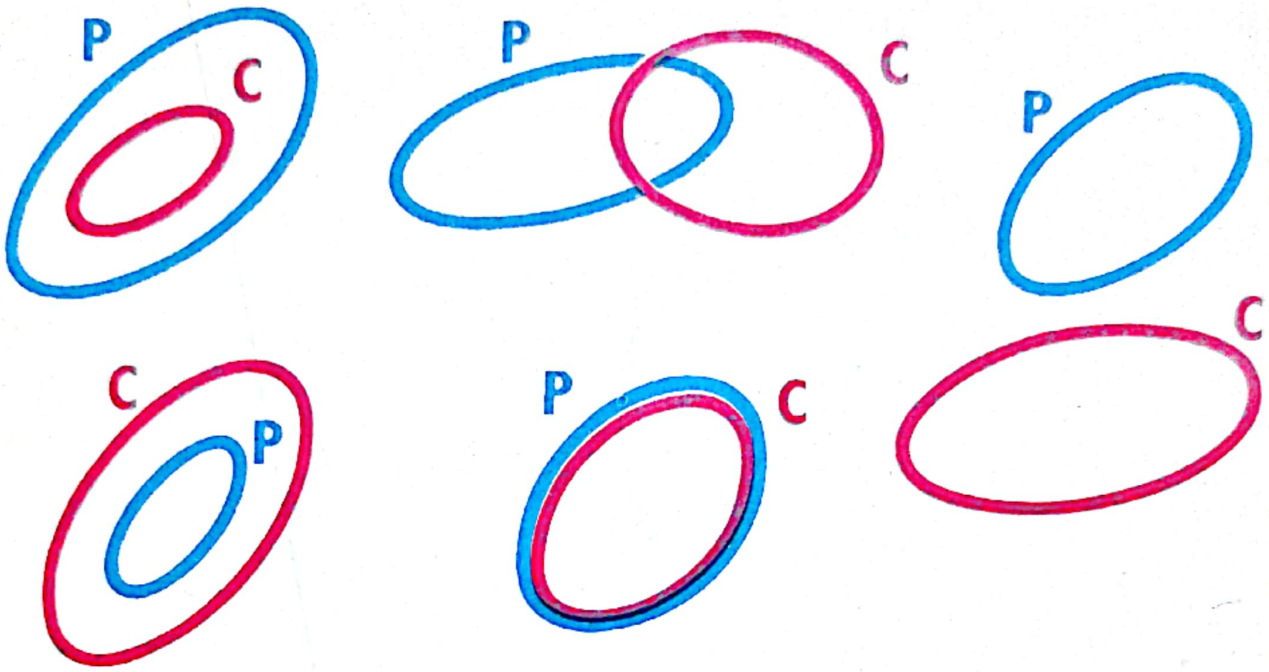
4. Scrieți formulele de incluziune referitoare la următoarele mulțimi:

Mulțimea Q a patrulaterelor	(din planul tablei).
Mulțimea T a trapezelor	(din planul tablei).
Mulțimea C a patratelor	(din planul tablei).
Mulțimea P a paralelogramelor	(din planul tablei).
Mulțimea R a dreptunghiurilor	(din planul tablei).
Mulțimea L a romburilor	(din planul tablei).

Faceți o schemă.

Scanned with OKEN Scanner

5. Fie C mulţimea elevelor din clasa noastră şi P mulţimea elevelor din clasa noastră care cîntăresc mai mult de 100 kg. Care dintre diagramele de mai jos pot folosi pentru reprezentarea lui C şi P?
Haşuraţi zonele vide în fiecare caz.



6. Acelaşi exerciţiu ca cel precedent, dar notînd cu P mulţimea elevelor din clasa noastră care cîntăresc mai mult de 10 kg.

7. Aceeaşi problemă atunci cînd P reprezintă mulţimea elevelor a căror greutate este cuprinsă între 25 şi 35 kg.

2 — PROPRIETĂŢILE INCLUZIUNII

Dacă fiecare din literele A, B, C reprezintă o mulţime, avem formulele

$A \subset A$ (**reflexivitatea** *incluziunii*)

Dacă $A \subset B$ şi $B \subset C$, **atunci** $A \subset C$ (**tranzitivitatea** *incluziunii*)

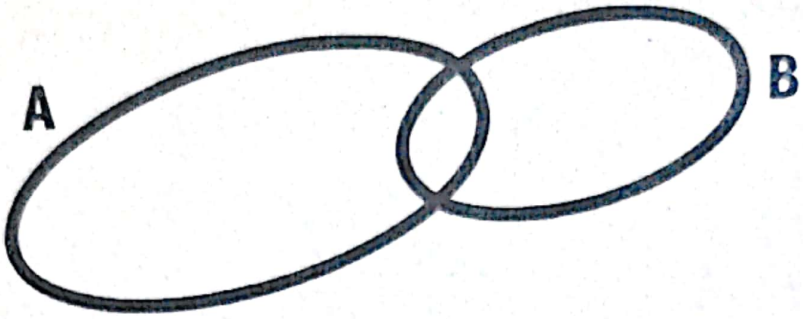
Dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$, **atunci** $A = B$ (**antisimetria** *incluziunii*).

EXERCIŢII

1. Orice parte din mulţimea elevelor clasei noastre este o parte din mulţimea elevelor şcolii.
Arătaţi prin formule că această propoziţie rezultă din tranzitivitatea incluziunii.

Scanned with OKEN Scanner

2. Dacă A şi B indică fiecare o mulţime, ştim că acestea pot fi reprezentate prin schema



Vi se semnalează că $A \subset B$. Cum poate fi arătat acest lucru pe desen (prin haşuri)?

Ce zone vom haşura dacă $B \subset A$?

Ce zone vom haşura dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$?

Ce zone vom haşura dacă $A = B$?

Concluzia?

3 — TOTALITATEA PĂRŢILOR UNEI MULŢIMI

Fie a, b, c, d obiecte distincte:

$$a \neq b, \quad a \neq c, \quad a \neq d, \quad b \neq c, \quad b \neq d, \quad c \neq d$$

Să considerăm mulţimea E formată din aceste obiecte.

Deci

$$E = \{a, b, c, d\}$$

Putem enumera toate părţile lui E procedînd precum urmează:

Se ştie că $\varnothing$ este o parte a lui E $\{\ \}$

a intră în joc $\{a\}$

b intră în joc $\{b\}, \{a, b\}$

c intră în joc $\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

d . . . $\{d\}, \{a, d\}, \{b\ d\}, \{a, b, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\ \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$

Ştim că fiecare din aceste părţi ale lui E este un obiect şi putem considera mulţimea formată din aceste obiecte.

Notăm cu $\mathcal{P}E$ *mulţimea părţilor lui* E.

$$\mathcal{P}E = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, E\}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru orice mulțime X, vom nota cu $\mathcal{P}X$ mulțimea părților lui X.
Deci $\mathcal{P}X = \{P \mid P \subset X\}$
ceea ce, să ne reamintim, se citește

$\mathcal{P}X$ este mulțimea elementelor P, astfel încît $P \subset X$.

. . . adică mulțimea părților lui X.

Orice parte dintr-o mulțime este un obiect și $\mathcal{P}E$ înseamnă mulțimea părților lui E.

EXERCIȚII

1. Fie E o mulțime.

   Ce înseamnă $A \subset E$?
   Ce înseamnă $A \in \mathcal{P}E$?
   Pentru orice mulțime A, formulele $A \subset E$ și $A \in \mathcal{P}E$ înseamnă același lucru, ceea ce exprimăm pe scurt astfel:
   Pentru orice mulțime A: $A \subset E \iff A \in \mathcal{P}E$
   Semnul $\iff$ se citește «dacă și numai dacă»

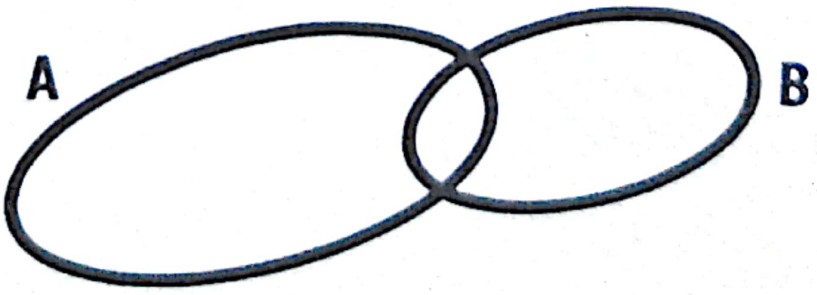
2. Definiți sintetic (adică enumerînd elementele) mulțimile:

   $\mathcal{P}\{a, b\}$, $\mathcal{P}\{a, b, c\}$, $\mathcal{P}\{a\}$, $\mathcal{P}\varnothing$

3. Dacă A și B sînt mulțimi,

   atunci sau A este o parte din B, ceea ce se notează $A \subset B$,
   sau A nu este o parte din B, ceea ce se notează $A \not\subset B$.
   Formula $A \not\subset B$ nu presupune neapărat $B \subset A$.
   Dacă $b \neq c$ Atunci $\{a, b\} \not\subset \{a, c\} \not\subset \{a, b\}$

4. Mulțimile A și B sînt reprezentate prin schema generală.



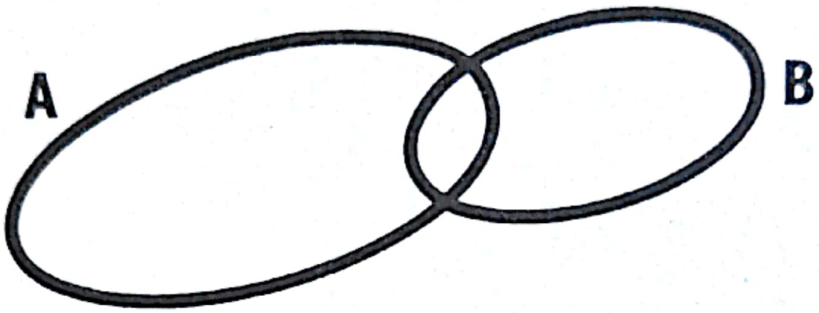
   De aici rezultă că $A \not\subset B \not\subset A$:
   Notați acest lucru pe schemă, desenînd pe ea exact două puncte.

Scanned with OKEN Scanner

5. Fie E o mulțime, iar a, b, c, d obiecte.
Avem deci echivalențele

$$(a \in E \text{ și } b \in E) \iff \{a, b\} \subset E$$
$$(a \in E \text{ și } b \in E \text{ și } c \in E \text{ și } d \in E) \iff \{a, b, c, d\} \subset E$$
$$a \in E \iff \{a\} \subset E$$

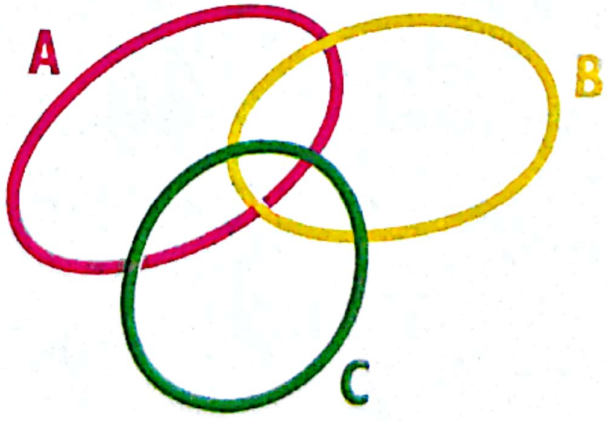
6. Reproduceți în șase exemplare schema generală:



Însemnați pe ea, prin haşuri sau marcînd unele puncte, următoarele informații

schema 1: $A \subset B$
schema 2: $A \subset B$ și $A \neq B$
schema 3: $A \not\subset B$
schema 4: $A \subset B$ și $B \not\subset A$
schema 5: $A = B$
schema 6: $A \not\subset B$ și $B \not\subset A$.

7. Mulțimile A, B, C sînt reprezentate prin schema



Ce zone puteți haşura știind că A este mulțimea vacilor, B mulțimea rumegătoarelor, iar C mulțimea mamiferelor? Propuneți o schemă mai izbitoare.

Scanned with OKEN Scanner

8. Aceeași problemă pentru situația: A este mulțimea păsărilor, B este mulțimea struților, iar C mulțimea păsărilor colibri.

9. Aceeași problemă pentru

$A = \textit{div}\ 6$
$B = \textit{div}\ 35$
$C = \textit{div}\ 143$

10. Aceeași problemă pentru

A = mulțimea literelor din cuvîntul «*mare*»
B = mulțimea literelor din cuvîntul «*greu*»
C = mulțimea literelor din cuvîntul «*mic*»

11. Aceeași problemă pentru

$A = \{2, 3, 7, 13, 97\}$
$B = \{3, 7, 13, 19\}$
$C = \{2, 19, 31\}$

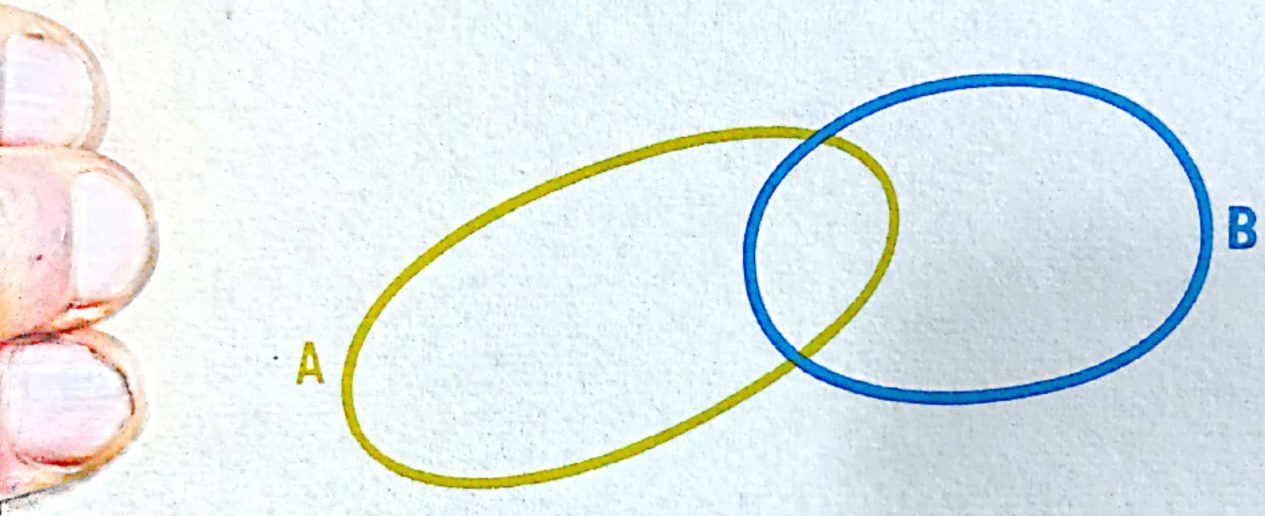
Scanned with OKEN Scanner

3

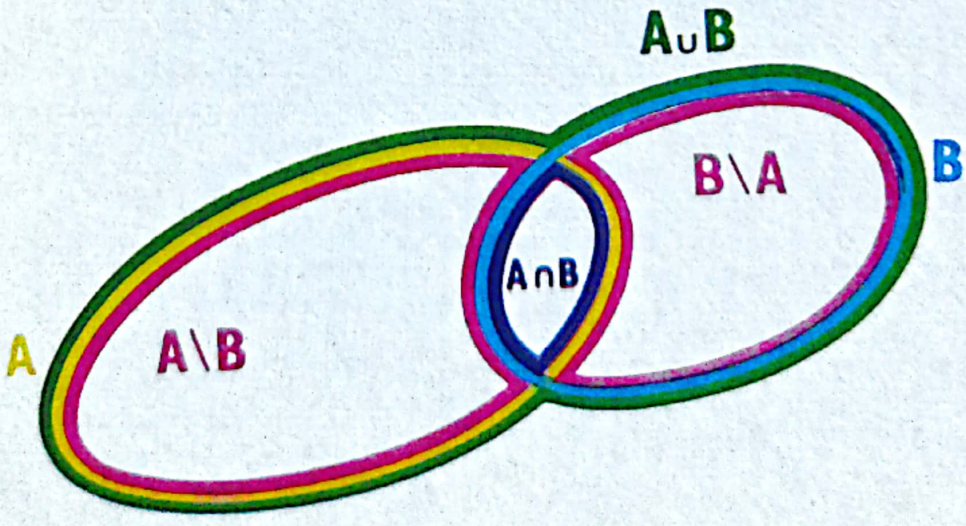
Intersecţie – Reuniune – Diferenţă

$\cap$ $\cup$ $\setminus$

Considerăm două mulțimi A și B. Știm că ele pot fi reprezentate prin schema



Această schemă scoate în evidență mulțimi noi.



Scanned with OKEN Scanner

DEFINIŢII

INTERSECŢIA $A \cap B$ este *mulţimea obiectelor care sînt totodată elemente ale lui A şi ale lui B.*

REUNIUNEA $A \cup B$ este *mulţimea obiectelor care sînt elemente a cel puţin uneia din mulţimile A, B.*

DIFERENŢA $A \setminus B$ este *mulţimea obiectelor care sînt elemente ale lui A şi nu ale lui B.*

Termenul $A \cap B$ se citeşte « A intersectat cu B ».
Termenul $A \cup B$ se citeşte « A reunit cu B ».
Termenul $A \setminus B$ se citeşte « A fără B ».

Deci avem:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ şi nu } x \in B\}$$

Folosirea conjuncţiei *şi*, în prima formulă, este absolut conformă cu uzul curent.

Folosirea lui *sau* în a doua formulă, este mai precisă decît în vorbirea curentă.

Formula « $x \in A$ **sau** $x \in B$ » înseamnă, **aici,** că *cel puţin una* din formulele $x \in A$, $x \in B$ *este adevărată* (deci se poate ca ambele formule să fie adevărate !).

Avem de asemenea formula

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$$

EXEMPLU — Dacă A este mulţimea lalelelor din acest magazin, iar B mulţimea florilor galbene din acest magazin,

$A \cap B$ este mulţimea lalelelor galbene (din acest magazin).

$A \cup B$ este mulţimea florilor din acest magazin care satisfac cel puţin una din cele două condiţii: să fie o lalea sau să fie galbenă.

$A \setminus B$ este mulţimea lalelelor (din magazin) care nu sînt galbene.

$B \setminus A$ este mulţimea florilor galbene (din magazin) care nu sînt lalele.

Dacă nu există lalele galbene în magazin

$$A \cap B = \varnothing$$

Spunem atunci că mulţimile A şi B sînt **disjuncte.**

S-ar putea ca toate lalelele din magazin să fie galbene. Această situaţie se exprimă imediat în două moduri diferite, însă echivalente:

$$A \subset B \iff A \setminus B = \varnothing$$

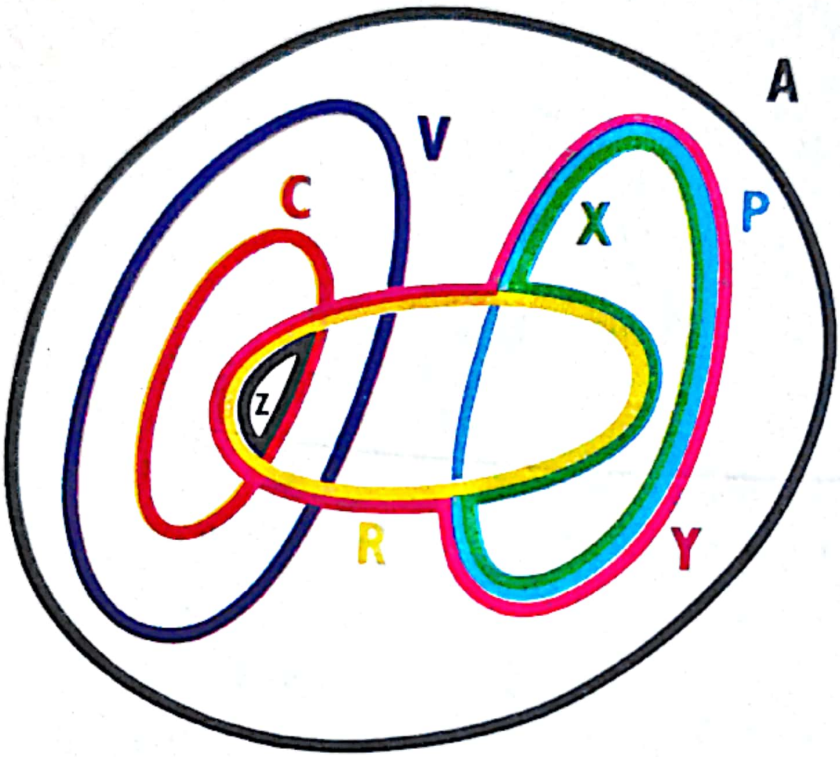
Vom vedea mai departe alte formule care descriu această situaţie.

Cum aţi exprima că toate florile galbene din magazin sînt lalele?

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

1. Se cere să se reprezinte pe o schemă mulțimea A a mașinilor înscrise în Belgia, mulțimea V a mașinilor Volkswagen înscrise în Belgia, mulțimea P a mașinilor Peugeot înscrise în Belgia, mulțimea R a mașinilor roșii înscrise în Belgia și mulțimea C a autocarelor Volkswagen înscrise în Belgia.



Se cere să se arate o mașină Volkswagen roșie înscrisă în Belgia, un autocar Volkswagen negru înscris în Belgia, o mașină Citroën albastră înscrisă în Belgia, o mașină Peugeot crem înscrisă în Belgia, un autocar Fiat roșu înscris în Belgia, mașina personală a lui John Glenn, o floare, volanul unei mașini Volkswagen albastră, înscrisă în Belgia.

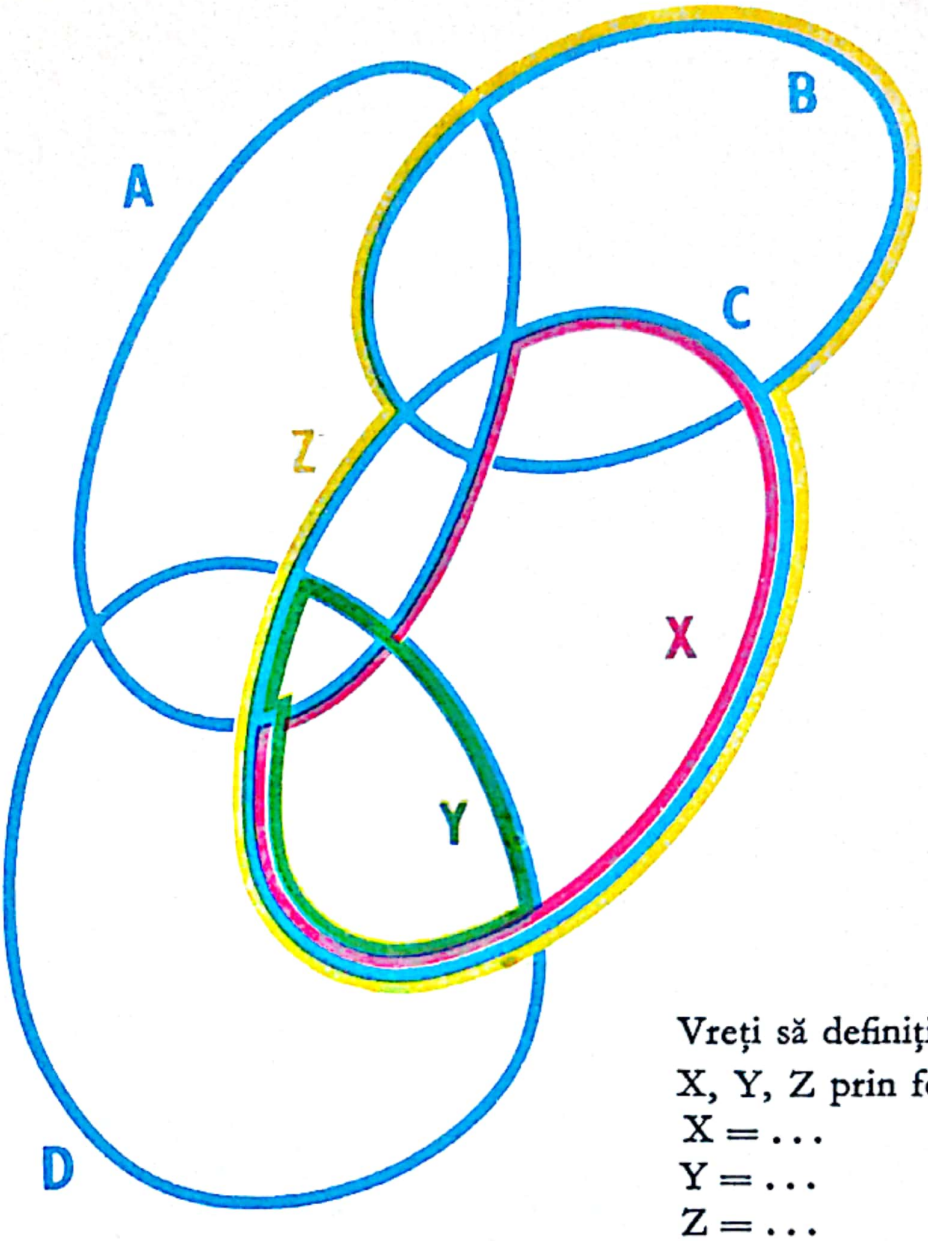
Prin ce termen veți nota mulțimea autocarelor Volkswagen înscrise în Belgia și care nu sînt de culoare roșie? Desenați pe figură o diagramă a acestei mulțimi.

Aceeași problemă pentru mulțimea mașinilor Peugeot roșii înscrise în Belgia, precum și pentru mulțimea tuturor automobilelor înscrise în Belgia care au cel puțin una din următoarele două calități: să fie o mașină Volkswagen sau să fie de culoare roșie.

Se cere să se caracterizeze fiecare din mulțimile X, Y, Z (sînt reprezentate pe schema precedentă) și să se dea definiția lor printr-o formulă

$$X = P \setminus R; \qquad Y = \qquad ; \qquad Z =$$

2. Priviți următorul desen



Vreți să definiți pe X, Y, Z prin formulele

$X = \ldots$

$Y = \ldots$

$Z = \ldots$

în al căror al doilea membru să figureze numai simboluri A, B, C, D, $\cap$, $\cup$, $\setminus$ și paranteze?

3. Avem formulele $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Dar, în general, nu avem

$A \setminus B = B \setminus A$

Indicați mulțimi A și B pentru care $A \setminus B \neq B \setminus A$

Este adevărat că

dacă $A \setminus B = B \setminus A$, **atunci** $A \setminus B = \varnothing = B \setminus A$

4. $\{-1000, -999, 0, 1, 2, 3\} \cap \{0, 1, 2\} = ?$

Scanned with OKEN Scanner

5. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$C = \{2, 5, 7, 9, 10\}$
$D = \{2, 6, 8, 10\}$
Calculați $A \cap A$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$, $D \cap A$, $C \cap A$, $B \cap A$
$(A \cap B) \cap C$, $B \cap (C \cap D)$, $A \cap (B \cap C)$

6. Fie A o mulțime. Calculați
$A \cap A$
$(A \cap A) \cap [A \cap (A \cap A)]$
$A \cap \varnothing$
$\varnothing \cap A$
$\varnothing \cap (A \cap \varnothing)$
$\varnothing \cap \varnothing$

7. Dați exemple de mulțimi incluse în mulțimea elevelor clasei voastre.

8. Aceeași problemă pentru mulțimea
$\{1, 2, -5, 100, 200, 999\}$

9. Calculați termenii de mai jos în care A indică o mulțime oarecare: $A \cup A$, $A \cap A$, $A \setminus A$, $\varnothing \cup A$, $\varnothing \cap A$, $\varnothing \setminus A$, $A \cup \varnothing$, $A \cap \varnothing$, $A \setminus \varnothing$, $\varnothing \cup \varnothing$, $\varnothing \cap \varnothing$, $\varnothing \setminus \varnothing$.

10. Calculați

div 72 $\setminus$ *div* 52 =	*div* 512 $\cup$ *div* 729 =
div 1000 $\cap$ *div* 625 =	
$3\omega \setminus 2\omega$ =	$2\omega \cup 4\omega$ =
$5\omega \cap 7\omega = \ldots \omega$	$17\omega \cap$ *div* 17 =

11 Scrieți formulele de incluziune privitoare la următoarele mulțimi:

Mulțimea Q a patrulaterelor (din planul tablei);
Mulțimea T a trapezelor (din planul tablei);
Mulțimea C a pătratelor (din planul tablei);
Mulțimea P a paralelogramelor (din planul tablei);
Mulțimea R a dreptunghiurilor (din planul tablei);
Mulțimea L a romburilor (din planul tablei).

Calculați $L \cap R$, $Q \cap P$, $C \cup R$, $L \setminus Q$.

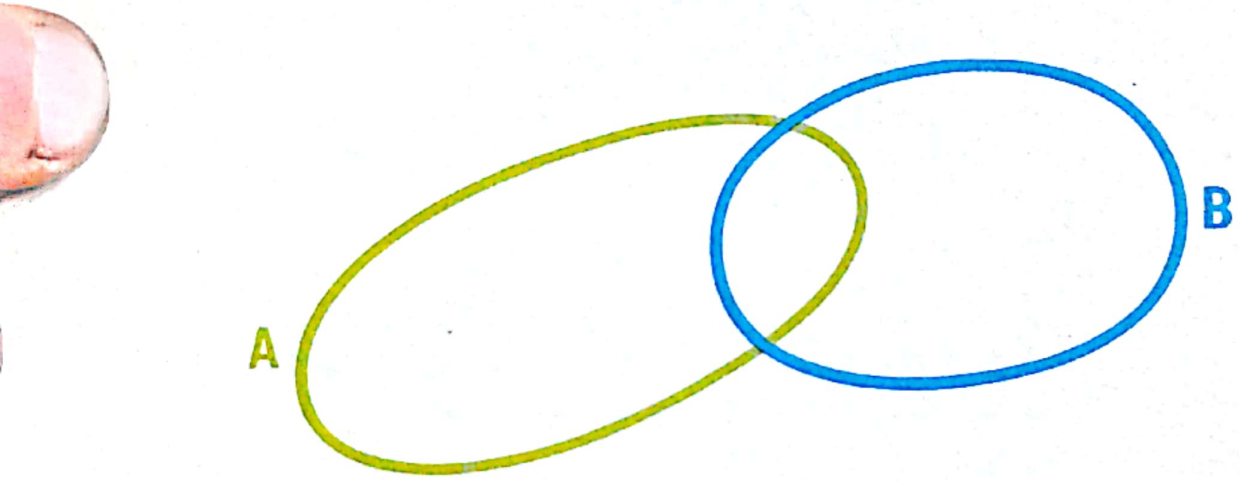
Trasați o schemă a rezultatelor.

Scanned with OKEN Scanner

12. Fie T mulţimea triunghiurilor din plan, E mulţimea triunghiurilor echilaterale, I mulţimea triunghiurilor isoscele, R mulţimea triunghiurilor dreptunghice, B mulţimea triunghiurilor cu unghiuri obtuze.
Scrieţi formulele de incluziune referitoare la aceste mulţimi.
Calculaţi $E \cap R$, $E \cap B$, $R \cap B$, $T \cap I$, $T \cup I$, $I \setminus T$.
Descrieţi elementele lui $I \cap B$, $T \setminus I$.

13. Cu ajutorul unui desen arătaţi că
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$
$$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$$

14. Ştim că mulţimile A şi B pot fi reprezentate totdeauna prin următoarea schemă



O persoană care poartă o pălărie neagră vă spune că $A \setminus B = A$.
Cu ajutorul unor haşuri negre, notaţi această informaţie pe schemă.
O persoană care poartă o pălărie roşie vă spune că $A \cap B = \varnothing$.
Cu ajutorul unor haşuri roşii, notaţi această informaţie pe schemă.
De aci trageţi concluzia că aceste persoane au spus acelaşi lucru prin cuvinte diferite.

Indicaţiile lor sînt echivalente.

Vom nota acest lucru
$$A \setminus B = A \iff A \cap B = \varnothing$$

15. Stabiliţi formula
$$A \setminus B = A \iff A \cap B = \varnothing \iff B \setminus A = B$$

Scanned with OKEN Scanner

16. Prin procedeul descris la exercițiul 14 stabiliți formulele

$$A \subset B \iff A \cap B = A$$
$$A \subset B \iff A \cup B = B$$
$$A \subset B \iff A \setminus B = \varnothing$$

În sfîrșit,

$$A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff A \setminus B = \varnothing \iff B \supset A.$$

17. Prin procedeul de la exercițiul 14, stabiliți formula

$$A \setminus B = B \setminus A \iff A = B$$

18. Dacă A, B, C sînt mulțimi, avem totdeauna formula

$$(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$$

Vi se semnalează că mulțimile K și L sînt astfel încît

$$(K \cup L) \setminus L = K$$

Ce vă indică această informație? (Utilizați rezultatul obținut la exercițiul 14).

19. Am notat mai sus

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ sau } x \in B \}$$

Cînd părinții voștri vă fac promisiunea: « La ziua ta onomastică vei primi un ceas sau un aparat de fotografiat », utilizează ei conjuncția *sau* în același sens ca în matematică?

Dați două exemple de utilizare a conjuncției *sau* în sens diferit de singurul sens admis în matematică.

20. Pe același desen trasați diagrame pentru următoarele exemple:

H : mulțimea ființelor omenești
R : mulțimea americanilor
F : mulțimea francezilor
A : mulțimea actorilor de cinema
C : mulțimea cîntăreților

Plasați în acest desen pe:

Victor Hugo, acest morcov, Racine, John Ford, acest clește de rufe, această pisică, Șahul, Iulius Caesar, Brigitte Bardot, urechea stîngă a acestui elev, Picasso, Vico Toriani, tabla din clasa ta, Carol cel Mare, Kennedy, Titov.

Pe același desen trasați diagramele

$$(A \cap C) \setminus (Y \cup F), \quad (A \cap Y) \setminus C$$

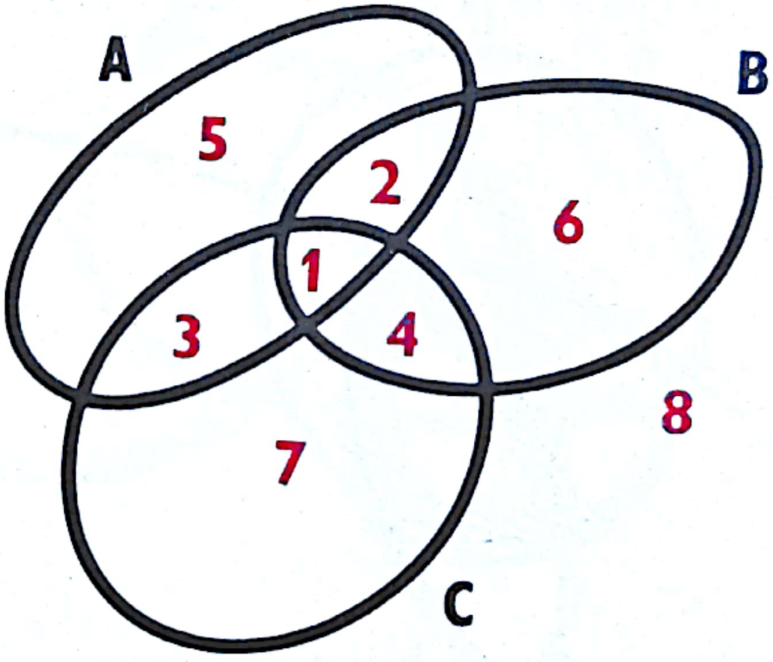
Scanned with OKEN Scanner

4

Algebra mulţimilor

1 — DIAGRAMA « FRUNZĂ DE TRIFOI »

Gîndiţi-vă la trei mulţimi A, B, C. Fără să-mi fi spus nimic despre aceste mulţimi, eu ştiu că le voi putea reprezenta prin următoarea diagramă în formă de frunză de trifoi



Într-adevăr, eu ştiu că pentru orice obiect *x*, există 8 răspunsuri posibile la tripla întrebare « *x* aparţine de A, *x* aparţine de B, *x* aparţine de C »?

1 da, da, da
2 da, da, nu
3 da, nu, da
4 nu, da, da
5 da, nu, nu
6 nu, da, nu
7 nu, nu, da
8 nu, nu, nu

Schema noastră ne permite să plasăm pe *x*, oricare ar fi răspunsul dat. Această diagramă este deci potrivită pentru toate cazurile.

Dacă îmi daţi informaţii suplimentare cu privire la mulţimile voastre, voi putea haşura anumite zone, folosind mereu aceeaşi schemă.

Dacă nu-mi spuneţi nimic despre A, B, C, mă voi putea folosi de schemă fără să mă preocup de eventuala existenţă a zonelor vide.

Scanned with OKEN Scanner

2 — ASOCIATIVITATEA INTERSECȚIEI ȘI REUNIUNII

Fie 3 mulțimi A, B, C. Reprezentați-le cu diagrama « frunză de trifoi ».
Desenați cu roșu o diagramă a elementelor $(A \cap B) \cap C$.
Desenați cu verde o diagramă a elementelor $A \cap (B \cap C)$.
Ce constatați?

Oricare ar fi mulțimile A, B, C, avem formula

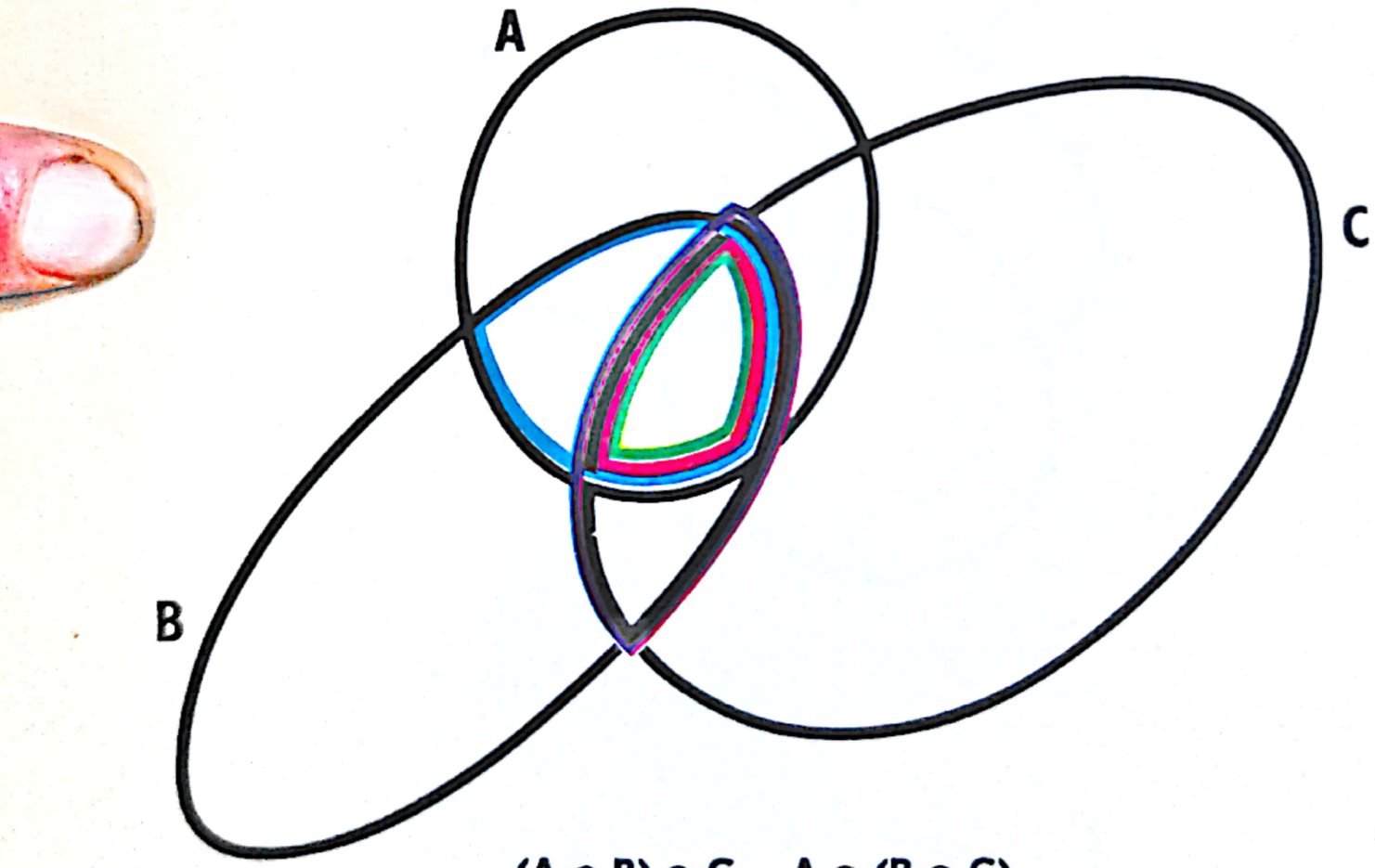
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Acest lucru îl mai exprimăm spunînd că **intersecția este asociativă.**

Formula $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ arată că cele două moduri de a situa parantezele la gruparea $A \cap B \cap C$ dau același rezultat.

Așadar, notăm

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$



$$\underline{(A \cap B)} \cap C = A \cap \underline{(B \cap C)}$$

Va trebui să dovediți, de asemenea, **asociativitatea reuniunii.** La fel ca mai sus vom nota, oricare ar fi mulțimile A, B, C:

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

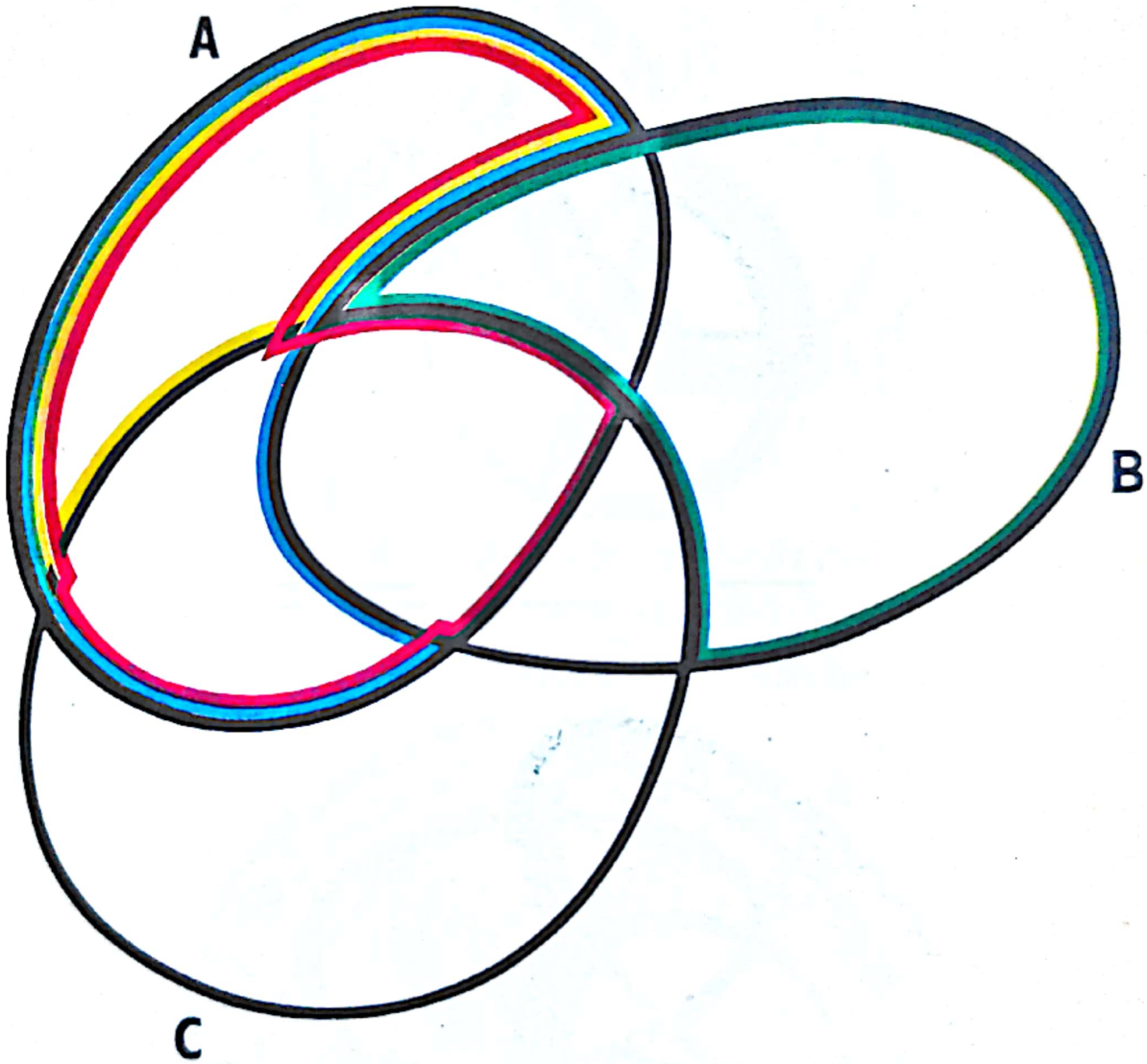
Scanned with OKEN Scanner

3 — NEASOCIATIVITATEA DIFERENȚEI

Am văzut că **legile** $\cap$ și $\cup$ sînt asociative.

Ne propunem să comparăm expresiile

$$(A \setminus B) \setminus C \text{ și } A \setminus (B \setminus C)$$



$(A \setminus B) \setminus C$ $\qquad$ $A \setminus (B \setminus C)$

Vedem că legea $\setminus$ **nu este asociativă.**

Vreți să stabiliți formula

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

Scanned with OKEN Scanner

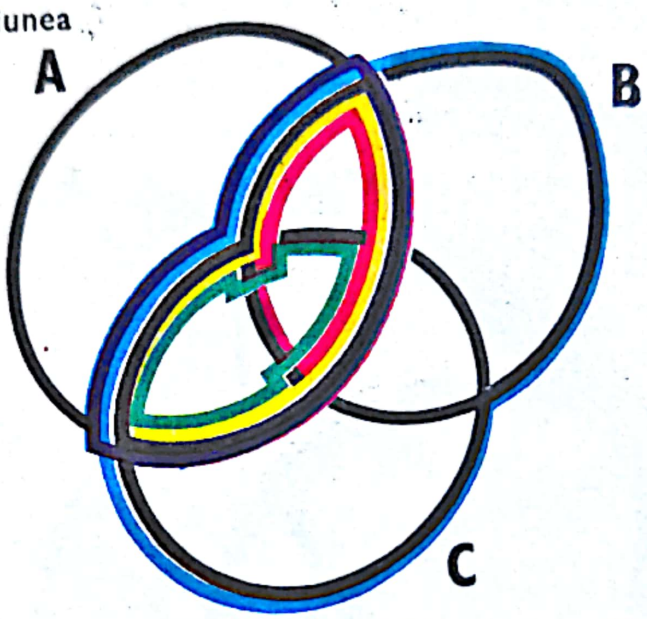
4 — DISTRIBUTIVITATEA

Schemele de mai jos arată că, **oricare ar fi mulțimile A, B, C,** avem formulele

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

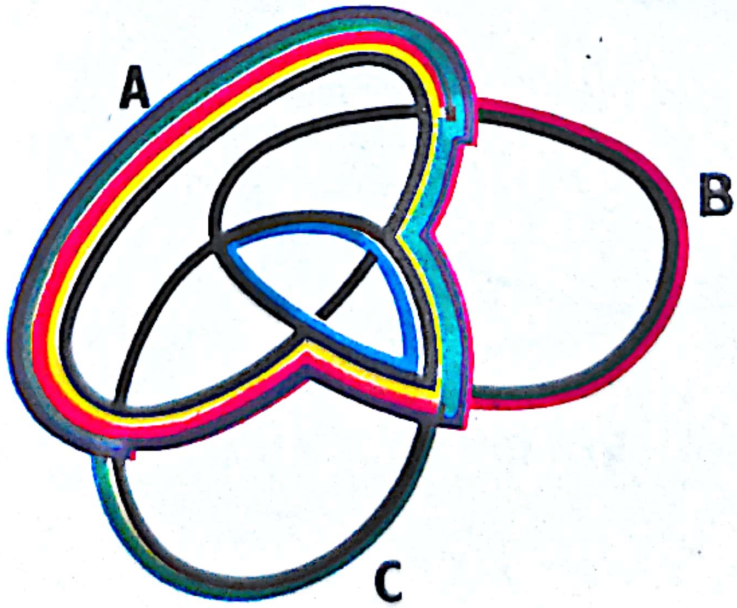
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Interpretăm prima din aceste formule spunînd că **intersecția este distributivă în raport cu reuniunea**.



$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

A doua formulă exprimă, deci, că **reuniunea este distributivă în raport cu intersecția.**



$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

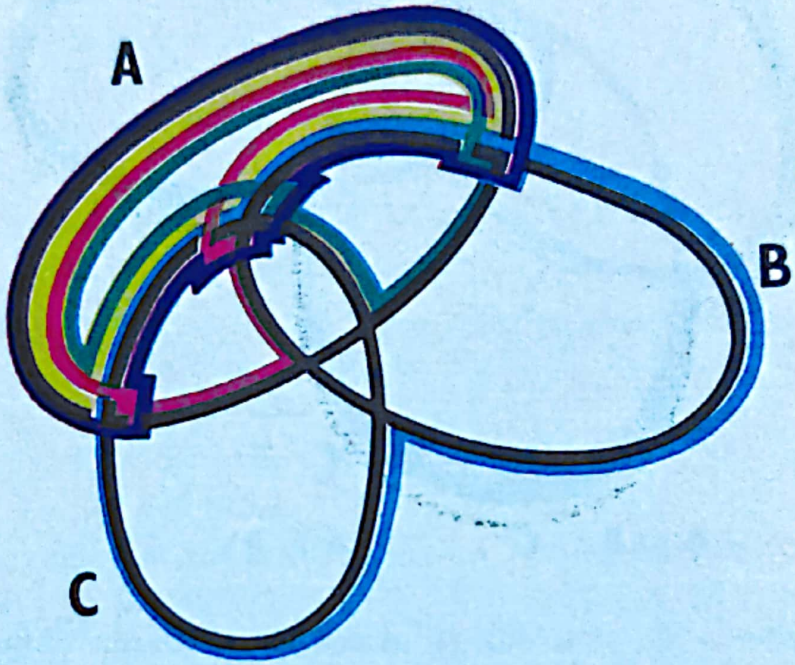
Scanned with OKEN Scanner

5 — ANTIDISTRIBUTIVITATEA

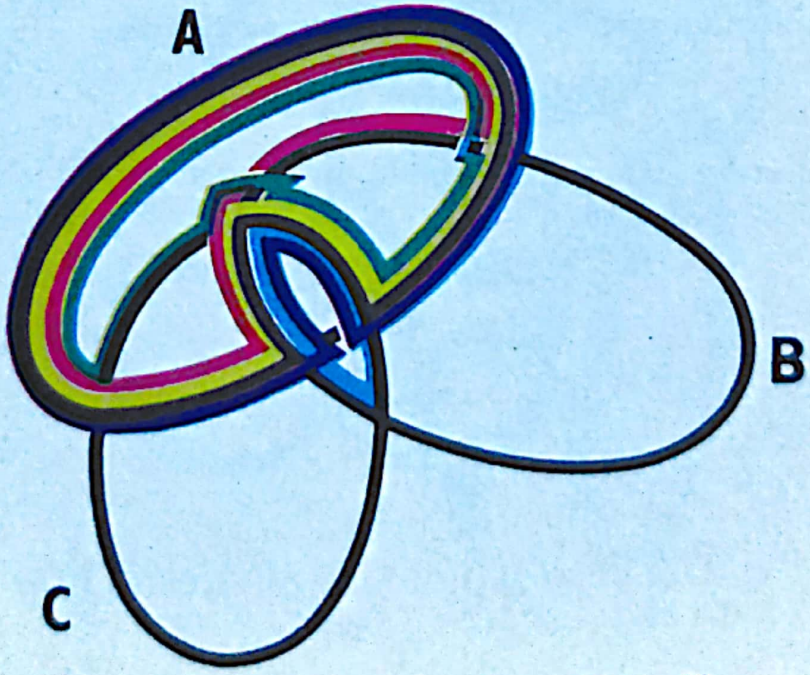
Oricare ar fi mulțimile A, B, C, avem formulele:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Interpretăm aceste formule spunînd că **diferența este antidistributivă la dreapta în raport cu reuniunea și cu intersecția.**



$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

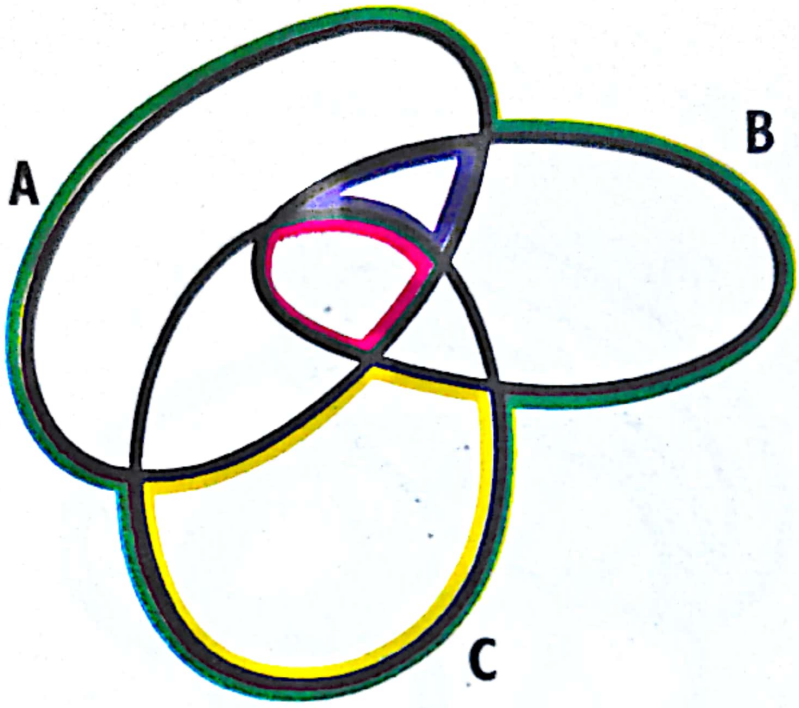


$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

1. Diagrama «frunză de trifoi» pune în evidență noi mulțimi.



$A \cap B \cap C$ $A \cup B \cup C$ $(A \cap B) \setminus C$ $C \setminus (A \cup B)$

Analizați schema de mai sus și justificați utilizarea culorilor.
Reprezentați prin formule analoge 4 alte mulțimi scoase în evidență prin această schemă.

2. Dacă două din mulțimile A, B, C sînt disjuncte, avem

$$A \cap B \cap C = \varnothing$$

3. Arătați că intersecția este distributivă în raport cu scăderea.
Cu alte cuvinte: oricare ar fi mulțimile A, B, C, avem formula

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

4. Fie: $A = \{0, 1, -1, 3, -3, 5, -5, 7, -7\}$
$B = \{0, 1, 3, -3, 5, 7, -7\}$
$C = \{0, 1, -3, -5, -7\}$

Calculați: $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C$, $(A \cup C) \cap (B \cup C)$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $(A \setminus B) \setminus C$, $A \cap B$, $B \cap A$, $A \cup \varnothing$, $\varnothing \cup A$, $A \cap \varnothing$, $\varnothing \cup A$, $\varnothing \cup C \cup \varnothing$, $C \cap \varnothing \cap \varnothing \cap C$, $A \cup A$, $A \cap A$, $B \setminus \varnothing$, $\varnothing \setminus B$

Scanned with OKEN Scanner

5. Oricare ar fi mulțimile A, B, C

$$A \cup B \cup C = C \cup B \cup A = B \cup C \cup A = A \cup C \cup B = B \cup A \cup C = C \cup A \cup B$$

Gruparea $A \cup B \cup C$ este mulțimea obiectelor care aparțin cel puțin uneia din mulțimile A, B, C.
Faceți observații analoge cu privire la intersecție.

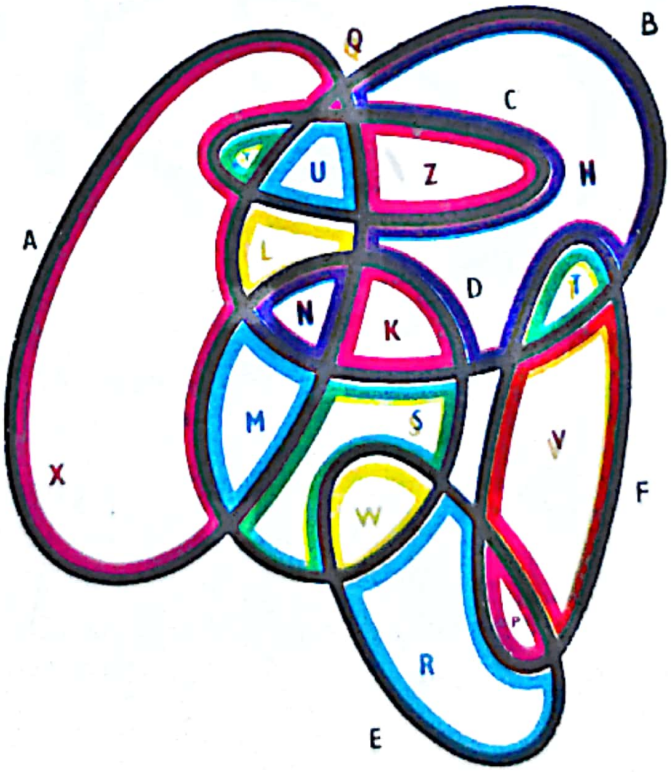
6. Oricare ar fi mulțimile A, B, C, avem următoarele formule:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$
$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$$
$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \setminus B = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

7. Se dau mulțimile A, B, C, D, E, F care sînt reprezentate pe schema de mai jos. Se cere să se definească mulțimile H, K, L, M, N, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z prin formule

$$H = B \setminus (A \cup C \cup D \cup F)$$
$$K = \ldots \qquad \text{etc.}$$

în al căror al doilea membru nu figurează alte semne afară de A, B, C, D, E, F, $\cap$, $\cup$, $\setminus$ și paranteze.



8. Dacă A, B, C sînt mulțimi, avem

$$A \subset B \subset C \iff A \cup B = B \cap C$$

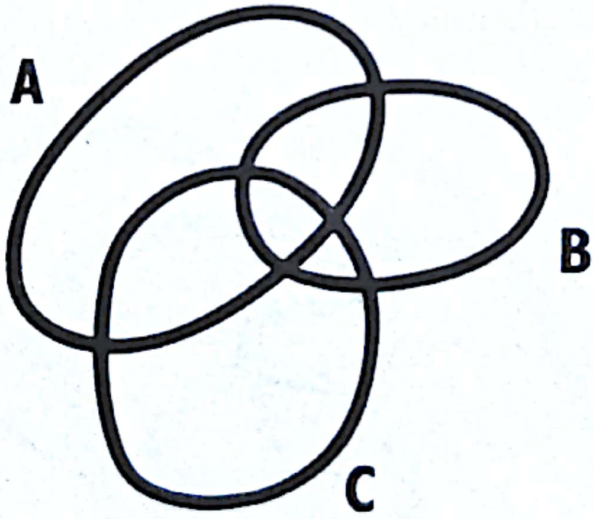
9. Dacă A, B, C sînt mulțimi, avem formulele

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \cap C &= (A \cap C) \setminus (B \cap C)\\ &= (A \cap C) \setminus B = (A \setminus B) \cap (C \setminus B)\\ A \cap (B \setminus C) &= (A \cap B) \setminus (A \cap C)\\ &= (A \setminus C) \cap B = (A \cap B) \setminus (B \cap C)\\ &= (A \cap B) \setminus C =\\ &= (A \setminus C) \cap (B \setminus C)\end{aligned}$$

10. Dacă A, B, C, D sînt mulțimi, avem formulele

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$$
$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$$
$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$$

11. Copiați în trei exemplare diagrama



a) Pe primul exemplar notați informația

$$A \cup B = C$$

b) Pe al doilea exemplar, informația

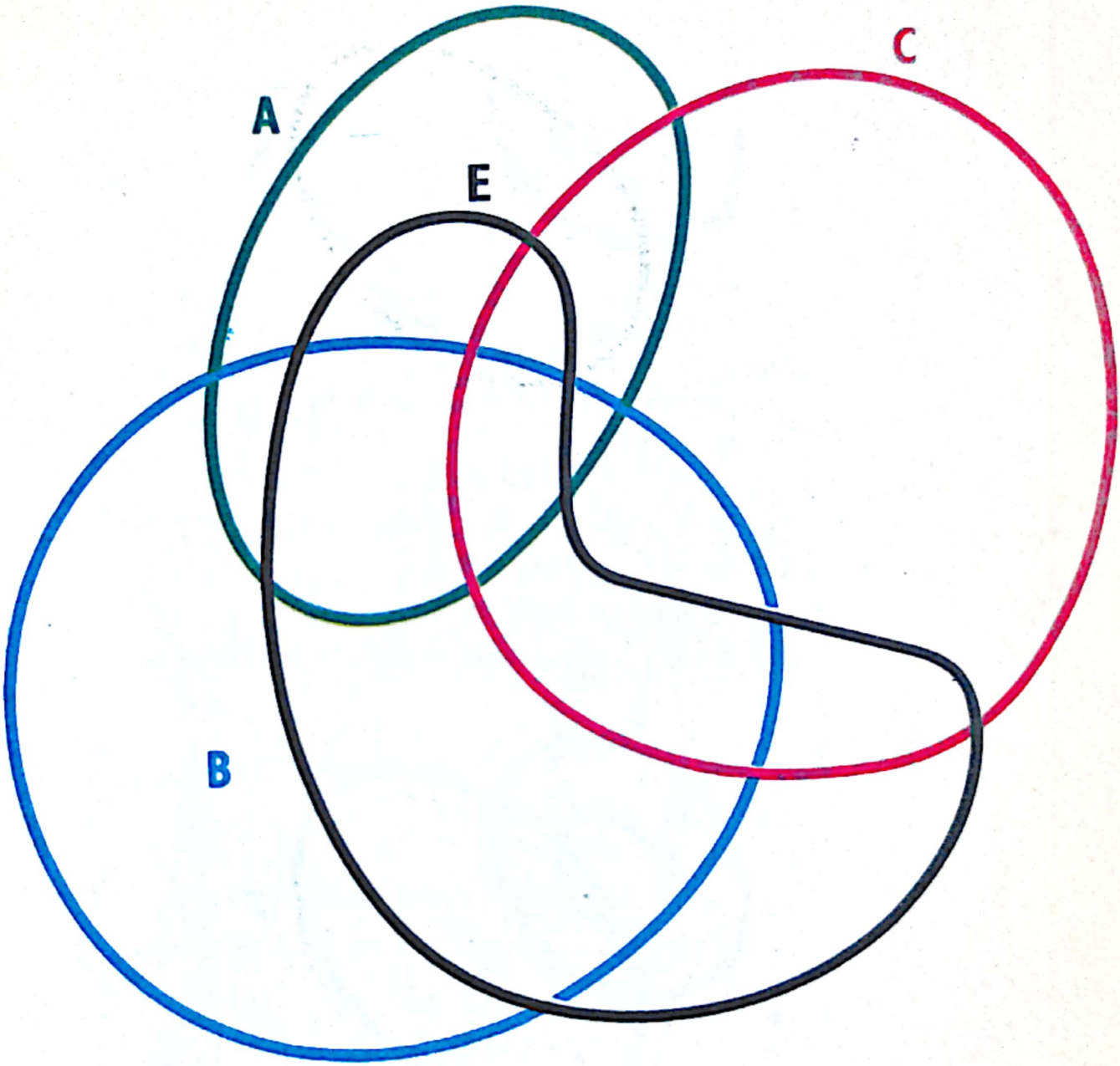
$$A \cap B = \varnothing$$

c) Pe al treilea exemplar, informația

$$A \neq \varnothing \neq B$$

Scanned with OKEN Scanner

12. Dacă vă gîndiți la 4 mulțimi A, B, C, E, eu le voi putea reprezenta, fără să-mi spuneți nimic, prin diagrama de mai jos



13. Copiați în 3 exemplare diagrama precedentă

a) Pe primul exemplar notați informația

$$E = A \cup B \cup C$$

b) Pe al doilea, notați informația: « mulțimile A, B, C sînt disjuncte 2 cîte 2», care reprezintă formula

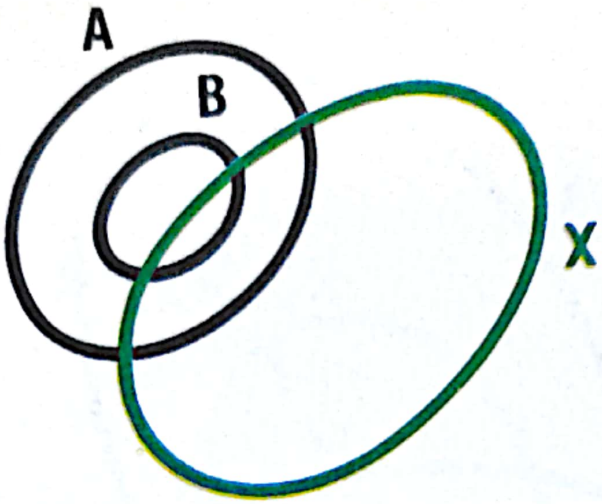
$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \varnothing$$

c) Pe al treilea, notați informația

$$A \neq \varnothing, B \neq \varnothing, C \neq \varnothing$$

Scanned with OKEN Scanner

14. Vi se dă o mulțime A, o parte B din A și o mulțime X oarecare:



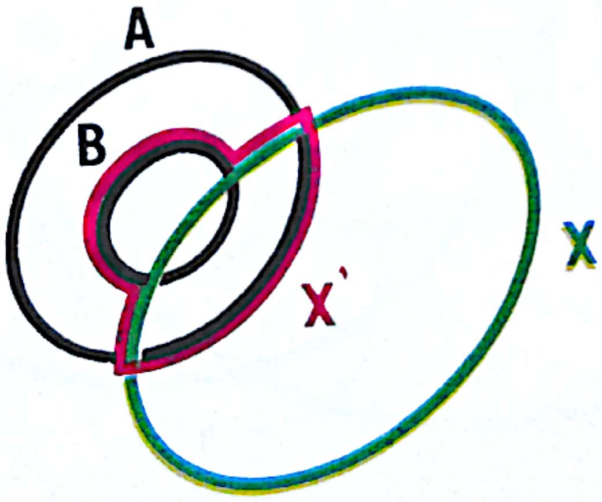
Se cere să se construiască, plecînd de la mulțimea X, o mulțime X' care să fie intercalată între A și B

$$A \supset X' \supset B$$

Acest lucru va fi făcut respectînd următoarele 2 prescripții:

1. să se ia din X cît mai puține elemente,
2. să se adauge la X cît mai puține elemente.

Se va trasa în roșu o diagramă pentru mulțimea X' astfel definită



Avem formula $X' = A \cap X \cup B$

În termenul $A \cap X \cup B$ s-au omis parantezele, deoarece

$$(A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$$

Stabiliți această formulă folosindu-vă de diagramă. Arătați apoi prin calcul că

$$A \supset B \Rightarrow (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$$

(în care semnul $\Rightarrow$ se citește «implică»).

15. Diferenţă simetrică

Numim diferenţă simetrică a mulţimilor A, B, mulţimea notată A Δ B, formată din obiectele care aparţin uneia şi numai uneia din mulţimile A, B.

Avem evident $A \Delta B = B \Delta A$

Diferenţa simetrică este comutativă.

Pentru orice element x avem eventualităţile

1.	$x \in A$	$x \in B$
2.	$x \in A$	$x \notin B$
3.	$x \notin A$	$x \in B$
4.	$x \notin A$	$x \notin B$

Arătaţi în fiecare caz dacă $x \in A \Delta B$ sau dacă $x \notin A \Delta B$.

Aţi obţinut rezultatul de mai jos?

1.	$x \in A$	$x \in B$	:	$x \notin A \Delta B$
2.	$x \in A$	$x \notin B$	:	$x \in A \Delta B$
3.	$x \notin A$	$x \in B$	:	$x \in A \Delta B$
4.	$x \notin A$	$x \notin B$	:	$x \notin A \Delta B$

Avem, deci, $x \in A \Delta B$ numai în eventualităţile

2.	$x \in A$	şi	$x \notin B$
3.	$x \notin A$	şi	$x \in B$

Avem $x \notin A \Delta B$, numai în eventualităţile

1.	$x \in A$	şi	$x \in B$
4.	$x \notin A$	şi	$x \notin B$

Vedeţi în ce eventualităţi avem $x \in (A \Delta B) \Delta C$.

Avem $x \in (A \Delta B) \Delta C$ în următoarele eventualităţi

I.	$x \in A \Delta B$	şi	$x \notin C$
II.	$x \notin A \Delta B$	şi	$x \in C$

Am văzut mai sus în ce eventualităţi avem formulele

$$x \in A \Delta B \quad \text{şi} \quad x \notin A \Delta B$$

Astfel, $x \in (A \Delta B) \Delta C$ în următoarele singure eventualităţi

I.	$x \in A \Delta B$				şi	$x \notin C$
	a)	$x \in A$	şi	$x \notin B$	şi	$x \notin C$
	b)	$x \notin A$	şi	$x \in B$	şi	$x \notin C$
II.	$x \notin A \Delta B$				şi	$x \in C$
	c)	$x \in A$	şi	$x \in B$	şi	$x \in C$
	d)	$x \notin A$	şi	$x \notin B$	şi	$x \in C$

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrșit, $x \in (A \Delta B) \Delta C$ numai în eventualitățile

a) $x \in A$ și $x \notin B$ și $x \notin C$
b) $x \notin A$ și $x \in B$ și $x \notin C$
c) $x \notin A$ și $x \notin B$ și $x \in C$
d) $x \in A$ și $x \in B$ și $x \in C$

Deci, putem spune că $(A \Delta B) \Delta C$ este mulțimea obiectelor x pentru care una din formulele $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$ sînt adevărate.

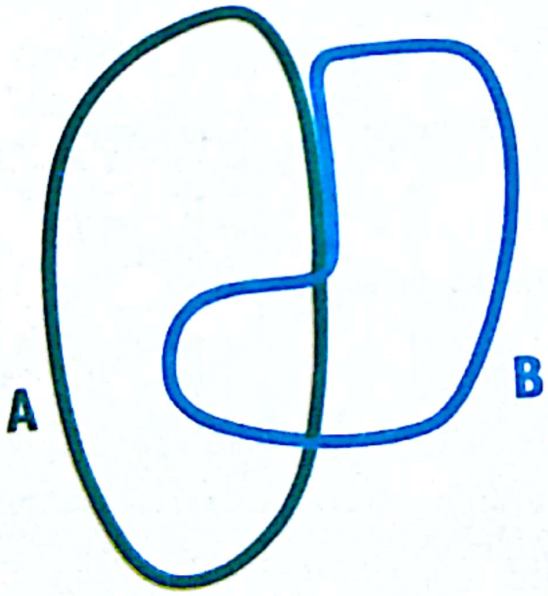
Dați o caracterizare analogă a expresiei $C \Delta (A \Delta B)$

Avem $C \Delta (A \Delta B) = (A \Delta B) \Delta C$

De unde deducem $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

Diferența simetrică Δ este asociativă.

16. Trasați o diagramă a diferenței simetrice a mulțimilor A și B reprezentate mai jos



17. Dacă A este o mulțime oarecare, avem formulele

$$A \Delta A = \varnothing \text{ și } A \Delta \varnothing = A$$

18. Dacă fiecare din literele A, B, C înseamnă o mulțime, avem

$$A \Delta B = C \iff A \Delta C = B \iff B \Delta C = A$$

19. Dacă fiecare din literele A, B înseamnă o mulțime, există o mulțime X și numai una singură ca

$$A \Delta X = B$$

(Răspuns: $X = A \Delta B$).

GEORG CANTOR
(1845—1918)

În decursul istoriei omenirii, omul s-a eliberat treptat de apăsarea grea a necunoașterii condițiilor fizice care-i limitau universul.

Străbunicii voștri au apucat epoca marilor exploratori.

Bunicii voștri au fost martorii perfecționării automobilului și începutului aviației.

Părinții voștri au fost contemporanii progresului realizat în radiofonie și televiziune.

Voi înșivă ați urmărit încercările primilor cosmonauți.

Progresele științei și tehnicii au permis omului să-și lărgească universul și să prelungească durata vieții sale.

Astăzi toate științele și întreaga tehnică utilizează la rîndul lor matematica și sînt legate de progresele ei.

Dacă vreți să participați în mod efectiv la transformările ce se petrec în știința și tehnica modernă, să întrezăriți realitățile lumii de mîine, trebuie să vă inițiați în știință și tehnică și deci în matematica de astăzi.

Va trebui să cunoașteți cît mai rapid posibil noțiunile fundamentale ale matematicii moderne, utilizată din ce în ce mai mult în toate științele.

Aceste noțiuni nu sînt obișnuite părinților sau străbunicilor voștri, care au învățat matematica altfel, deși cu ajutorul lor se regăsesc toate rezultatele fundamentale ale matematicii.

Marele matematician danez Georg Cantor a fost unul dintre primii care a subliniat importanța noțiunii de mulțime în matematică, iar nașterea și dezvoltarea teoriei mulțimilor este considerată, în general, că stă la baza matematicii moderne.

Georg Cantor a fost fiul unui negustor danez. El s-a născut în Rusia în anul 1845 și și-a petrecut aproape toată viața în universitățile germane de la Göttingen, Berlin și Halle.

Primele sale studii asupra teoriei mulțimilor datează din 1879.

A murit în 1918.

Scanned with OKEN Scanner

5

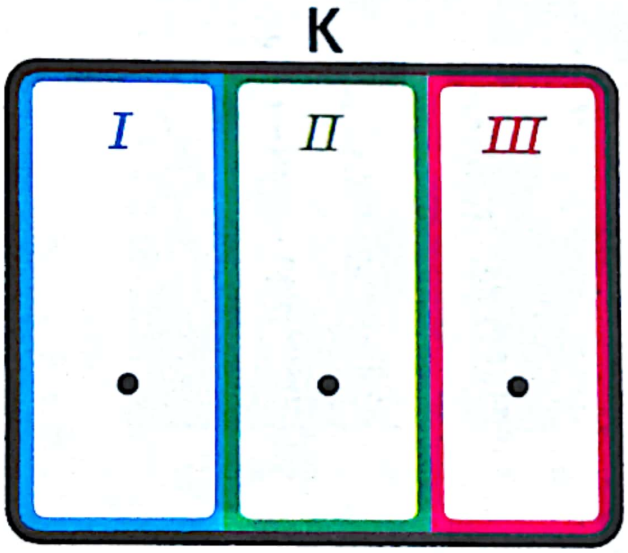
Diviziuni

Elevele clasei noastre sînt repartizate în trei rînduri.

Să notăm cu I mulțimea elevelor din primul rînd ; cu II mulțimea elevelor din rîndul al II-lea, cu III mulțimea elevelor din rîndul al III-lea și cu K mulțimea elevelor din clasa noastră.

Nici una din mulțimile I, II, III nu este vidă și fiecare elevă din clasa noastră aparține unei mulțimi și numai uneia singure din mulțimile I, II, III ; acest lucru îl exprimăm spunînd că **mulțimea mulțimilor {I, II, III} este o diviziune a lui K.**

Avem, deci, schema



Să descriem situația de mai sus prin formule.

Nici una din mulțimile I, II, III nu este vidă:

$$I \neq \varnothing,\ II \neq \varnothing,\ III \neq \varnothing \qquad (1)$$

Nici o elevă nu face parte din două din mulțimile I, II, III. Mai exprimăm acest lucru spunînd că mulțimile sînt disjuncte două cîte două:

$$I \cap II = I \cap III = II \cap III = \varnothing \qquad (2)$$

Oricare elevă din clasă aparține uneia din mulțimile I, II, III, adică

$$I \cup II \cup III = K \qquad (3)$$

Să recapitulăm:

$\{I, II, III\}$ este o **diviziune** a lui K $\Leftrightarrow$

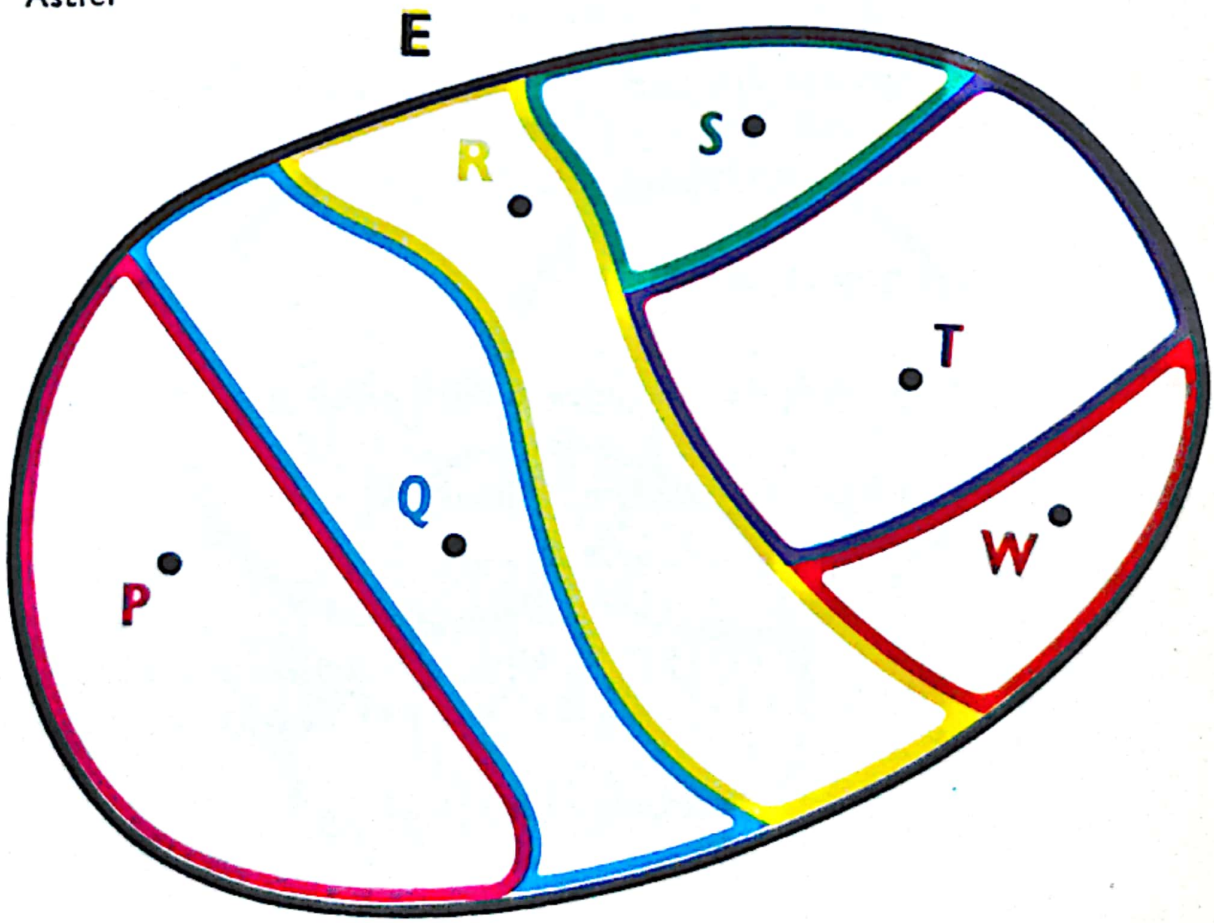
$$\begin{cases} I \neq \varnothing, II \neq \varnothing, III \neq \varnothing & (1) \\ I \cap II = I \cap III = II \cap III = \varnothing & (2) \\ K = I \cup II \cup III & (3) \end{cases}$$

DEFINIȚIE — *O mulțime $\mathcal{P}$ de părți nevide ale lui E este o diviziune a mulțimii E, dacă și numai dacă, orice element al lui E aparține unei mulțimi a lui $\mathcal{P}$ și numai uneia singure.*

Mulțimile care sînt elemente ale lui $\mathcal{P}$ sînt numite clasele diviziunii.
Putem enunța o definiție echivalentă:

DEFINIȚIE — *Numim diviziune a lui E orice mulțime $\mathcal{P}$ de părți nevide ale lui E, separate două cîte două și a căror reuniune este egală cu E.*

Astfel



$\{P, Q, R, S, T, W\}$ este o diviziune a lui E.

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

1. Fie P mulțimea locuitorilor Belgiei și A, B, C, D, E, F, G, H, I mulțimile locuitorilor fiecăreia din cele 9 provincii belgiene.

   {A, B, C, D, E, F, G, H, I} este o diviziune a lui P.

2. Dacă ω = mulțimea numerelor naturale = {0, 1, 2, . . . },
   P = mulțimea numerelor naturale pare = {0, 2, 4, . . . },
   I = mulțimea numerelor naturale impare = {1, 3, 5, . . . },
   atunci {P, I} este o diviziune a lui ω.

3. Fie R mulțimea elevilor din clasa lui Roger, fie L mulțimea elevilor cu ochelari din această clasă și V mulțimea celor fără ochelari.
   Sîntem informați că {L, V} este o diviziune a lui R.
   Ce concluzie să tragem din aceasta?

4. Fie M mulțimea elevelor din clasa Iolandei, fie A mulțimea elevelor din această clasă care poartă ciorapi și B mulțimea elevelor fără ciorapi.
   Iolanda, care poartă ciorapi, ne informează că {A, B} nu este o diviziune a lui M.
   Ce concluzie să tragem din aceasta?

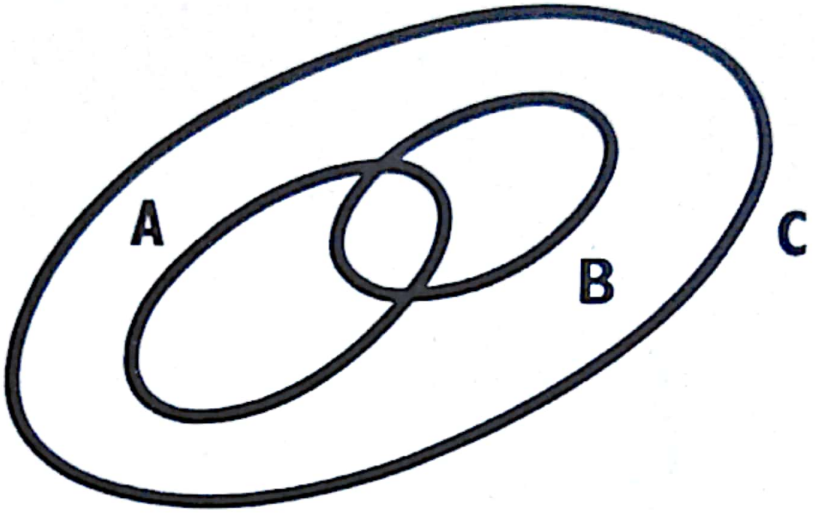
5. Să reamintim că 2 ω înseamnă mulțimea multiplilor lui 2, iar 3 ω mulțimea multiplilor lui 3.
   Mulțimea {2 ω, 3 ω} este o diviziune a lui ω?
   Justificați răspunsul.

6. Dacă {A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K} este o diviziune a mulțimii X, atunci {A, B ∪ C, D ∪ E ∪ F, G, H ∪ I ∪ J ∪ K} este o nouă diviziune a mulțimii X.
   Trasați o schemă punînd în evidență aceste două diviziuni.

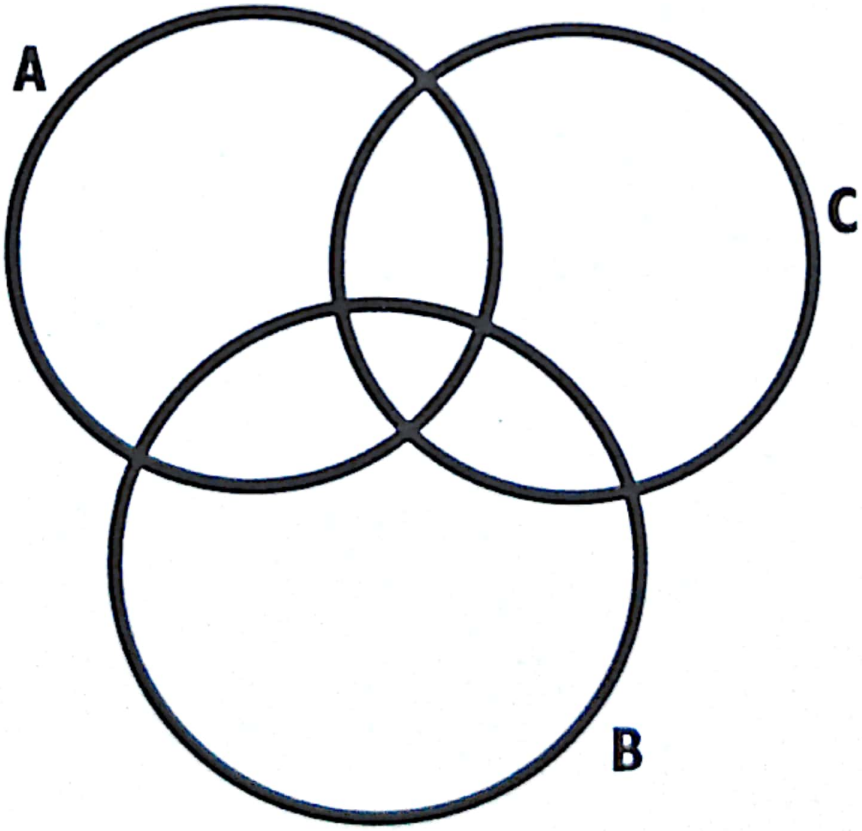
7. Se semnalează că {E} este o diviziune a lui E.
   Ce concluzie să tragem cu privire la E?

Scanned with OKEN Scanner

8. Notaţi pe schema de mai jos informaţia
{A, B} este o diviziune a lui C.

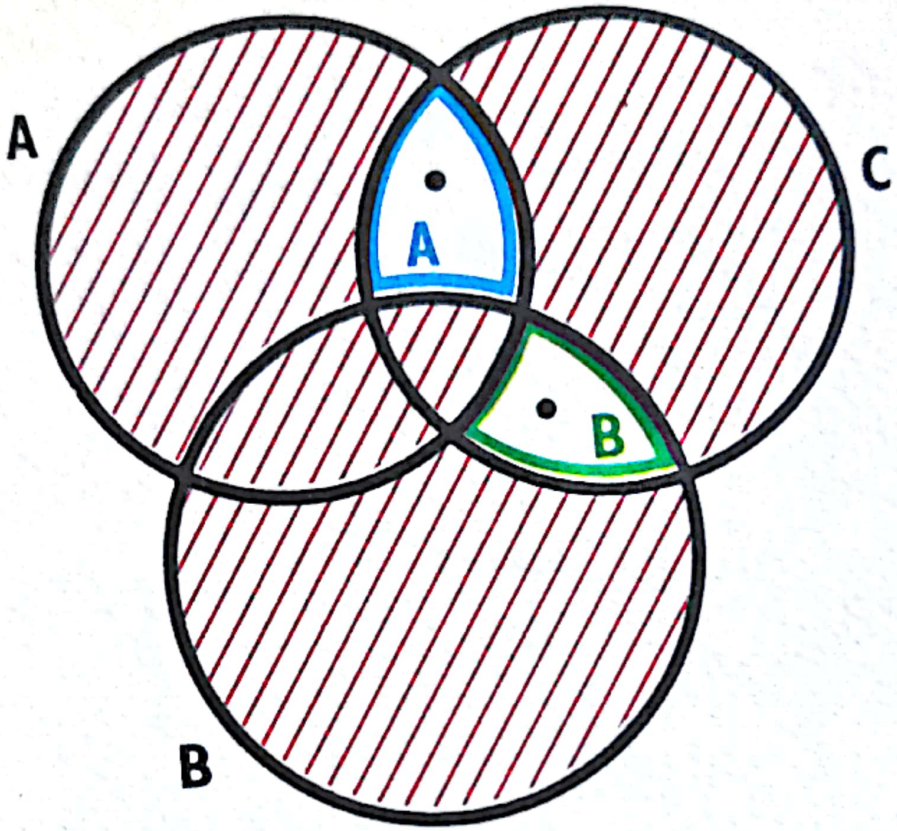


9. Notaţi informaţia
{A, B} este o diviziune a lui C pe schema de mai jos.



Scanned with OKEN Scanner

Soluție :



{A, B} este o diviziune a lui C.

10. Ce deducem cu privire la A, B, dacă ni se dă următoarea informație:
{A ∩ B, A \ B, B \ A} este o diviziune a mulțimii A ∪ B.
Aceeași întrebare pentru informațiile:
{A ∩ B, B \ A} este o diviziune a mulțimii A ∪ B;
(A \ B, B \ A} este o diviziune a mulțimii A ∪ B;
{A ∩ B} este o diviziune a mulțimii A ∪ B;
{A \ B} este o diviziune a mulțimii A ∪ B.

11. Să notăm cu P_n mulțimea numerelor naturale de n cifre (în numerația zecimală).

Deci
$$P_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$
$$P_2 = \{10, 11, 12, \ldots, 99\}$$
$$P_3 = \{100, 101, 102, \ldots, 999\}$$
$$P_4 = \{1000, 1001, 1002, \ldots, 9999\} \text{ etc.}$$

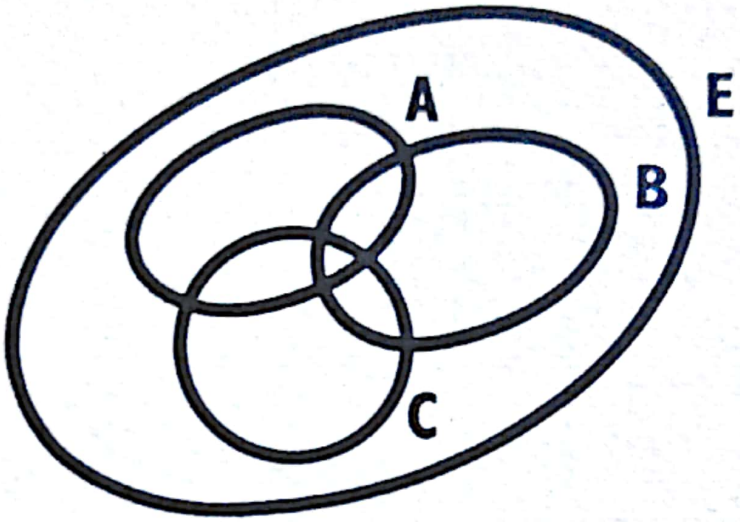
Arătați că $\{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$ este o diviziune a mulțimii lui ω.

Scanned with OKEN Scanner

12. Notați informația

{A, B, C} este o diviziune a lui E,

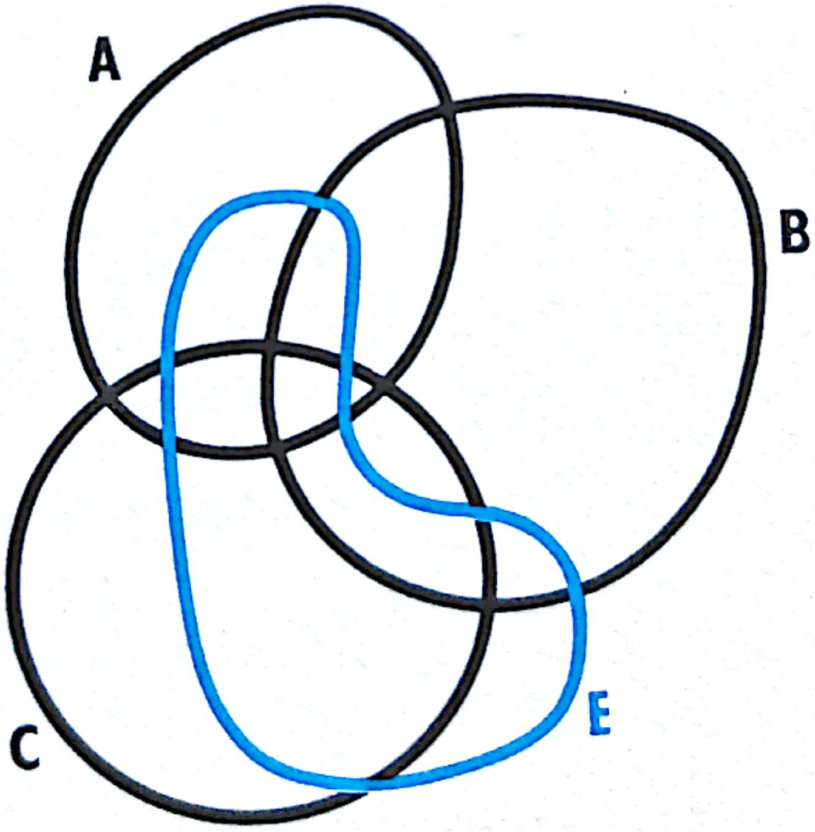
pe următoarea schemă



13. Notați informația

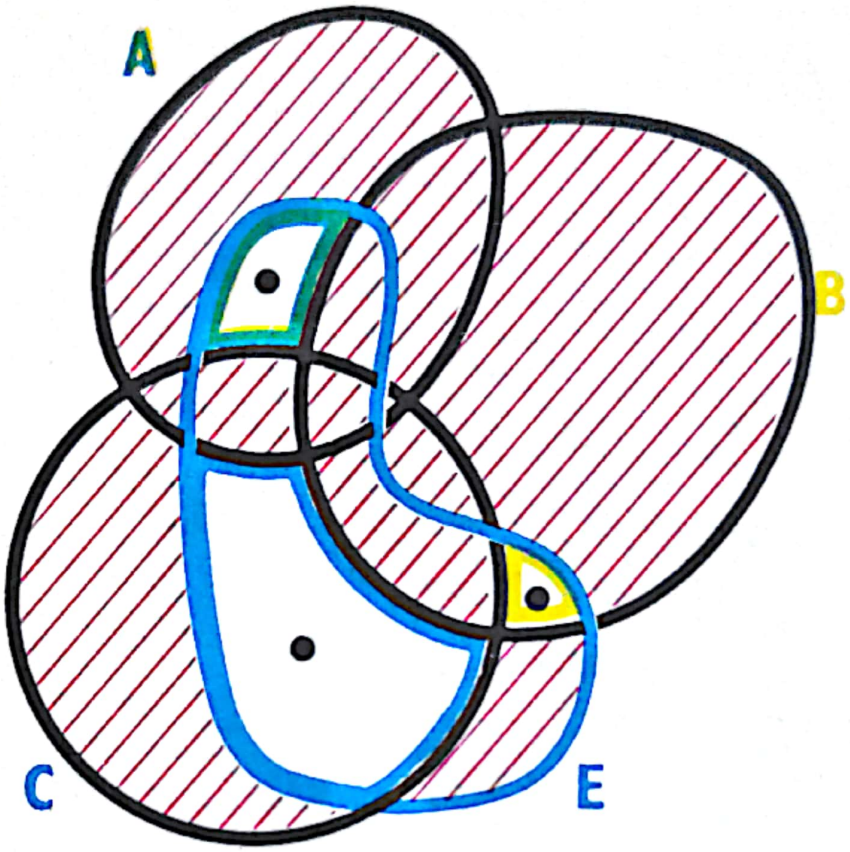
{A, B, C,} este o diviziune a lui E,

pe următoarea schemă



Scanned with OKEN Scanner

Soluţie:



14. **Dacă** $\{A, B, C, D\}$ este o diviziune a lui X,
$\{A_1, A_2\}$ o diviziune a lui A,
$\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ o diviziune a lui C,
şi $\{D_1, D_2, D_3\}$ o diviziune a lui D,
atunci $\{A_1, A_2, B, C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2, D_3,\}$ este o diviziune a lui X.
Desenaţi o schemă care să pună în evidenţă aceste 5 diviziuni.

15. **Dacă** $\{A, B, C, D, E\}$ este o diviziune a lui X şi dacă fiecare din intersecţiile. $A \cap Y$, $B \cap Y$, $C \cap Y$, $D \cap Y$, $E \cap Y$ este nevidă, **atunci** $\{A \cap Y, B \cap Y, C \cap Y, D \cap Y, E \cap Y\}$ este o diviziune a mulţimii $X \cap Y$.
Desenaţi o schemă care să pună în evidenţă această teoremă.

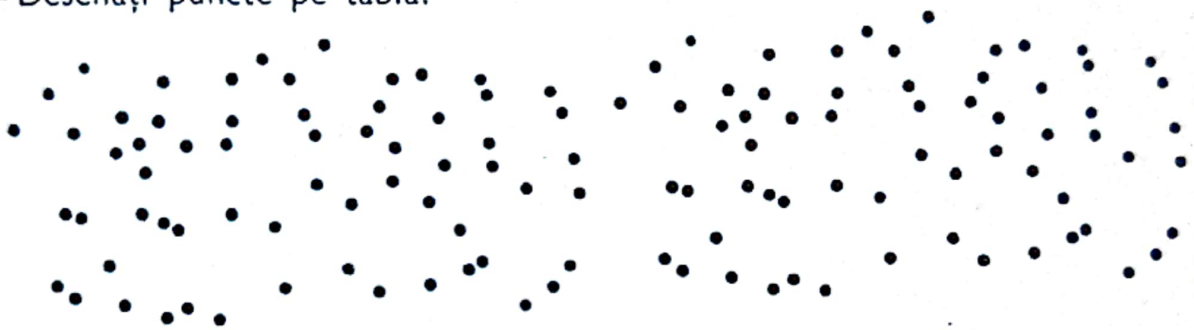
Scanned with OKEN Scanner

6

Primele elemente de geometrie

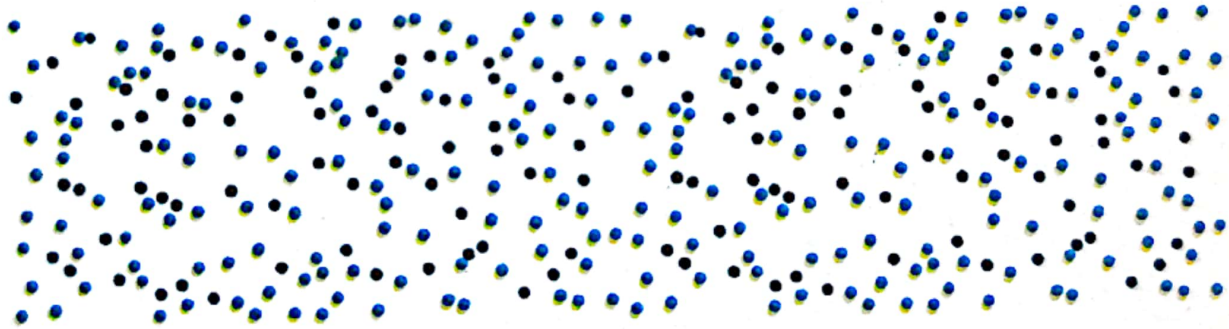
1 — MULȚIMI DE PUNCTE

— Desenați puncte pe tablă.



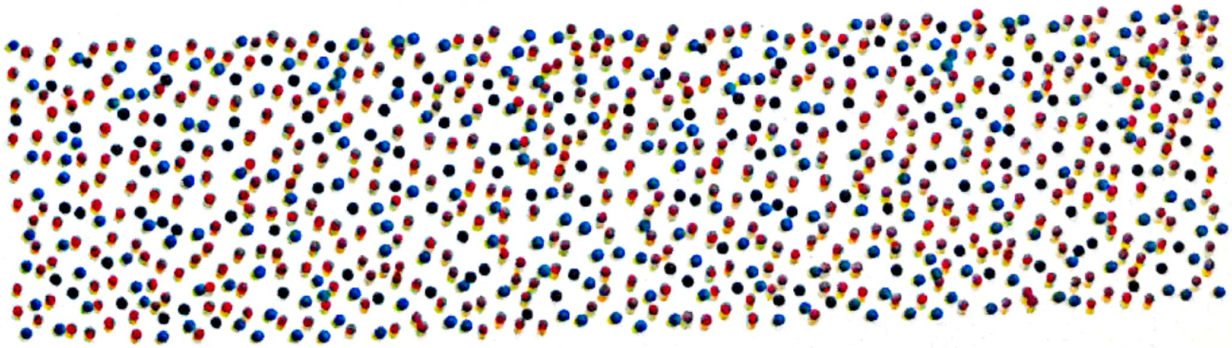
— Puteți să desenați mai multe?

— Desenez alte puncte cu verde.



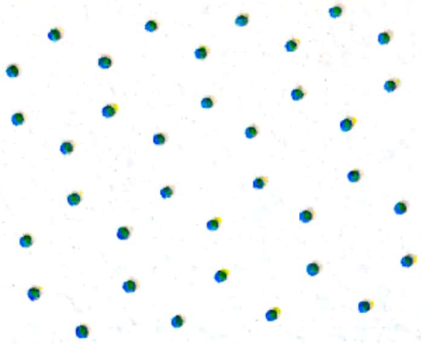
— Puteți desena și mai multe?

— Le voi desena cu portocaliu.

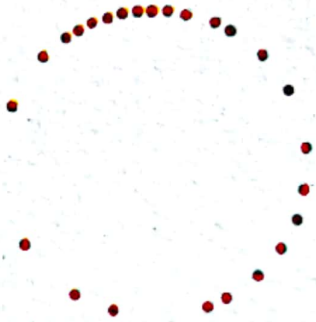


Scanned with OKEN Scanner

— Desenați pe tablă o mulțime de puncte frumos aranjate.



— Desenați o mulțime de puncte care să formeze un cerc.

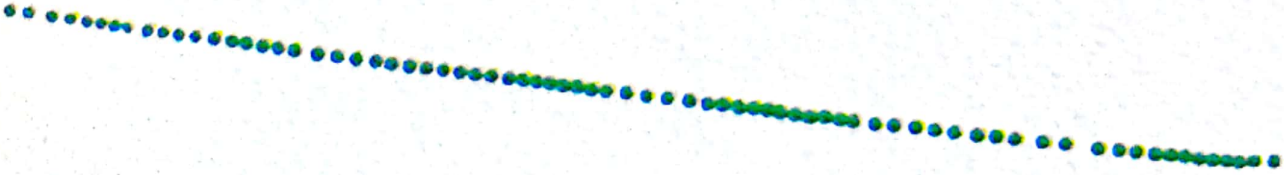


— Ați desenat toate punctele cercului?

— . . .

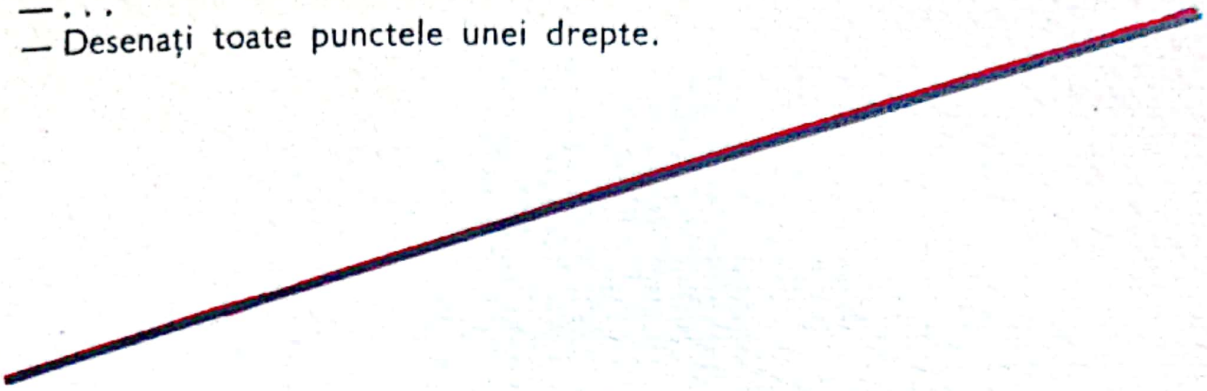
— Desenați puncte **aliniate** (sau în linie dreaptă).

— Desenați o mulțime de puncte aliniate, mai apropiate între ele.

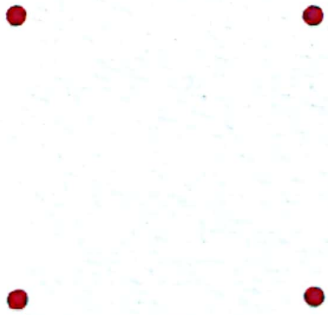


Scanned with OKEN Scanner

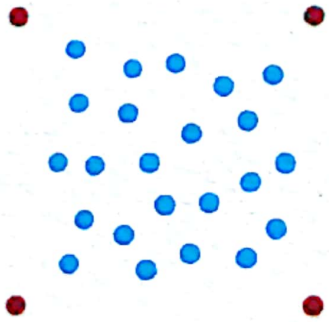
— Ați putea desena alte puncte ale acestei drepte?
— . . .
— Desenați toate punctele unei drepte.



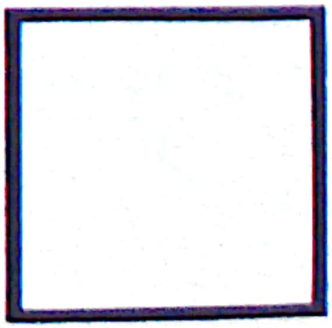
— Ați desenat toate punctele unei drepte?
— Dreapta este nelimitată în ambele sensuri, noi nu putem să desenăm decît o parte din ea.
— Desenați vîrfurile unui pătrat.



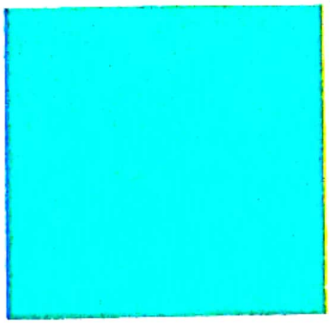
— Desenați puncte **interioare** ale acestui pătrat.



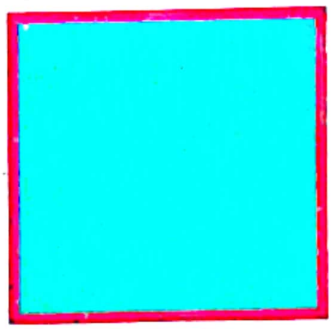
— Puteți desena alte puncte **interioare** ale acestui pătrat?
— . . .
— Desenați toate punctele care fac parte din **laturile** pătratului.



— Desenați mulțimea punctelor de pe **laturile** pătratului sau **interioare** acestui pătrat.

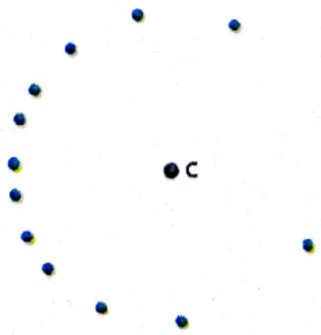


— Aș vrea să desenați, de data asta, mulțimea punctelor **interioare** pătratului. (Punctele de pe laturi *nu* aparțin deci acestei mulțimi).
— Cum să arătăm că punctele de pe laturi nu aparțin acestei mulțimi?
— Vom face o **convenție.** Pentru a arăta că punctele de pe laturi nu aparțin mulțimii, vom desena cu verde punctele interioare pătratului, iar cu roșu punctele de pe laturile pătratului.



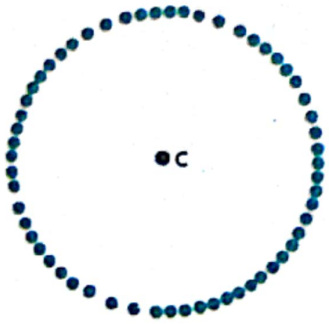
— Desenați un punct *c* și 3 puncte la 1,5 cm de *c*.

— Desenați 12 puncte situate la 1,5 cm de *c*.



Scanned with OKEN Scanner

— Desenați multe puncte situate la 1,5 cm de *c*.

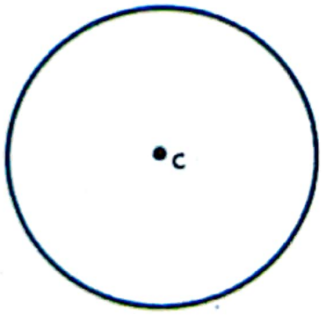


— Mai există și alte puncte situate la 1,5 cm de *c*?

— . . .

— Desenați mulțimea tuturor punctelor situate la 15 cm de *c*.

— Acesta este **cercul cu centrul *c* și cu raza de 1,5 cm.**



— Desenați un cerc *c* cu centrul *o* și cu raza de 3 cm.
Desenați 3 puncte situate la 2 cm de *o*.
Desenați un punct la 2,5 cm de *o*.
Un alt punct la 2,9 cm de *o*.
Este ușor de desenat?

— Aceste puncte se găsesc din ce în ce mai aproape de cercul *c*.

Mărimea petelor de cerneală sau de culoare prin care *reprezentăm* punctele, face desenul dificil.

Am fi putut reprezenta punctele prin pete mai fine.

— Acest lucru este adevărat.

Desenați, cu mai multă precizie, cu trăsături fine și pete fine pentru puncte, un cerc cu centrul *a* și cu raza de 7 cm.

Scanned with OKEN Scanner

Desenați un punct *b* situat la 6 cm de *a*.
Desenați între *b* și cerc un punct *d*, situat la 6,9 cm de *a*.
Desenați între *d* și cerc un punct *f* situat la 6,99 cm de *a*.
Acest lucru este ușor?

— Nu, petele care reprezintă punctele sînt iarăși prea mari.

— Orice desen este o schemă imperfectă.
Cel mult, putem ameliora precizia desenului prin trăsături mai fine și pete mai fine.

În cele din urmă ne va fi totdeauna imposibil să reprezentăm corect toate punctele.

Între centru și cerc există puncte distincte situate la 6 cm, la 6,9 cm, la 6,99 cm, la 6,999 cm, la 6,999.999 cm de centru.

Oricare ar fi precizia desenului, anumite pete reprezentative se vor atinge. *Punctele însă nu se ating.*

Între două puncte distincte există totdeauna o infinitate de alte puncte.
Există puncte oricît de aproape vreți de cerc.
Nu există un ultim punct înainte de cerc.
Nu uitați niciodată acest lucru !

— *Cercurile sînt mulțimi de puncte.*

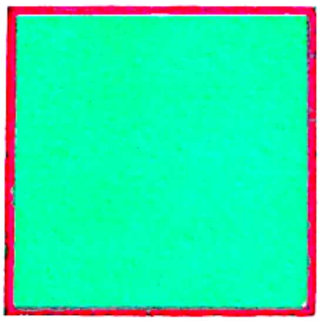
Am mai întîlnit noi alte mulțimi de puncte?

— Dreptele, pătratele . . .

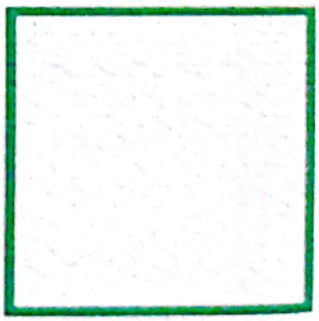
— Cînd vorbiți de pătrat, acest lucru este clar?

N-am întîlnit noi trei feluri de mulțimi pe care le-am fi putut numi **pătrate?**

Pătrat închis



Pătrat deschis



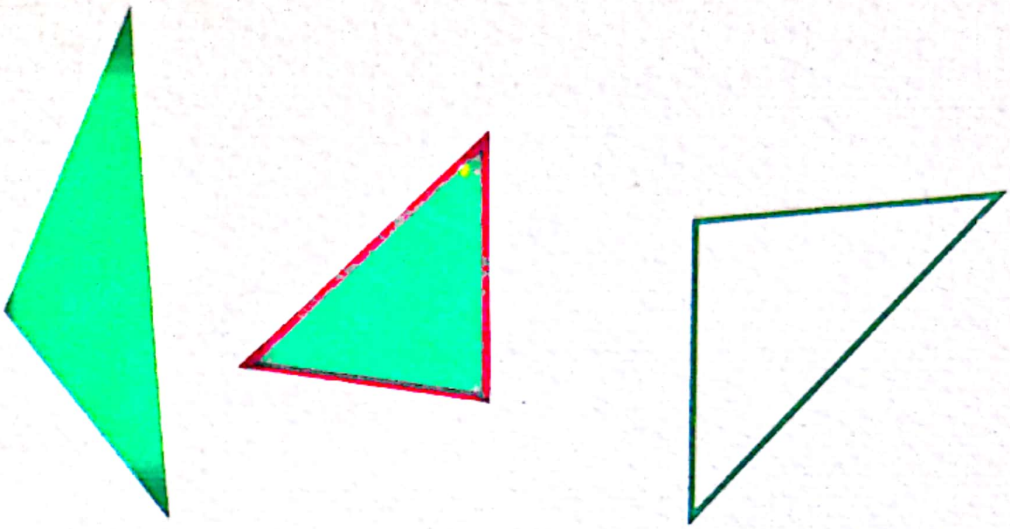
Laturile pătratului

Pentru a fi precișI, vom numi **pătrat închis** mulțimea punctelor care aparțin laturilor pătratului sau sînt în interiorul lui.

Vom numi **pătrat deschis,** mulțimea punctelor din interiorul pătratului.

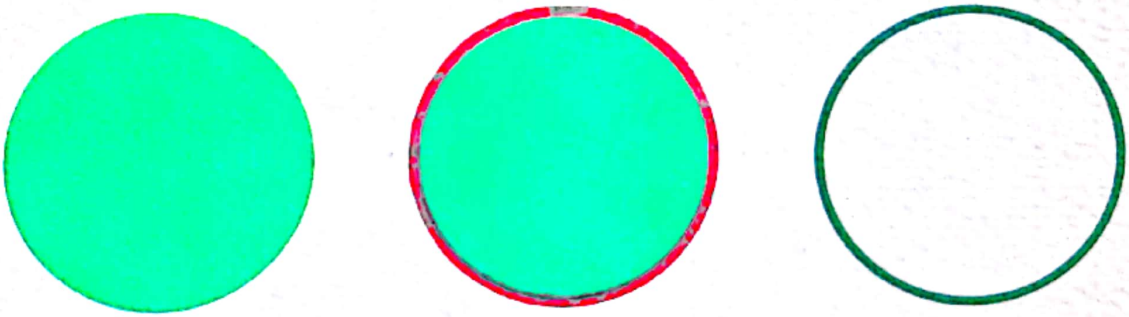
Scanned with OKEN Scanner

Faceți convenții analoge cu triunghiurile.



Triunghi închis *Triunghi deschis* *Laturile triunghiului*

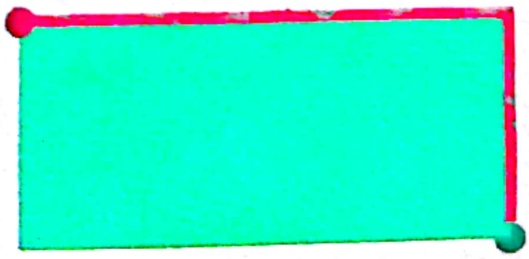
— Vom adopta convenții analoge în privința cercului



Disc închis *Disc deschis* *Cerc*

Cercul este deci o margine de disc.

— Ați putea desena un dreptunghi care să nu fie nici deschis, nici închis?

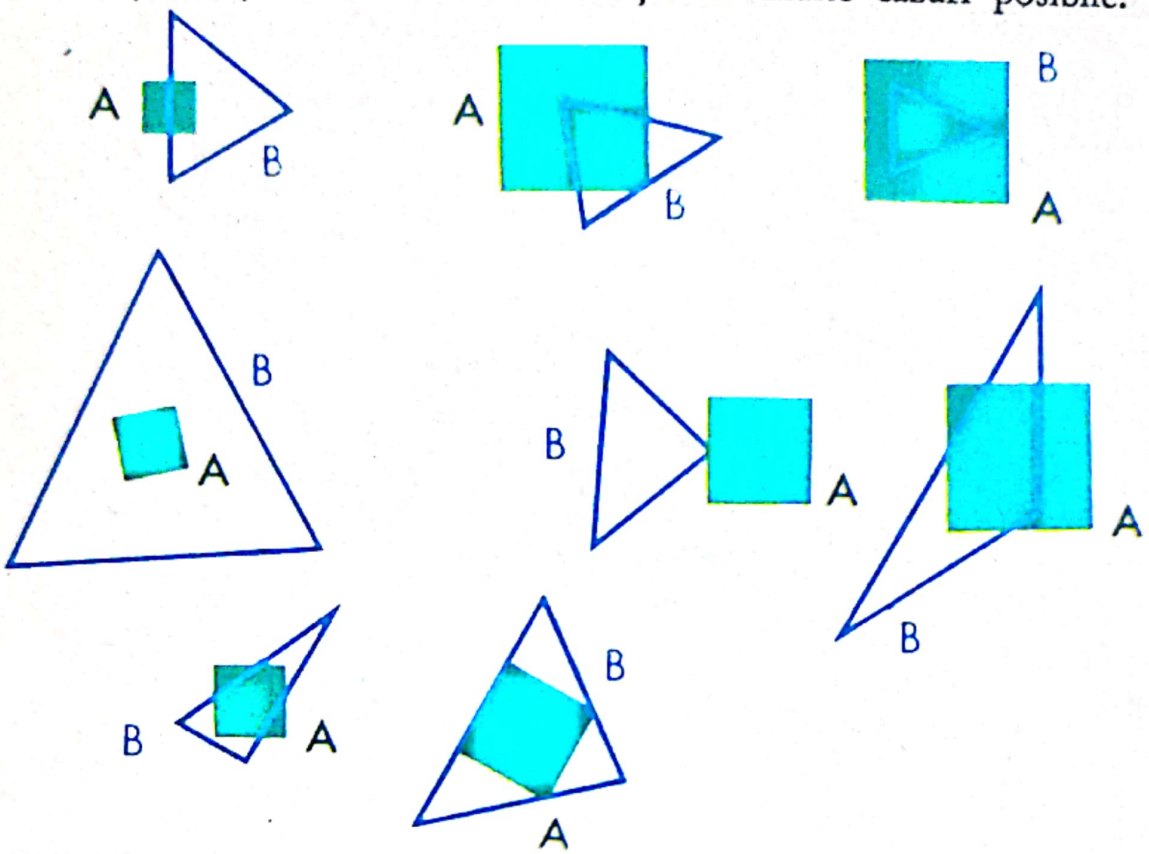


Spuneți tot ce vedeți pe acest desen.

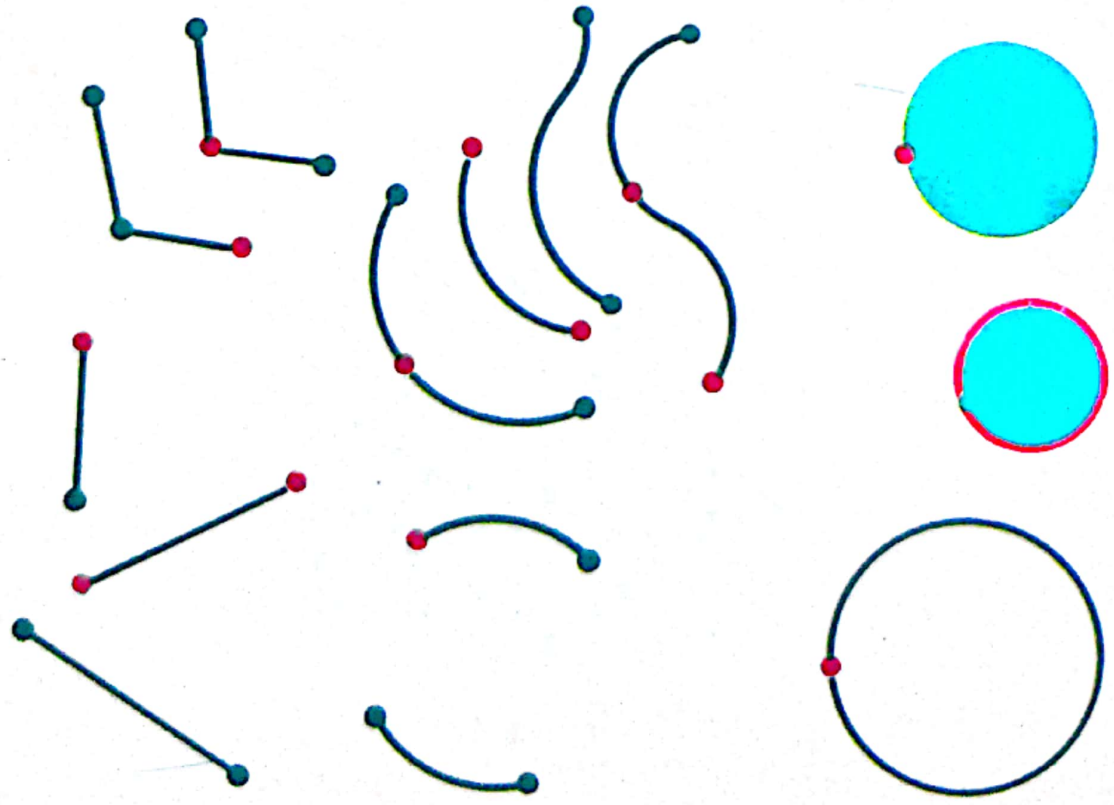
Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

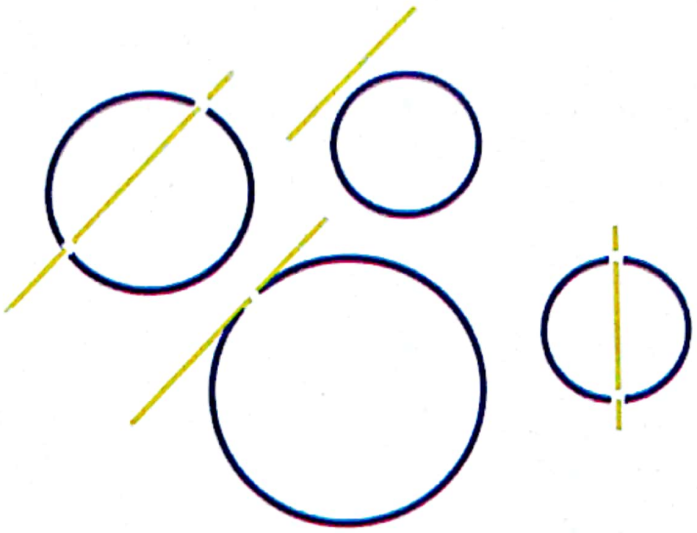
1. A este un pătrat închis, iar B laturile unui triunghi.
Determinați mulțimea $A \cap B$. Prezentați mai multe cazuri posibile.



2. Explicați care sînt mulțimile reprezentate mai jos.

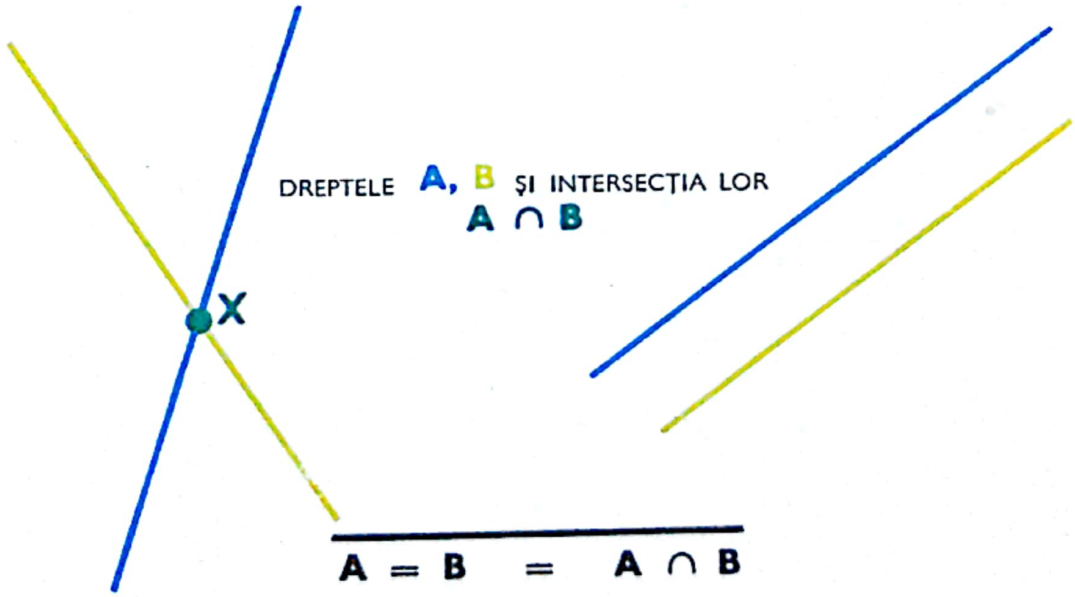


3. Un disc deschis și cercul său formează o *diviziune* a unui disc închis.
4. Un cerc cu raza 0 este un *singur element*.
5. Care este mulțimea $A \cap B$ atunci cînd A este un cerc, iar B o dreaptă? Veți observa că această intersecție este fie o pereche, fie un singur element, fie mulțimea vidă.



A B $A \cap B$

6. Dacă A și B sînt drepte, care poate fi intersecția $A \cap B$?
Dacă $A = B$, avem $A \cap B = A = B$
Dacă $A \neq B$, intersecția $A \cap B$ este fie un singur element, fie mulțimea vidă



7. Dacă A, B și C indică drepte, ce reprezintă următoarele mulțimi?

$$A \setminus B$$
$$A \cup B$$
$$(A \cup B) \cap C$$

Considerați toate cazurile din figură.

2 — PLAN ŞI AXIOME

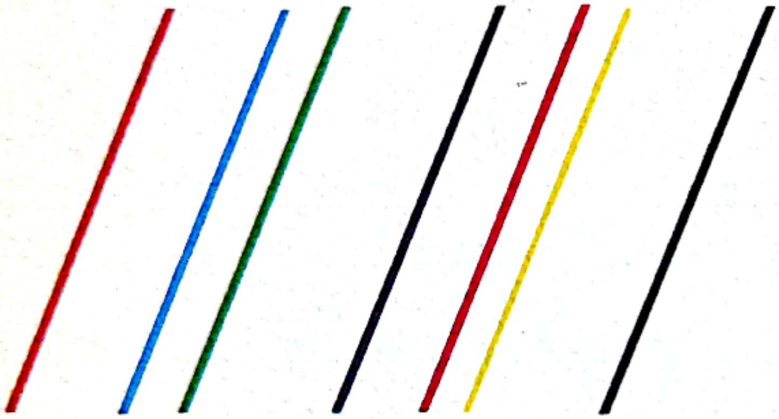
Mulţimea punctelor de pe tablă şi a tuturor celor obţinute prelungind părţile de drepte de pe tablă se numeşte **planul tablei.**

Am fi putut vorbi de asemenea de planul podelei, de planul tavanului, de planul caietului.

Ceea ce vom spune despre un plan, am putea spune despre orice alt plan.

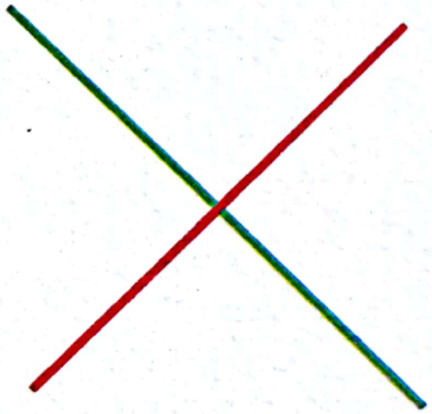
Vom studia un plan şi-l vom numi Π.

Ştim de pe acum multe lucruri cu privire la Π. Ştim ce este distanţa dintre două puncte. Ştim că anumite părţi din Π sînt cercuri, drepte. Ştim, de asemenea — deşi în această carte n-am vorbit încă de acest lucru — că dreptele pot fi paralele sau perpendiculare.



DREPTE PARALELE

$A \parallel B$, $C \parallel D$, etc.



DREPTE PERPENDICULARE

X Y

Nu vom reţine totul dintr-o dată.

Vom pune ordine în ceea ce ştim, în aşa fel încît să reţinem cît mai puţin posibil.

Iată 4 copii: Alfred, Bernard, Cecilia, Denisa.

Vi se dă informaţia:

1. Bernard este fratele lui Alfred.
2. Cecilia este sora lui Bernard.
3. Denisa nu este sora Ceciliei.

Veţi putea **deduce** următoarele **propoziţii:**

4. Alfred este fratele lui Bernard.
5. Alfred este fratele Ceciliei.
6. Alfred nu este fratele Denisei.
7. Bernard este fratele Ceciliei.
8. Bernard nu este fratele Denisei.
9. Cecilia este sora lui Alfred.

Scanned with OKEN Scanner

10. Cecilia nu este sora Denisei.
11. Denisa nu este sora lui Alfred.
12. Denisa nu este sora lui Bernard.

Am enunţat **12 propoziţii.** Ştiţi tot ce puteţi afla din ele, reţinînd numai propoziţiile 1, 2, 3.

— Poate aţi prefera să alegeţi alte propoziţii de reţinut?

Ce propoziţii aţi putea reţine pentru a păstra aceeaşi informaţie?

— Propoziţiile 7, 9 şi 12.

— Găsiţi şi alte moduri de a da aceeaşi informaţie.

— . . .

— Vedeţi, deci, că puteţi obţine aceeaşi informaţie enunţînd propoziţii diferite. «1 şi 2 şi 3 » dau aceeaşi informaţie ca şi «7 şi 9 şi 12 ».

În geometrie, situaţia este mai complicată decît în cazul precedent.

Veţi înţelege, deci, că avem mult mai multă libertate în alegerea propoziţiilor iniţiale de reţinut. Timp de mii de ani, geometrii au muncit să găsească sisteme de propoziţii iniţiale care să fie comode. Sperăm că alegerea noastră vă va uşura studiul.

Numim **axiome** propoziţiile iniţiale de reţinut.

Prima noastră axiomă va fi foarte simplă.

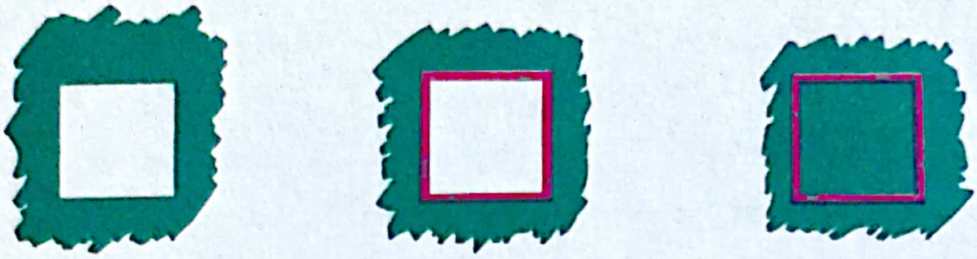
AXIOMA Π1 — *Planul* Π este o mulţime infinită de puncte.

Ce vrem să înţelegem spunînd că planul este o mulţime infinită de puncte?

Există $p_1 \in \Pi$
Există $p_2 \in \Pi \setminus \{p_1\}$
Există $p_3 \in \Pi \setminus \{p_1, p_2\}$
Există $p_4 \in \Pi \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$
. . .
Există $p_{84} \in \Pi \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_{83}\}$
. . .

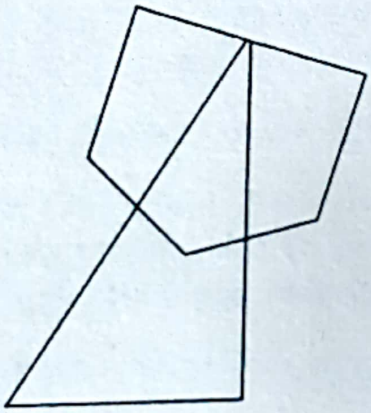
EXERCIȚII

1. Fie A un pătrat deschis, B un pătrat închis și C laturile unui pătrat. Reprezentați prin culorile verde și roșu $\Pi \setminus A$, $\Pi \setminus B$, $\Pi \setminus C$.



$\Pi \setminus A$ $\Pi \setminus B$ $\Pi \setminus C$

2. Desenul de mai jos reprezintă laturile unui triunghi și laturile unui poligon.

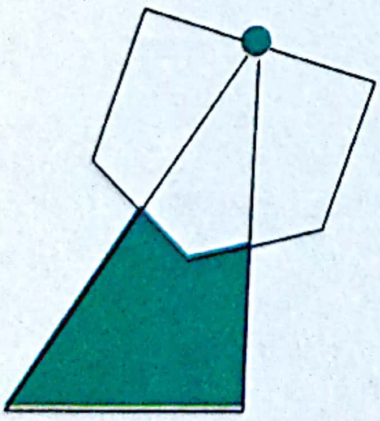


Fie P poligonul deschis și T triunghiul închis definite de aceste laturi. Reprezentați (cu verde și roșu)

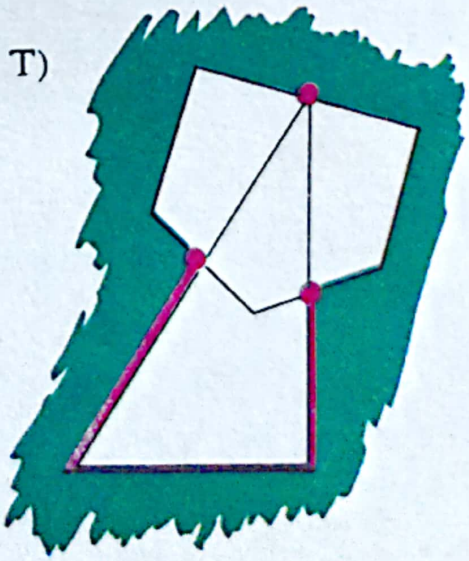
$(\Pi \setminus P) \cap T$

$(\Pi \setminus P) \cap (\Pi \setminus T)$

$(\Pi \setminus T) \cap P$



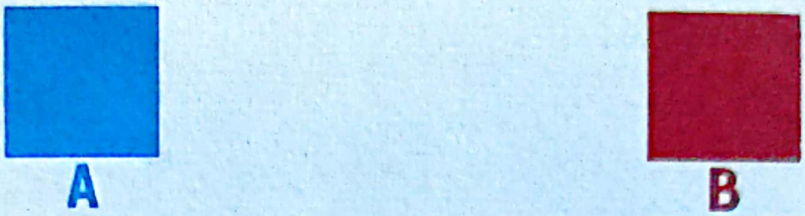
$(\Pi \setminus P) \cap T$



$(\Pi \setminus P) \cap (\Pi \setminus T)$

Scanned with OKEN Scanner

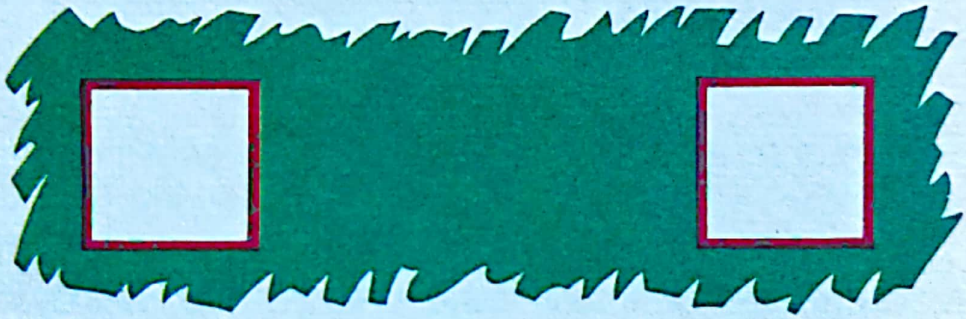
3. Fie A şi B pătrate închise.



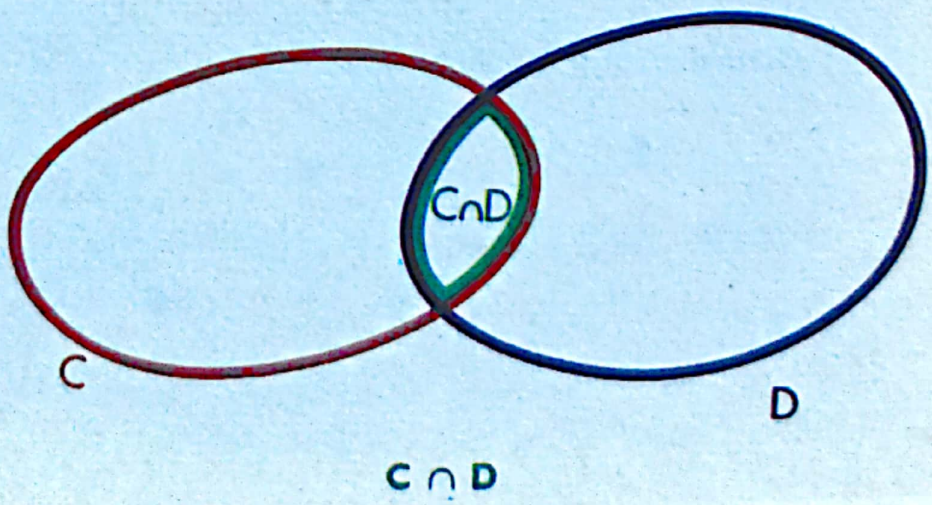
Să punem $C = \Pi \setminus A$, $D = \Pi \setminus B$
Verificaţi formula:

$$C \cap D = \Pi \setminus (A \cup B)$$

Faceţi o figură şi reprezentaţi $C \cap D$ cu verde şi roşu.



Desenaţi apoi diagramele mulţimilor C, D, $C \cap D$.

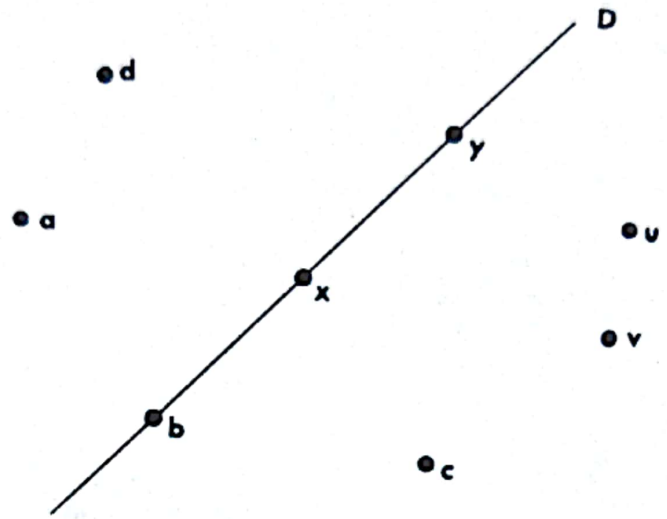


$C \cap D$

3 — DREPTE

Am văzut că dreptele planului Π sînt părți infinite ale lui Π.

Dacă D este o dreaptă, există puncte ale lui Π care nu aparțin lui D: **orice dreaptă este o parte proprie a planului.**



$a \notin D$, $b \in D$, $c \notin D$, $d \notin D$, $x \in D$, $y \in D$, $u \notin D$, $v \notin D$

Deoarece dreptele sînt părți foarte importante ale planului, va fi comod să notăm totdeauna prin aceeași literă $\mathfrak{D}$ mulțimea dreptelor planului Π.

Cuprindem informațiile precedente în axioma $\Pi 2$.

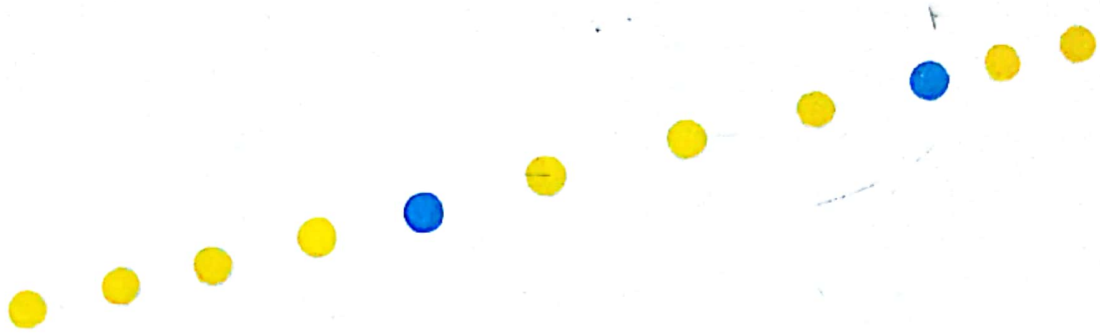
AXIOMA $\Pi 2$ — *Dreptele planului Π sînt părți proprii infinite ale lui Π. Mulțimea dreptelor planului Π se notează $\mathfrak{D}$.*

— Desenați 3 puncte aliniate și 3 puncte nealiniate.

Există o dreaptă care cuprinde pe cele trei puncte albastre.
Nu există nici o dreaptă care să cuprindă pe cele 3 puncte verzi.

Scanned with OKEN Scanner

Trei puncte nu aparţin totdeauna aceleiaşi drepte.
Desenaţi alte puncte aliniate cu punctele albastre de mai sus.
Desenaţi două puncte albastre pe tablă. Puteţi desena totdeauna puncte galbene aliniate cu aceste puncte albastre.



Există o dreaptă şi numai una singură care conţine aceste puncte albastre.
Această informaţie face obiectul axiomei **Π3.**

AXIOMA Π3 — ***Orice pereche de puncte este inclusă într-o dreaptă şi numai într-o singură dreaptă.***

Dacă vi se spune că

$$x \in \Pi,\ y \in \Pi,\ x \neq y$$

ştiţi, deci, că există numai o singură

$$D \in \mathfrak{D}$$

astfel încît

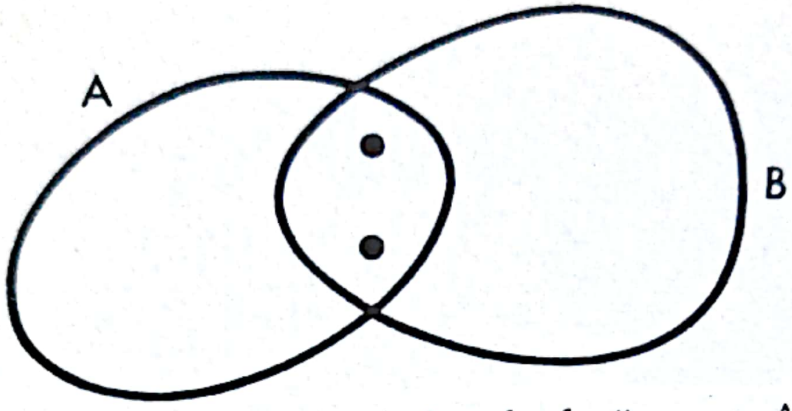
$$x \in D, \qquad y \in D$$

Dreapta D astfel definită prin x şi y va fi deseori notată xy.

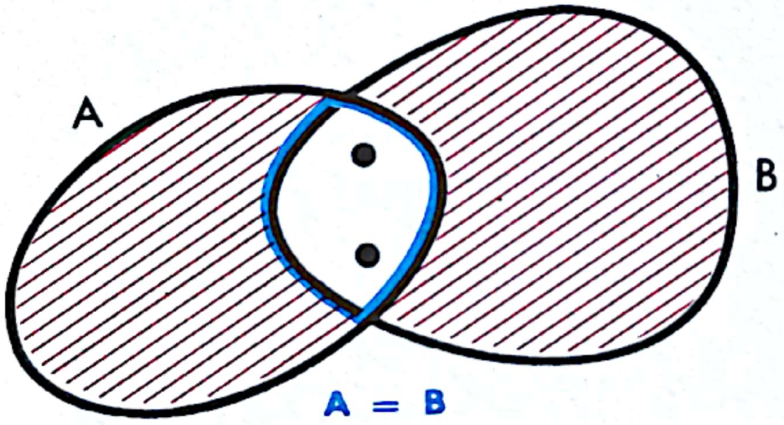
Astfel: $x, y \in \Pi$ şi $x \neq y \Rightarrow xy \in \mathfrak{D}$ şi $x \in xy,\ y \in xy$

EXERCIŢII

1. Iată o diagramă în care A şi B reprezintă drepte.
Ce concluzie puteţi trage? Desenaţi pe A şi B în planul caietului.

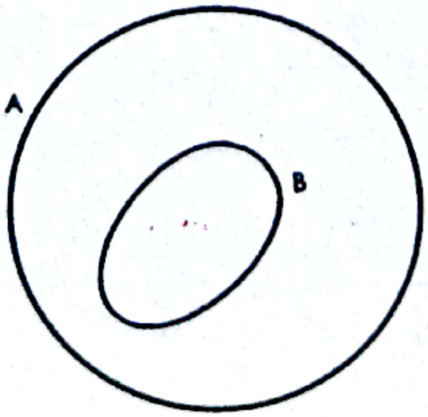


Fiecare din dreptele A şi B cuprinde cele două puncte însemnate. Există o dreaptă şi numai una singură care le cuprinde pe aceste două puncte. Deci $A = B$.



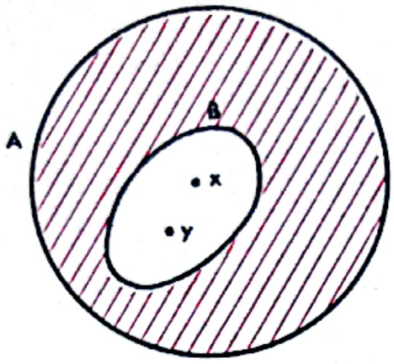
Explicaţi:
$A, B \in \mathfrak{D}$; $xy \in \Pi$; $x \neq y$; $x \in A$; $x \in B$; $y \in A$; $y \in B \Rightarrow A = B$

2. Diagrama de mai jos reprezintă dreptele A şi B.
Notaţi date suplimentare pe diagramă. Desenaţi pe A şi B în planul caietului vostru.



Scanned with OKEN Scanner

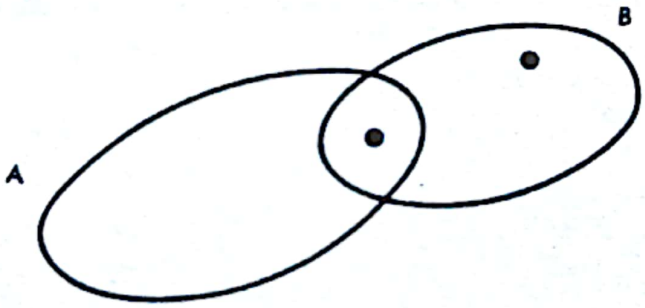
Dreapta B cuprinde cel puțin două puncte distincte $x \neq y$.
Punctele x, y aparțin dreptei A.
Nu există însă decît o singură dreaptă care cuprinde pe x și y.
Deci $A = B$.



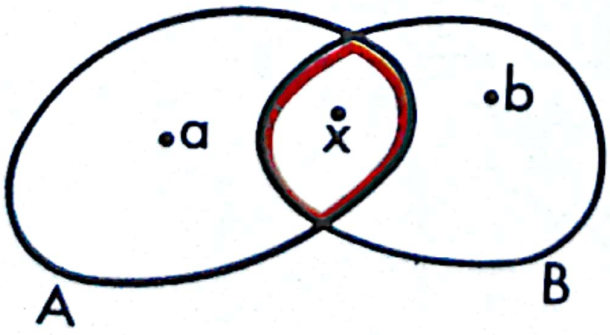
DIAGRAMĂ

ÎN PLANUL Π

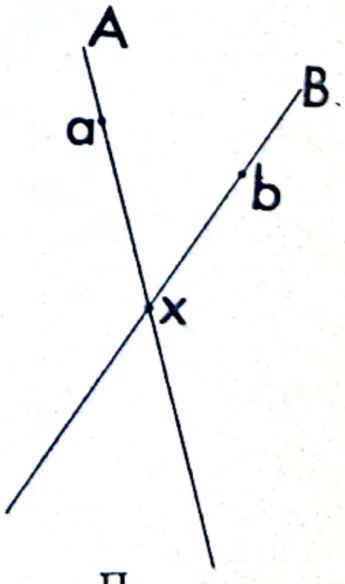
3. Aceleași probleme pentru diagrama de mai jos în care A și B indică tot drepte.



Există un punct (să-l numim b) care aparține lui B și nu aparține lui A.
Deci $A \neq B$
Rezultă că $A \cap B$ nu poate cuprinde mai mult decît un punct.



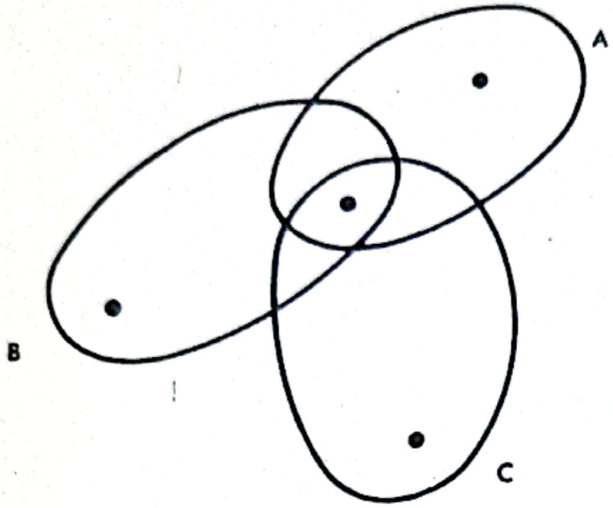
$\{x\}$
DIAGRAMĂ



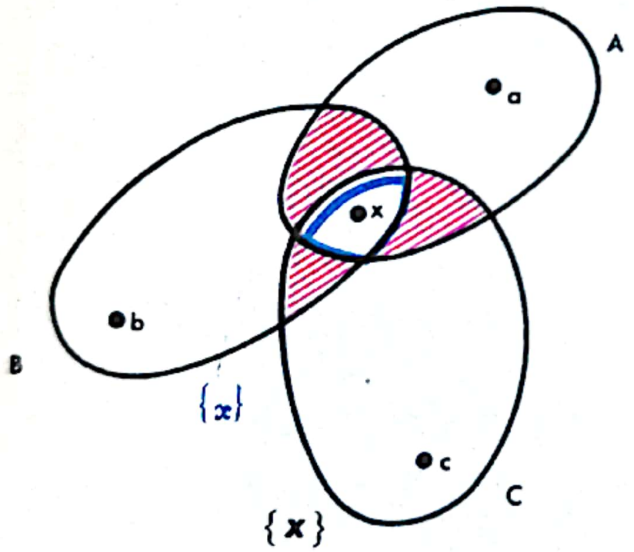
ÎN PLANUL Π

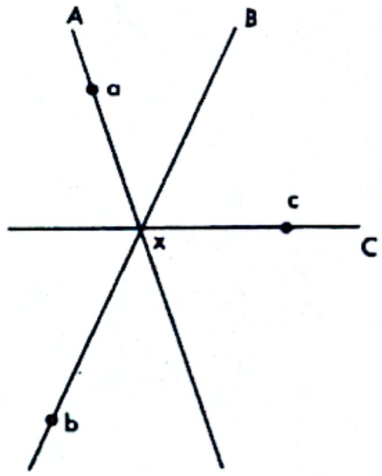
Scanned with OKEN Scanner

4. În diagrama de mai jos avem $A, B, C \in \mathfrak{D}$.

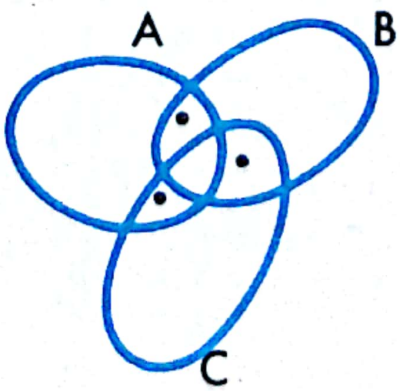


Notați date suplimentare pe diagramă.
Transcrieți situația în planul caietului.





5. Aceeași problemă pentru diagrama următoare:

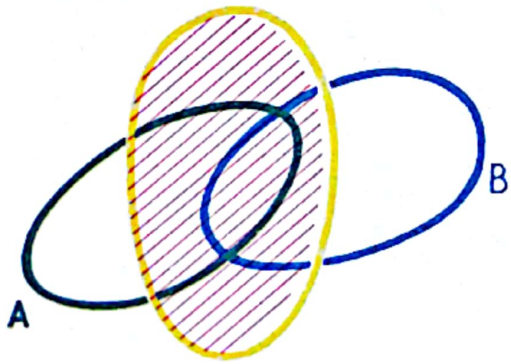


$A, B, C \in \mathfrak{D}$

6. Fie $a, b \in \Pi$ şi $a \neq b$
Să notăm cu $\mathfrak{D}_a$ mulţimea dreptelor care cuprind pe a.
Deci $\mathfrak{D}_a = \{D \in \mathfrak{D} \parallel a \in D\}$
De asemenea $\mathfrak{D}_b = \{D \in \mathfrak{D} \parallel b \in D\}$
Stabiliţi formula

$$\mathfrak{D}_a \cap \mathfrak{D}_b = \{ab\}$$

7. Transcrieţi în planul caietului situaţia descrisă de următoarea diagramă



$$A, B \in \mathfrak{D}$$

8. Putem arăta printr-o formulă că punctele x, y, z, t sînt aliniate:

$$x, y, z, t \in D \in \mathfrak{D}$$

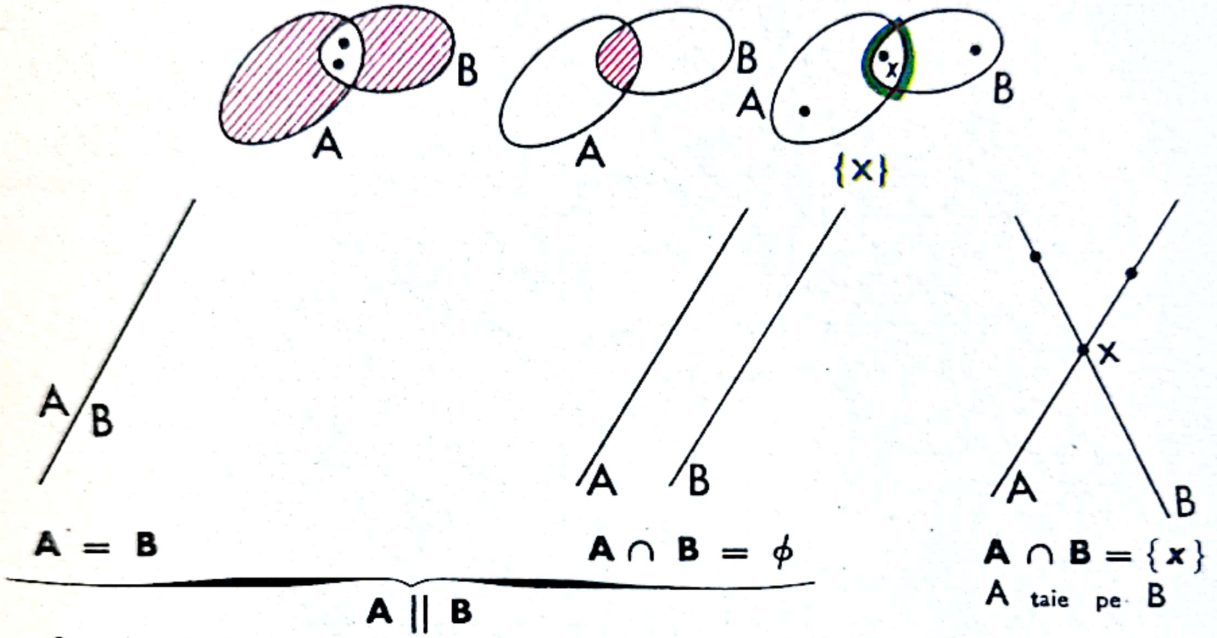
9. **Dacă** $A, B \in \mathfrak{D}$ şi $A \subset B$,
Atunci $A = B$

Scanned with OKEN Scanner

4 — PARALELISM

Fiecare din literele A, B reprezintă o dreaptă.
Să examinăm ce poate fi intersecția $A \cap B$.
Dacă $A \cap B$ cuprinde (cel puțin) două puncte, axioma 3 ne arată că $A = B$.

— Care sînt deci eventualitățile care rămîn atunci cînd $A \neq B$?
Dacă ~~$A \neq$~~ B, intersecția $A \cap B$ este mulțimea vidă sau o mulțime cu un singur element.
Să reprezentăm aceste cazuri diferite prin diagrame și în planul caietului



A = B | **A ∩ B = ϕ** | **A ∩ B = {x}**
A || B
A taie pe B

Să recapitulăm aceste rezultate.

LEMA 1. *Intersecția a două drepte* ***distincte*** *este o mulțime cu un singur element sau o mulțime vidă.*

Definiția 1 — *Două drepte sînt* ***numite secante*** *dacă și numai dacă intersecția lor este o mulțime cu un singur element.*
Două drepte nesecante sînt numite ***paralele.***

Dacă $A, B \in \mathfrak{D}$

A și B secante $\Longleftrightarrow$ A și B neparalele.

Se arată că A și B sînt paralele, notîndu-se $A \| B$.
Se arată că A și B sînt secante, scriindu-se $A \nparallel B$.
Nu veți pierde din vedere că dacă $A, B \in \mathfrak{D}$

$$A \| B \Longleftrightarrow (A = B \text{ sau } A \cap B = \varnothing)$$

EXERCIȚII

1. Fie $A, B \in \mathfrak{D}$
   Avem $A \parallel A,\ B \parallel B$
   și $A \parallel B \iff B \parallel A$

2. Fie $A, B \in \mathfrak{D};\ A \neq B;\ A \parallel B$
   Desenați cu verde și roșu
   $$\Pi \setminus (A \cup B) \text{ și } \Pi \setminus (A \cap B)$$

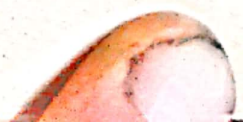
3. Dacă $A, B \in \mathfrak{D}$, avem
   $$A \text{ taie pe } B \iff B \text{ taie pe } A$$

4. Fie A și B două drepte secante.
   Descrieți
   $$(\Pi \setminus A) \cap (\Pi \setminus B),$$
   $$(\Pi \setminus A) \cup (\Pi \setminus B),$$
   $$A \cup (\Pi \setminus B),$$
   $$A \cap (\Pi \setminus B),$$
   $$\Pi \setminus (A \cup B),$$
   $$\Pi \setminus (A \cap B),$$
   $$A \setminus B,\ A \cup B.$$

   Care din termenii de mai sus indică aceeași mulțime?
   Puteți s-o stabiliți prin calcul?

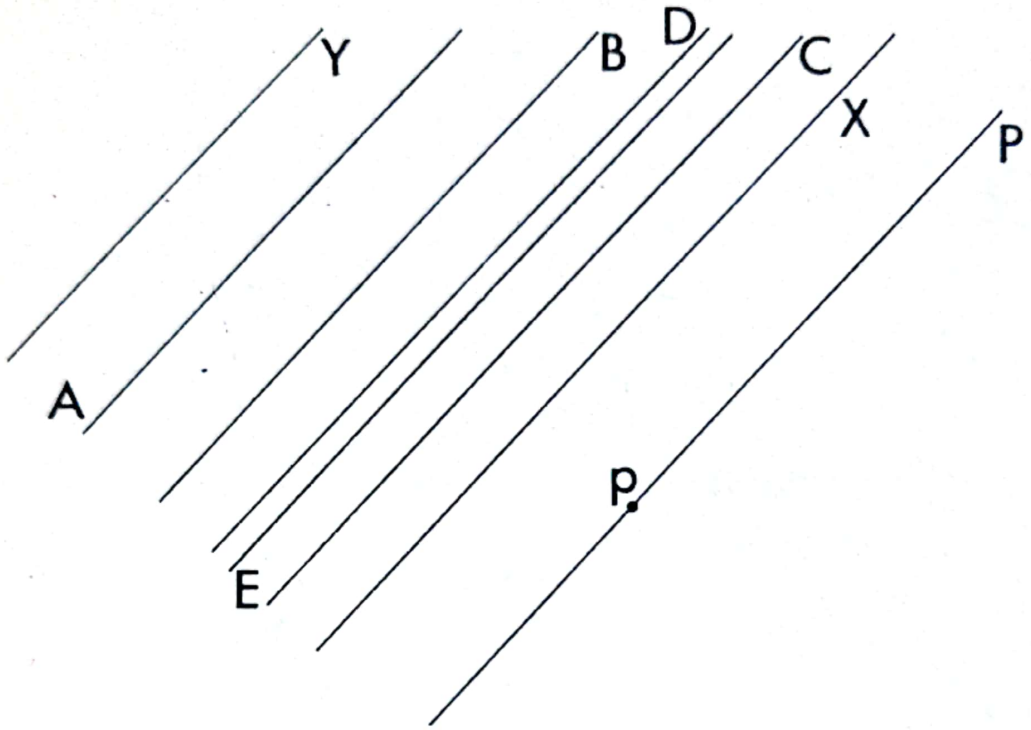
5 — DIRECȚII

— Desenați o dreaptă D a planului Π.
Trasați o paralelă A la D.
Puteți trage o nouă paralelă la D? S-o numim B.
Puteți trage multe alte paralele?
Le puteți trage pe toate?
— Nu le putem trage, căci există o infinitate de paralele la D.
— Desenați un punct p pe tablă.
Există o paralelă la D care să cuprindă pe p?
— Da!
— Cîte paralele la D, care să cuprindă pe p, există?
— Una singură.



Scanned with OKEN Scanner

Vom numi **direcţia lui D** mulţimea paralelelor la D. Vom nota această mulţime cu *dir* D.



CÎTEVA ELEMENTE ALE LUI *dir* D

DEFINIŢIA 2 — Numim **direcţie a unei drepte** mulţimea paralelelor la această dreaptă.

O direcţie este o mulţime de drepte, adică de părţi nevide ale lui Π, şi orice punct al lui Π aparţine uneia şi numai uneia din aceste drepte.

Orice direcţie este deci o diviziune a planului Π.

Această importantă informaţie va constitui axioma $\Pi 4$.

AXIOMA $\Pi 4$ — ***Orice direcţie este o diviziune a planului.***

Euclid.

— Ce puteţi spune de două elemente distincte X şi Y ale lui *dir* D?

— Acestea sînt drepte disjuncte şi deci paralele.

LEMA 2 — *Toate dreptele unei direcţii sînt paralele între ele.*

Scanned with OKEN Scanner

— Fiecare din literele A, B, C indică o dreaptă a lui Π.
Ni se dau informațiile $A \parallel B$ și $B \parallel C$.
Ce concluzie puteți trage?

— A și C aparțin *dir* B și deci sînt paralele.

LEMA 3 — **Dacă** *fiecare din dreptele A, C este paralelă cu dreapta B,*
Atunci *dreptele A și C sînt paralele.*

Cu alte cuvinte:

LEMA 3 — Pentru orice $A, B, C \in \mathfrak{D}$

$$A \parallel B \parallel C \Rightarrow A \parallel C$$

LEMA 4 — **Dacă** două drepte sînt paralele,
Atunci orice dreaptă care o taie pe una, o taie și pe cealaltă.

Cu alte cuvinte:

LEMA 4 — *Pentru orice* $A, B, C \in \mathfrak{D}$

$$A \parallel B \nparallel C \Rightarrow A \nparallel C$$

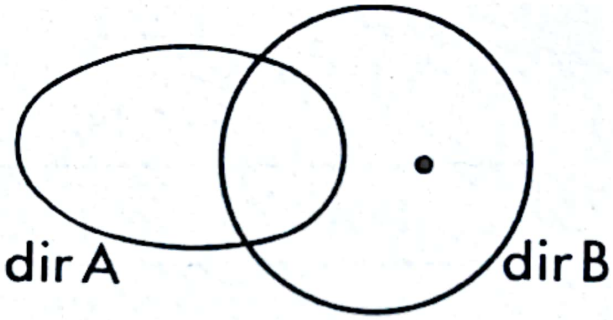
DEMONSTRAȚIE:

Fiecare din literele A, B, C indică o dreaptă a lui Π.
Ni se dau informațiile $A \parallel B$ și $B \nparallel C$.
Este posibil să avem în plus $A \parallel C$?
Formulele $A \parallel B$ și $A \parallel C$ ar duce la $B \parallel C$.
Ni s-a semnalat însă că $B \nparallel C$.
Nu putem deci avea $A \parallel C$.

Scanned with OKEN Scanner

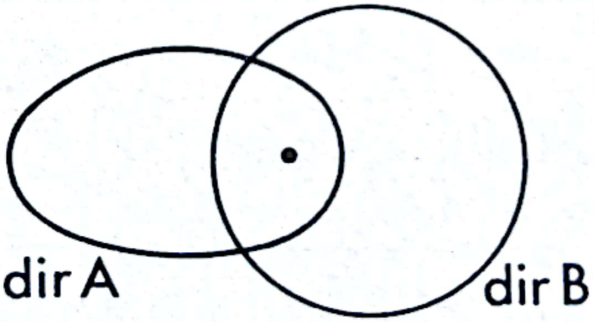
EXERCIȚII

1. $A \,||\, B \iff B \,||\, A$
2. $A \,||\, B \iff A \in \mathit{dir}\ B$
3. $A \in \mathit{dir}\ B \iff B \in \mathit{dir}\ A$
4. Dacă $A \,||\, B$, orice dreaptă paralelă cu A este paralelă și cu B și orice paralelă cu B este paralelă și cu A. Deci $A \,||\, B \iff \mathit{dir}\ A = \mathit{dir}\ B$
5. Dacă $A \nparallel B$, deci $\mathit{dir}\ A \cap \mathit{dir}\ B = \varnothing$
6. $\mathit{dir}\ A = \{D \in \mathfrak{D} \mid D \,||\, A\}$
7. Indicați date complimentare pe această diagramă.

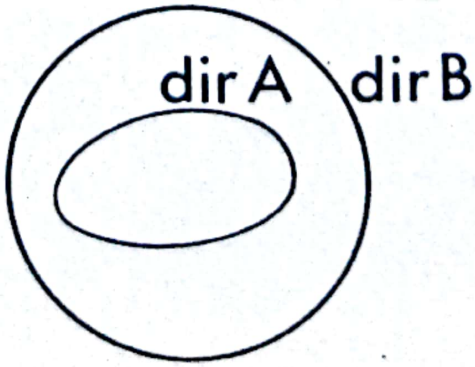


Desenați dreptele A și B în planul caietului.

8. Același exercițiu în cazul situației de mai jos.



9. Același exercițiu.



Scanned with OKEN Scanner

10. Pentru orice dreaptă D avem

$$dir\ D \subset \mathfrak{D}$$

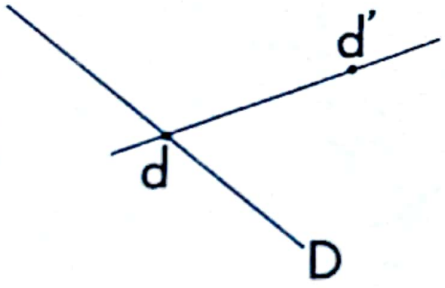
11. Dacă $A, B \in \mathfrak{D}$, avem o eventualitate și numai una

$$dir\ A = dir\ B \quad \textbf{sau} \quad dir\ A \cap dir\ B = \varnothing$$

12. Orice dreaptă aparține unei direcții și numai uneia singure.

13. Mulțimea direcțiilor este o diviziune a lui $\mathfrak{D}$.

14. Fie $D \in \mathfrak{D}$. Există o dreaptă D' neparalelă cu D.
Fie deci $d \in D$ și $d' \notin D$. Dreapta dd' intersectează pe D.



$d\,d' \nparallel D$

15. Fie $X, Y \in \mathfrak{D}$ și $X \nparallel Y$.

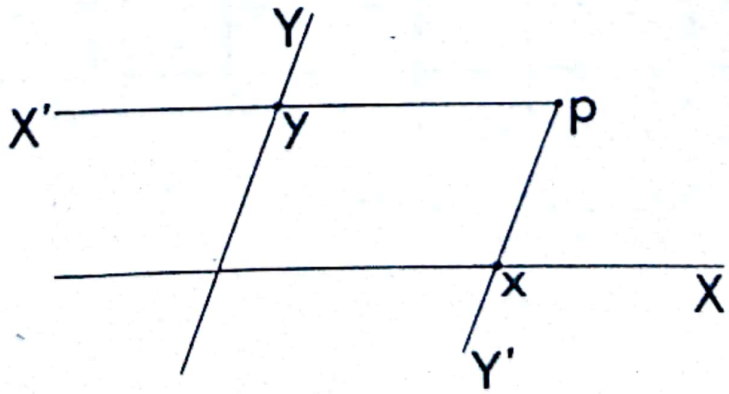
Fie $p \in \Pi$.

Să notăm cu X' paralela la X care cuprinde pe p. Deci $p \in X' \,||\, X$.

Fie Y' dreapta definită de $p \in Y' \,||\, Y$.

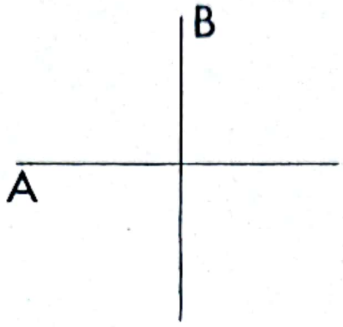
$X' \,||\, X \nparallel Y$. Deci $X' \nparallel Y$. Să punem $X' \cap Y = \{y\}$

$Y' \,||\, Y \nparallel X$. Deci $Y' \nparallel X$. Să punem $Y' \cap X = \{x\}$



6 — PERPENDICULARITATE

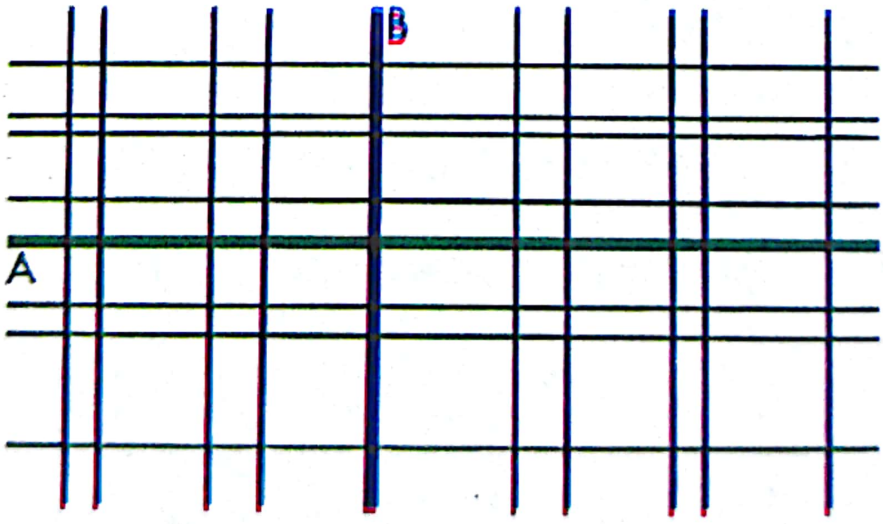
Să îndoim o foaie de hîrtie în două.
Să îndoim încă o dată foaia astfel îndoită.
Să desfacem apoi foaia.
Din cutele ei apare desenul acesta:



$A \perp B$

Dreptele A și B astfel desenate sînt numite perpendiculare și vom scrie $A \perp B$ (sau $B \perp A$).

Desenați un număr mare de drepte care să aparțină la *dir* A și un număr mare de drepte care să aparțină la *dir* B.

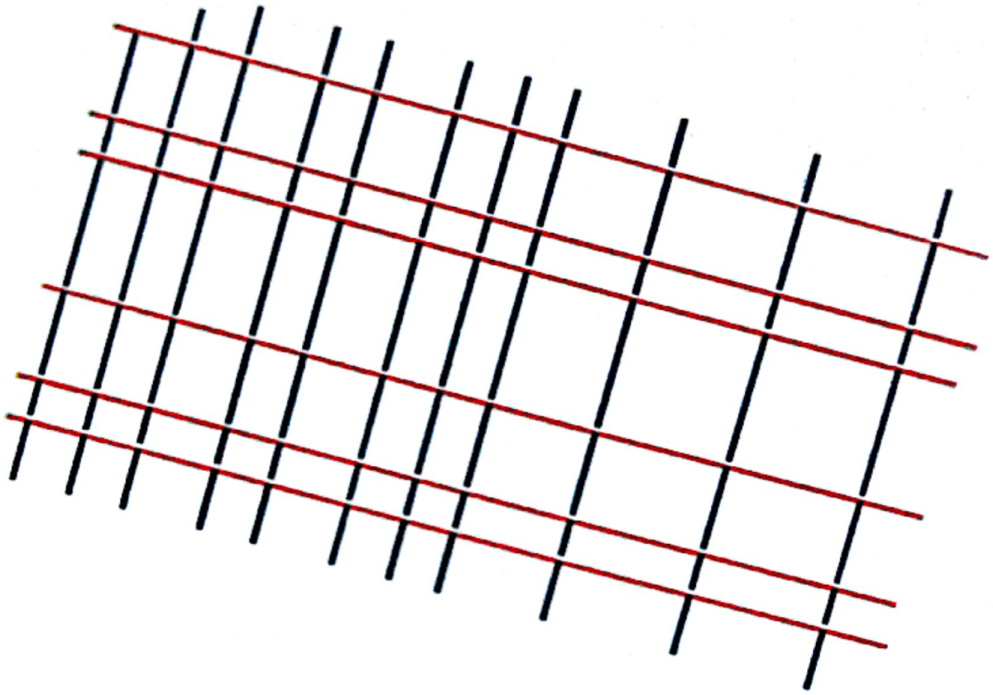


— Alegeți un element al mulțimii *dir* A și un element al mulțimii *dir* B.
Ce puteți spune de aceste drepte?
— Ele sînt perpendiculare.
— Orice dreaptă care aparține mulțimii *dir* A este perpendiculară pe orice dreaptă care aparține mulțimii *dir* B.

Vom spune că **aceste direcții sînt perpendiculare.**

Scanned with OKEN Scanner

— Desenaţi cu negru cîteva drepte ale unei direcţii.
Există o direcţie perpendiculară pe această direcţie?
— Da.
— Trageţi cu portocaliu cîteva drepte ale acestei direcţii.



DIRECŢII PERPENDICULARE

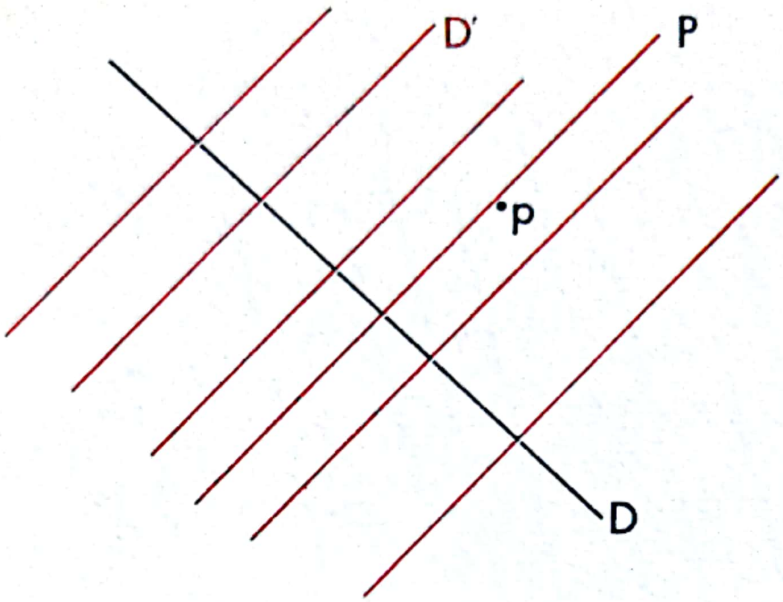
— Una din dreptele portocalii poate fi paralelă cu una din dreptele negre?
— Nu, orice dreaptă portocalie intersectează orice dreaptă neagră.
— Cîte direcţii perpendiculare există pe o direcţie?
— Una singură.
Să cuprindem aceste informaţii în axioma II5.

AXIOMA II5 — *Oricărei direcţii* a *îi corespunde o direcţie şi numai una singură* a' *perpendiculară pe* a. *Notăm acest lucru scriind* $a \perp a'$ *(sau* $a' \perp a$*).*

Orice dreaptă $A \in a$ *este perpendiculară pe orice dreaptă* $A' \in a'$. *Notăm acest lucru scriind* $A \perp A'$ *(sau* $A' \perp A$*).*
Două drepte perpendiculare sînt secante.

Scanned with OKEN Scanner

— Vi se dă o dreaptă D.
Care este mulțimea dreptelor perpendiculare pe D?
— Este direcția *dir* D' perpendiculară pe *dir* D.



$p \in P \perp D$

Dir D': DIRECȚIA PERPENDICULARĂ PE **D.**

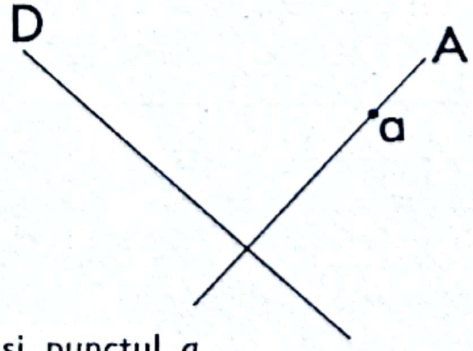
Știm însă că *dir* D' este o diviziune a planului.
Deci orice punct al lui Π aparține unei drepte de *dir* D' și numai uneia singure.
Am stabilit astfel

LEMA 5 — Pentru orice $p \in \Pi$ și $D \in \mathfrak{D}$ există o dreaptă P și numai una singură astfel încît

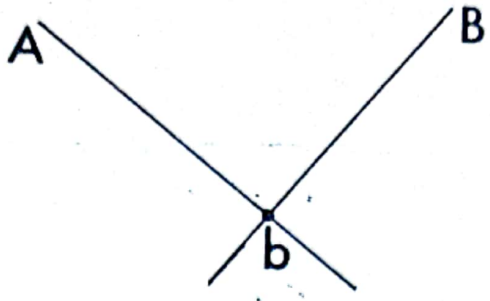
$$p \in P \perp D$$

Cu alte cuvinte:

LEMA 5 — *Fiind date o dreaptă și un punct, există o dreaptă și numai una, perpendiculară pe dreapta pe care se află punctul.*



Vi se dă dreapta D și punctul *a*.
Există o singură perpendiculară pe dreapta D care cuprinde pe *a*.
Aceasta este dreapta A: $a \in A \perp D$.



Vi se dă $A \in \mathfrak{D}$ și $b \in A$

Există o singură dreaptă și numai una, perpendiculară pe dreapta A care cuprinde punctul *b*.

Aceasta este dreapta B: $b \in B \perp A$

— Cînd spunem că $A \perp B$?

— Cînd *dir* $A \perp$ *dir* B.

Deci, orice dreaptă a mulțimii *dir* A (adică orice paralelă cu A) este perpendiculară pe orice dreaptă a mulțimii *dir* B (adică orice paralelă cu B).

Enunțăm acest rezultat prin

LEMA 6 — *Pentru orice* $A', A, B, B' \in \mathfrak{D}$ *avem*

$$A' \parallel A \perp B \parallel B' \Rightarrow A' \perp B'$$

Ceea ce se exprimă fără simboluri sub forma:

LEMA 6 — **Dacă** *două drepte sînt paralele cu drepte perpendiculare,*
Atunci *aceste două drepte sînt perpendiculare.*

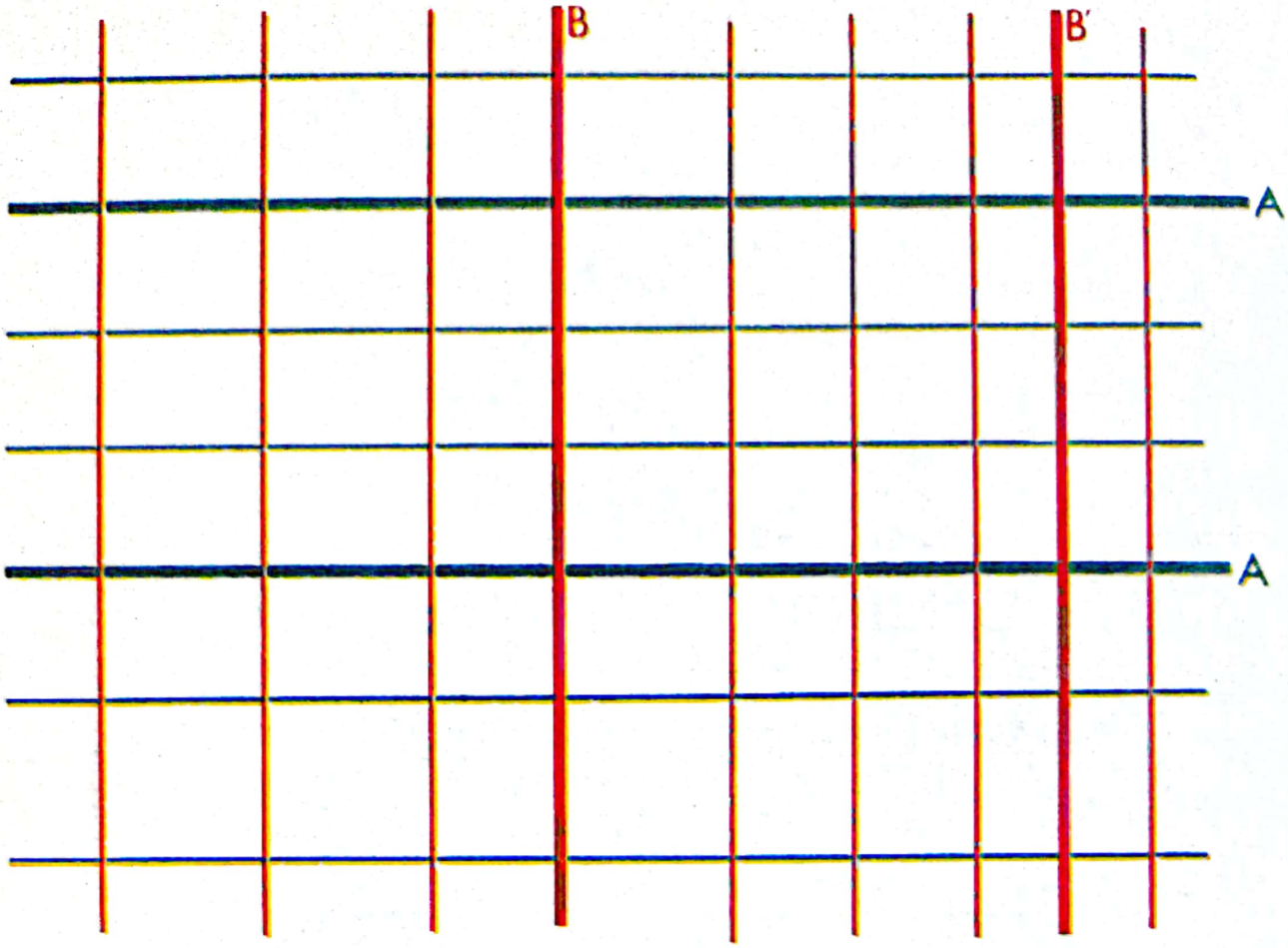
Întrucît $A \parallel A$ și $B \parallel B$, avem în particular

LEMA 7 — *Pentru orice* $A', A, B, B' \in \mathfrak{D}$:

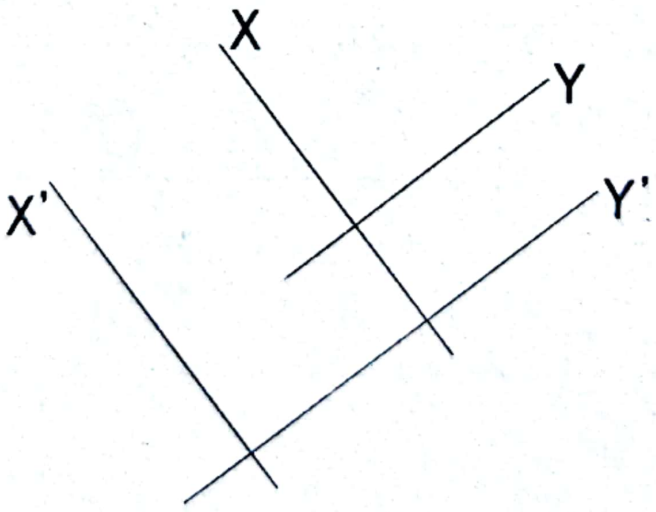
$$A \perp B \parallel B' \Rightarrow A \perp B'$$
$$A' \parallel A \perp B \Rightarrow A' \perp B$$

ceea ce se mai enunță

LEMA 7 — **Dacă** *două drepte sînt paralele,*
Atunci *orice perpendiculară pe una din drepte este perpendiculară și pe cealaltă.*

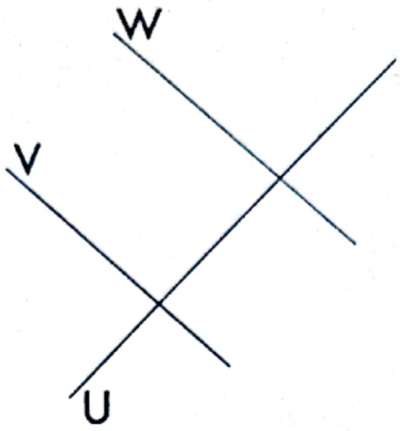


$$A' \parallel A \perp B \parallel B' \Rightarrow A' \perp B'$$
$$A \perp B \parallel B' \Rightarrow A \perp B'$$



$$X' \parallel X \perp Y \parallel Y' \Rightarrow X' \perp Y'$$

Scanned with OKEN Scanner



$$U \perp V \parallel W \Rightarrow U \perp W$$

— Vi se dau două drepte A, B, amîndouă perpendiculare pe C.

Deci $A \perp C$ și $B \perp C$

Ce știți despre direcțiile lui A, B, C?

dir $A \perp$ *dir* C și *dir* $B \perp$ *dir* C

— Cîte direcții perpendiculare pe *dir* C există?

— Una singură.

Deci *dir* A = *dir* B

— Ce înseamnă acest lucru pentru A și B?

$A \parallel B$

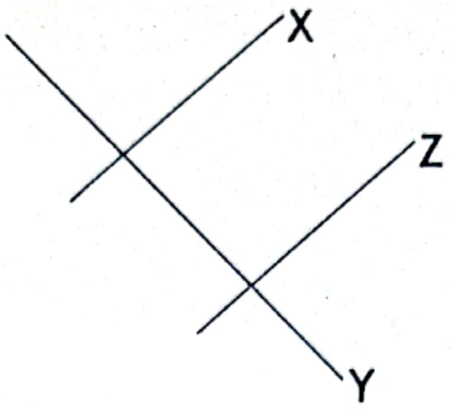
Am stabilit deci

LEMA 8 — *Două drepte perpendiculare pe o a treia sînt paralele.*

Cu alte cuvinte

LEMA 8 — *Pentru orice* $X, Y, Z \in \mathfrak{D}$:

$$X \perp Y \perp Z \Rightarrow X \parallel Z$$



$$X \perp Y \perp Z \Rightarrow X \parallel Z$$

Să strîngem cîteva din rezultatele privind paralelele şi perpendicularele

$$A \parallel B \parallel C \Rightarrow A \parallel C$$
$$A \parallel B \perp C \Rightarrow A \perp C$$
$$A \perp B \parallel C \Rightarrow A \perp C$$
$$A \perp B \perp C \Rightarrow A \parallel C$$

— Enunţaţi teoremele referitoare la aceste formule. Căutaţi-le în carte.

— . . .

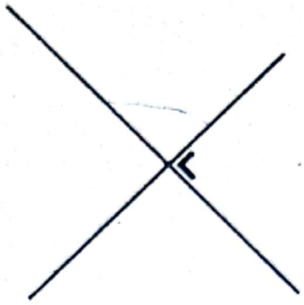
— Dacă dreptele X, Y, Z, T sînt astfel încît

$$X \perp Y \perp Z \perp T$$

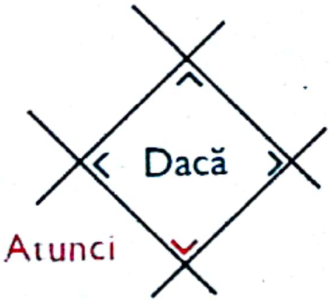
ce puteţi spune despre X şi T?

— $X \perp Y \perp Z \Rightarrow X \parallel Z$
$X \parallel Z \perp T \Rightarrow X \perp T$

S-a stabilit deci formula $\boxed{X \perp Y \perp Z \perp T \Rightarrow X \perp T}$



— Se arată adesea că două drepte A și B sînt perpendiculare punînd pe figură un mic echer ca mai sus



$$X \perp Y \perp Z \perp T \Rightarrow X \perp T$$

EXERCIȚII

1. Notăm informația $X \perp Y \perp Z \perp T$ în tabelul

	X	Y	Z	T	
X		⊥			
Y			⊥		
Z				⊥	
T					

Scanned with OKEN Scanner

Completaţi acest tabel. Explicaţi şi justificaţi fiecare semn pe care-l puneţi.

	X	Y	Z	T	
X	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$	$\perp$	
Y	$\perp$	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$	
Z	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$	$\perp$	
T	$\perp$	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$	

2. Aceeaşi problemă pentru

$$A \perp B \parallel C \parallel D \perp E \perp F \perp G \parallel H \parallel K \perp L$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L	
A	$\parallel$	$\perp$									
B			$\parallel$								
C				$\parallel$							
D					$\perp$						
E						$\perp$					
F							$\perp$				
G								$\parallel$			
H									$\parallel$		
K										$\perp$	
L											

3. Vi se dă o serie de drepte separate prin semnele $\perp$ şi $\parallel$

$$M \parallel P \perp Q \parallel R \parallel S \perp T \perp U \perp V \parallel W \perp X \perp Y \parallel Z$$

Avem desigur $M \parallel Z$ sau $M \perp Z$

Puteţi stabili care din aceste eventualităţi se prezintă numărînd semnele $\perp$ care figurează în serie?

Enunţaţi regula şi justificaţi-o.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

EUCLID
(circa 300 de ani î. e. n.)

Dacă știința și tehnica progresează astăzi într-un ritm mai rapid decît în orice altă perioadă din istoria omenirii nu este totuși cazul să renunțăm la modestie și să ne închipuim că acest lucru s-ar datora unei inteligențe mai ascuțite a omului din zilele noastre.

Odinioară nu existau pe planeta noastră decît cîteva locuri răzlețe unde activitatea era consacrată progresului științei, și chiar acolo știința era rezervată pentru cîțiva privilegiați.

Astăzi învățămîntul se dezvoltă din ce în ce mai mult și pătrunde încetul cu încetul în toate regiunile planetei.

Savanții sînt recrutați astfel dintr-o masă de oameni din ce în ce mai mare și sînt puși imediat, datorită mijloacelor noastre rapide de comunicație, în curent cu descoperirile colegilor lor.

Progresele atît de spectaculoase la care asistăm astăzi nu se datoresc însă exclusiv contemporanilor. Aceștia au primit drept moștenire rezultatele obținute de predecesorii lor.

Axioma lui Euclid pe care am enunțat-o se găsește sub o formă diferită în *Elementele* pe care Euclid le-a scris la Alexandria cu mai bine de 300 de ani î.e.n.

Alexandria, cu neprețuita ei bibliotecă, era la acea epocă unul din foarte rarele focare de cultură.

Nu se cunoaște aproape nimic despre viața lui Euclid, nici data nașterii sale, nici aceea a morții, nici măcar naționalitatea sa.

Lucrarea sa fundamentală, *Elementele*, strînge și sistematizează matematica de bază din această epocă. În ea sînt integrate, într-o formă admirabilă, rezultatele datorate matematicienilor anteriori, ca Tales din Milet (circa 600 de ani î.e.n.), Pitagora din Samos (circa 500 de ani î.e.n.), Eudoxus din Cnidos (circa 400 de ani î.e.n.).

Elementele lui Euclid s-au bucurat de un succes imens. Ele au avut mai mult de 1000 de ediții tipărite și numeroase ediții manuscrise.

Anumite pasaje din cărțile de geometrie de care se foloseau părinții voștri au reprodus aproape literal textul lui Euclid.

7

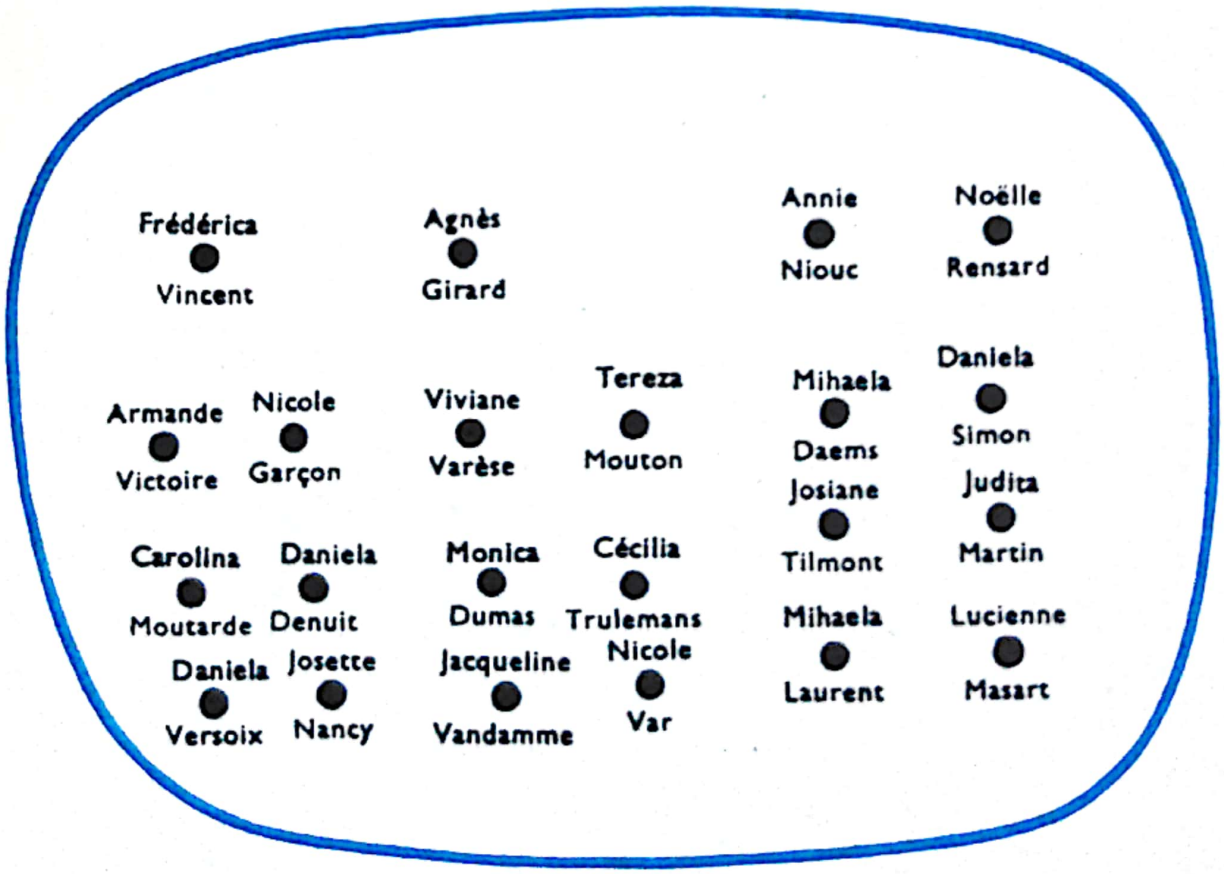
Relaţii

1 — JOCUL « PRENUME/NUME »

Fiecărei eleve din clasa noastră i s-a cerut să arate pe orice elevă din clasa noastră al cărei nume începe cu aceeaşi literă cu care începe prenumele ei.

Astfel Mihaela Daems o va arăta pe Theresa Mouton.
Mihaela Daems o va arăta pe Judith Martin.
Mihaela Daems o va arăta pe Carolina Moutarde.
Daniela Denuit o va arăta pe Monica Dumas.
Daniela Denuit o va arăta pe Mihaela Daems.
Daniela Denuit o va arăta pe Daniela Denuit.

În loc să completăm această înşiruire plictisitoare, să descriem situaţia ivită printr-un desen, să reprezentăm pe fiecare elevă din clasa noastră printr-un punct.



Scanned with OKEN Scanner

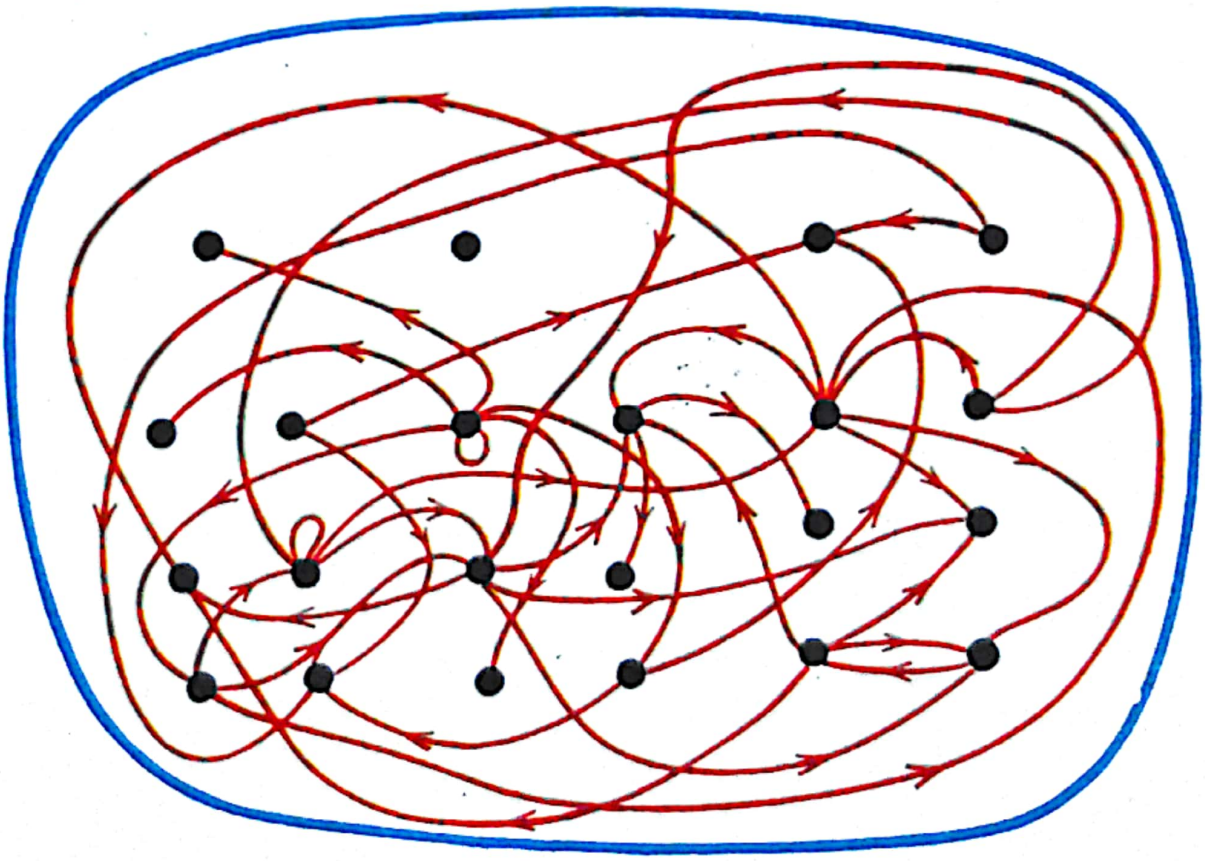
Ori de cîte ori o elevă *a* trebuie să arate pe o elevă *b*, trageți o săgeată care merge de la *a* spre *b*.

Anumite eleve, ca Daniela Denuit, trebuie să se arate pe ele singure. În acest din urmă caz săgeata nu este necesară: o buclă este suficientă.

Va fi comod să numim această buclă «o săgeată care merge de la *c* spre *c*"».

Spuneți de ce în cazul punctelor *a* și *b* distincte eram obligați să tragem o săgeată.

Începeți să lucrați: veți obține în cele din urmă **graficul** de mai jos.



GRAFICUL 1

Acest grafic reprezintă o relație în mulțimea elevelor din clasa noastră.

Cînd o săgeată pleacă din a și ajunge în b vom spune că perechea (a, b) este un element al relației.

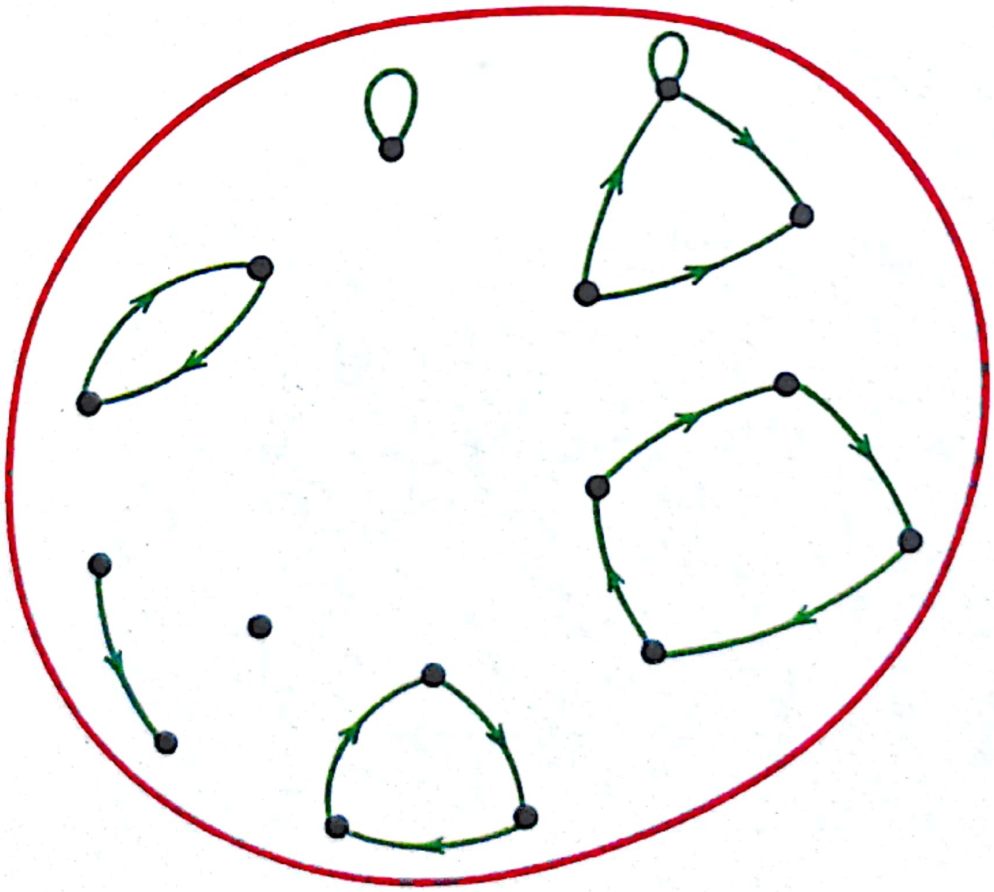
O pereche ca (a, a) se numește *pereche identică*.

DEFINIȚIE — ***Se numește relație orice mulțime de perechi.***

Întrucît este suficient să se indice o singură dată că perechea (a, b) aparține relației, *nu se va desena niciodată mai mult de o săgeată de la a spre b (pe același grafic)*.

EXERCIȚII

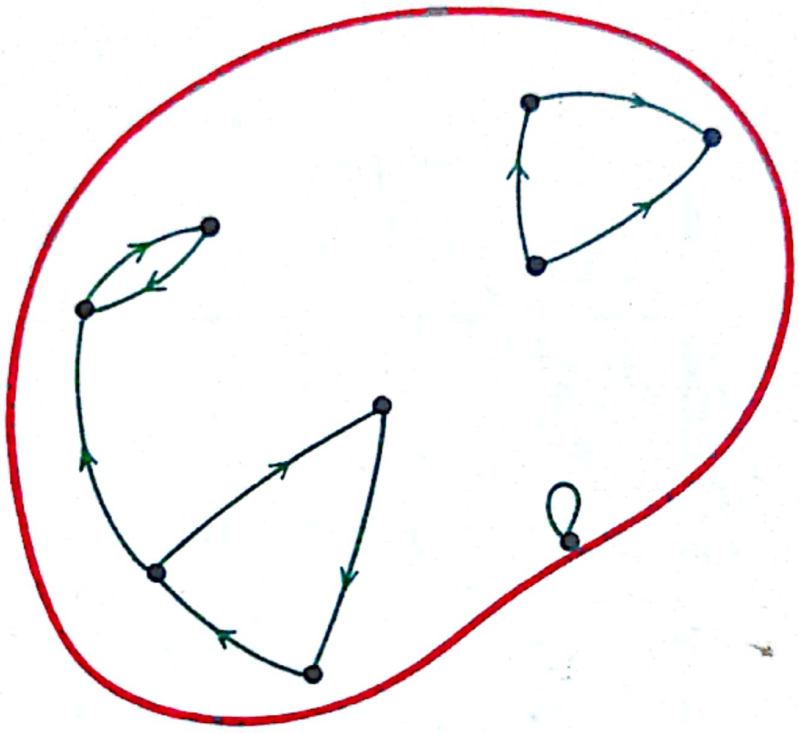
1. Același joc a fost propus altor clase. Într-una din ele, am obținut următorul grafic ciudat. Închipuiți-vă pentru aceste eleve nume *compatibile* cu graficul nostru.



GRAFICUL 2

Scanned with OKEN Scanner

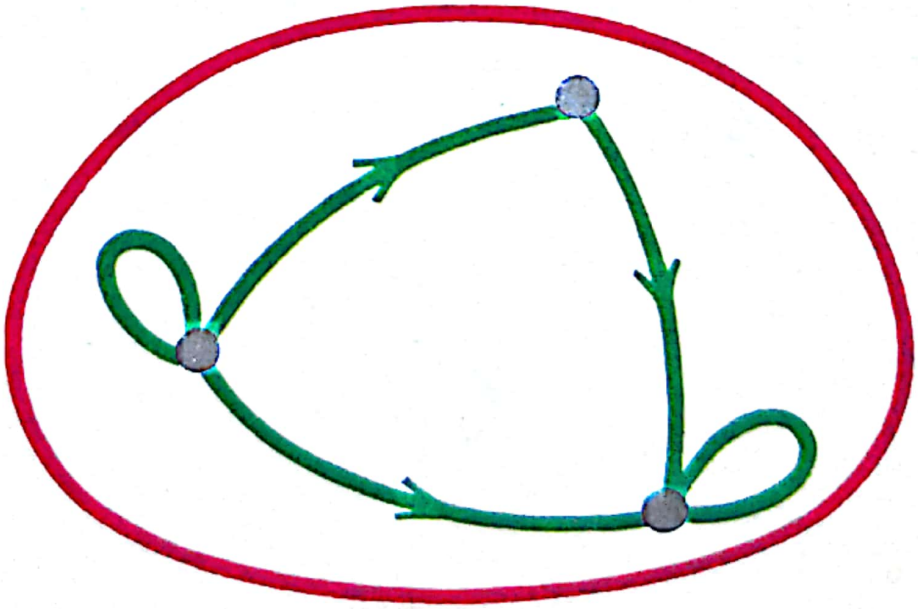
2. Cîțiva elevi au luat parte la jocul nostru. Ei dau graficul de mai jos unui profesor care nu-i cunoaște.



GRAFICUL 3

După un examen de mai puțin de o jumătate de secundă, profesorul a declarat: «acest grafic este greșit». Și totuși el nu știe numele elevilor. Cum este posibil?

3. Soneria a întrerupt desenarea graficului aceleiași relații într-una din clasele noastre. Iată un fragment din graficul neterminat.



GRAFICUL 4

Fără să cunoașteți numele elevilor, puteți completa acest fragment. Justificați fiecare linie nouă.

Scanned with OKEN Scanner

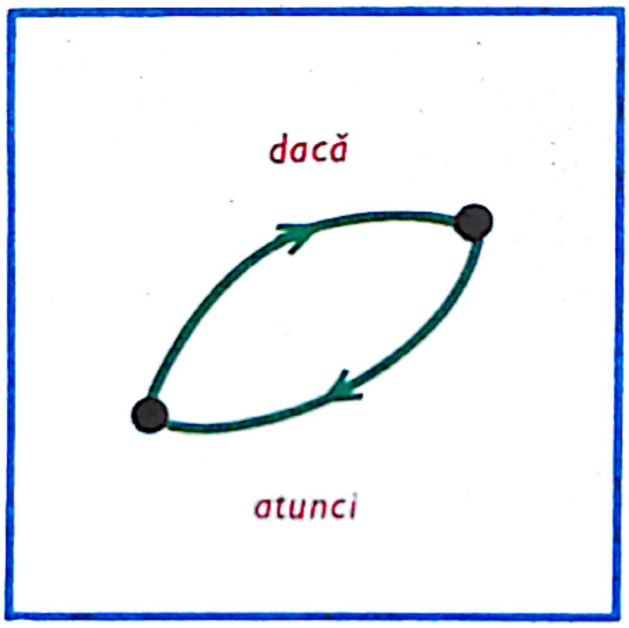
2. — JOCUL « PRENUME/PRENUME »

— Graficul jocului analog « prenume/prenume » este mai ușor de trasat !

— De ce?

— În acest nou grafic, ori de cîte ori se desenează o săgeată de la *a* spre *b*, trebuie să se deseneze și o săgeată de la *b* spre *a*.

Vom indica pe scurt acest lucru prin



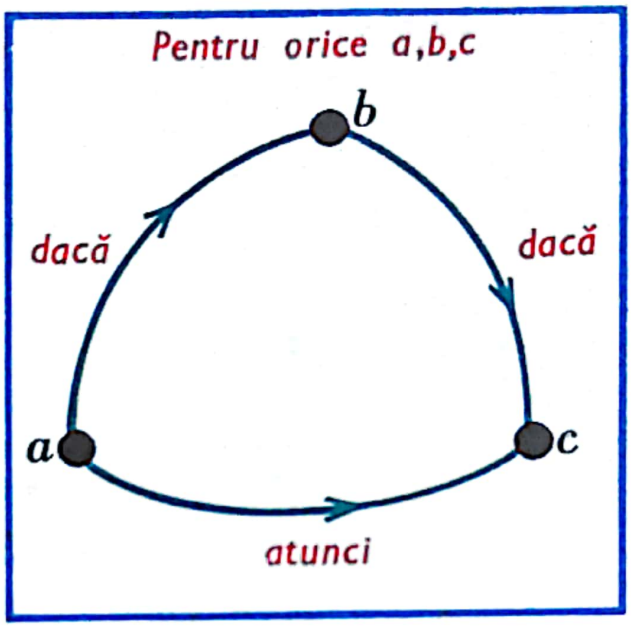
— În orice punct al noului grafic trebuie să se deseneze o buclă.

Vom indica pe scurt acest lucru prin

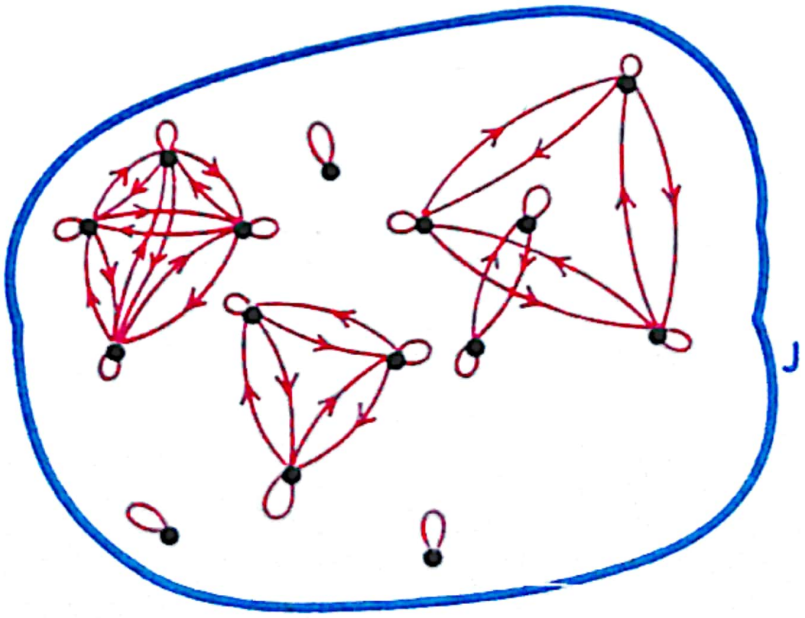
Scanned with OKEN Scanner

— În noul grafic, dacă o săgeată merge de la *a* spre *b* și o săgeată de la *b* spre *c*, trebuie să se deseneze o săgeată de la *a* spre *c*.

Vom exprima pe scurt acest lucru prin



— Să desenăm un grafic care să poată descrie relația P ce definește jocul « prenume/prenume » într-o mulțime J de jucători.



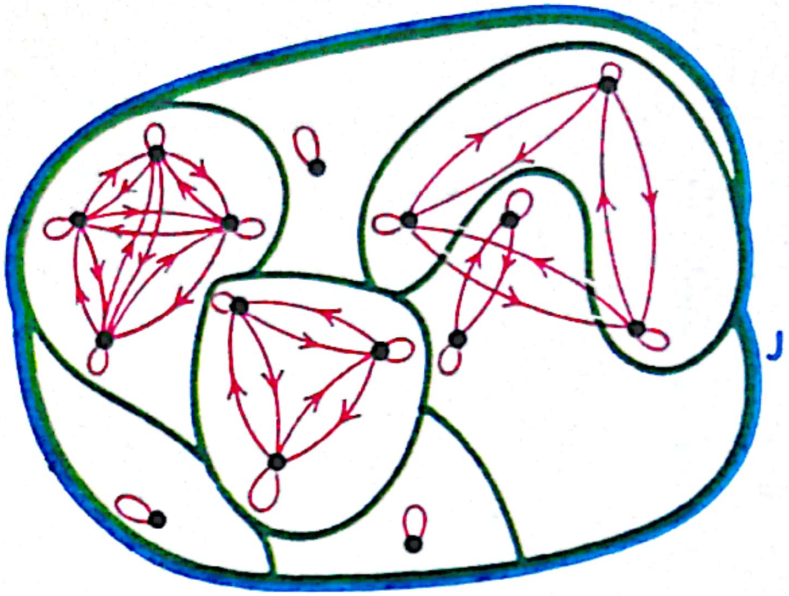
RELAȚIA P :

. . . un prenume care începe cu aceeași literă ca prenumele lui . . .

GRAFICUL 5

Scanned with OKEN Scanner

Acest grafic arată o diviziune a mulțimii J a jucătorilor. Fiecare din clasele diviziunii cuprinde pe toți jucătorii al căror prenume începe cu aceeași literă.

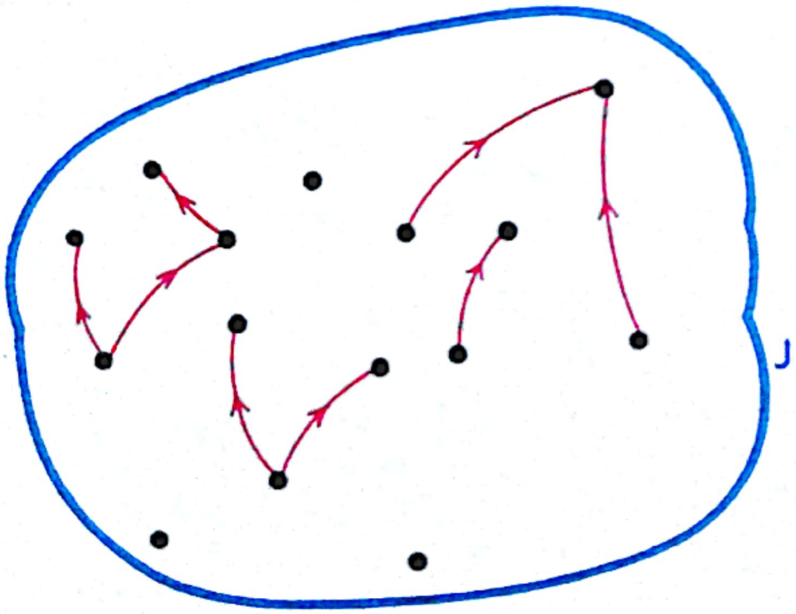


RELAȚIA P ȘI *DIVIZIUNEA LUI* J PE CARE O DEFINEȘTE

GRAFICUL 6

EXERCIȚII

1. Justificați afirmațiile raportate în acest paragraf.
2. Cîțiva copii au jucat jocul «prenume/prenume». Ei au lăsat pe tablă următorul grafic neterminat.



GRAFICUL 7

Ce săgeți (și bucle) trebuie să fie *neapărat* adăugate?

Scanned with OKEN Scanner

3. Să notăm cu A mulțimea elevelor din clasa ta, al căror prenume începe cu *a*.
La fel definim pe B, C, D, E, F, . . . W, X, Y, Z.
Mă încumet să pariez că mulțimea de 26 elemente

{A, B, C, D, E, F, . . . W, X, Y, Z}

nu este o diviziune a mulțimii elevelor din clasa ta.
De ce?

3 — RELAȚIA . . . ARE CA SORĂ . . . ÎNTR-O MULȚIME DE FETE ȘI BĂIEȚI

Desenați un grafic care să poată fi cel al relației

. . . are ca soră . . .

într-o mulțime de fete și băieți.

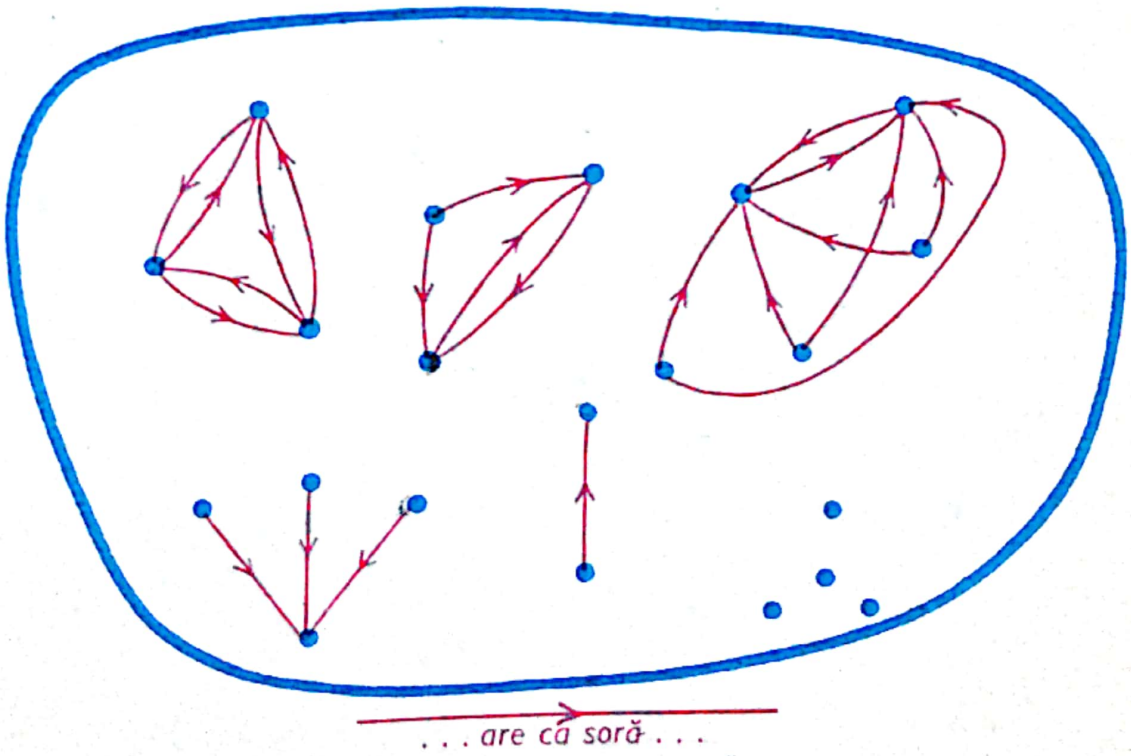
Acest grafic poate prezenta bucle?

Dacă o săgeată merge de la *a* spre *b*, avem totdeauna o săgeată de la *b* spre *a*?

Dacă o săgeată merge de la *a* spre *b*, iar alta de la *b* spre *c*, avem totdeauna o săgeată de la *a* spre *c*?

În special, dacă avem o săgeată de la *a* spre *b* și una de la *b* spre *a*, vom avea una de la *a* spre *a*?

Pot pleca mai multe săgeți din același punct sau pot ajunge în același punct?



ÎNTR-O MULȚIME DE FETE ȘI BĂIEȚI

GRAFICUL 8

Puteți determina sexul copiilor reprezentați prin puncte din care pleacă sau în care ajunge cel puțin o săgeată.

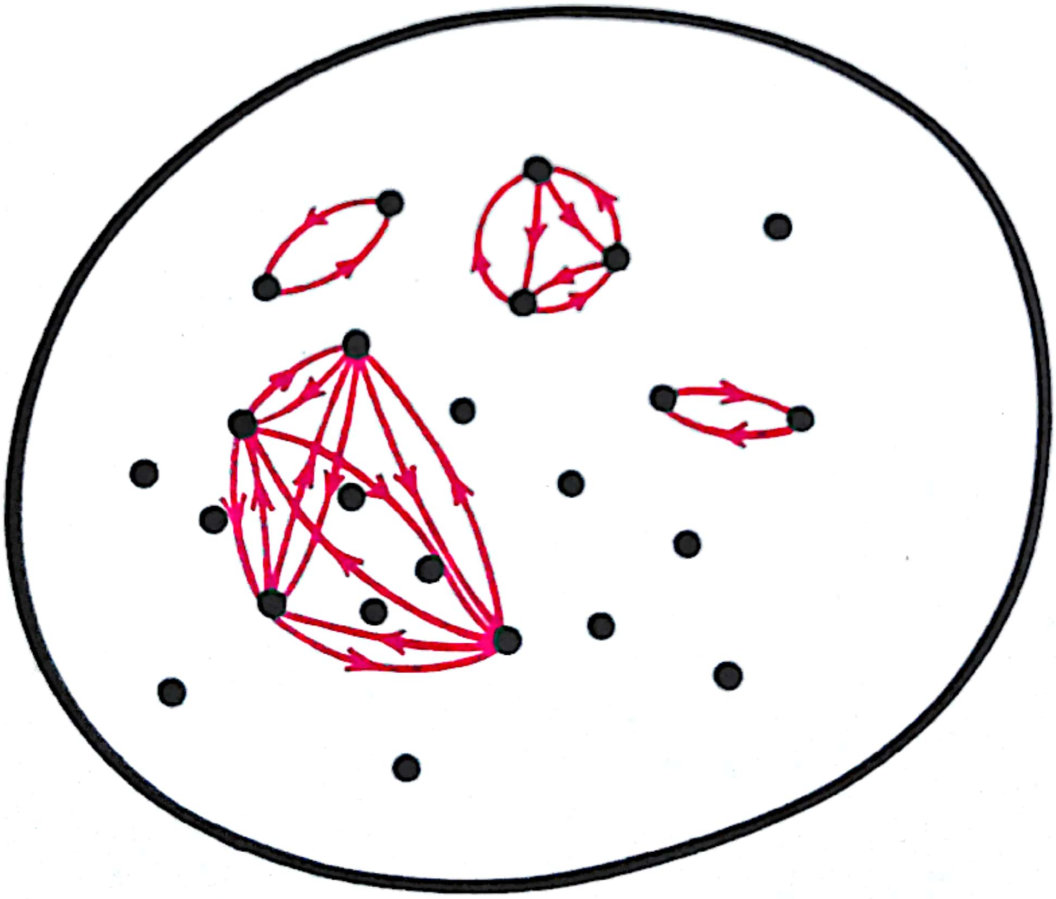
Cum?

4 — RELAȚIA . . ARE CA SORĂ . . .
ÎNTR-O MULȚIME DE FETE

Desenați un grafic care să poată fi cel al relației . . . *are ca soră* . . . într-o mulțime de fete.

Dacă o săgeată merge de la *a* spre *b*, trebuie să avem o săgeată de la *b* spre *a*?

Iată un grafic care răspunde la această întrebare.



. . . are ca soră . . .

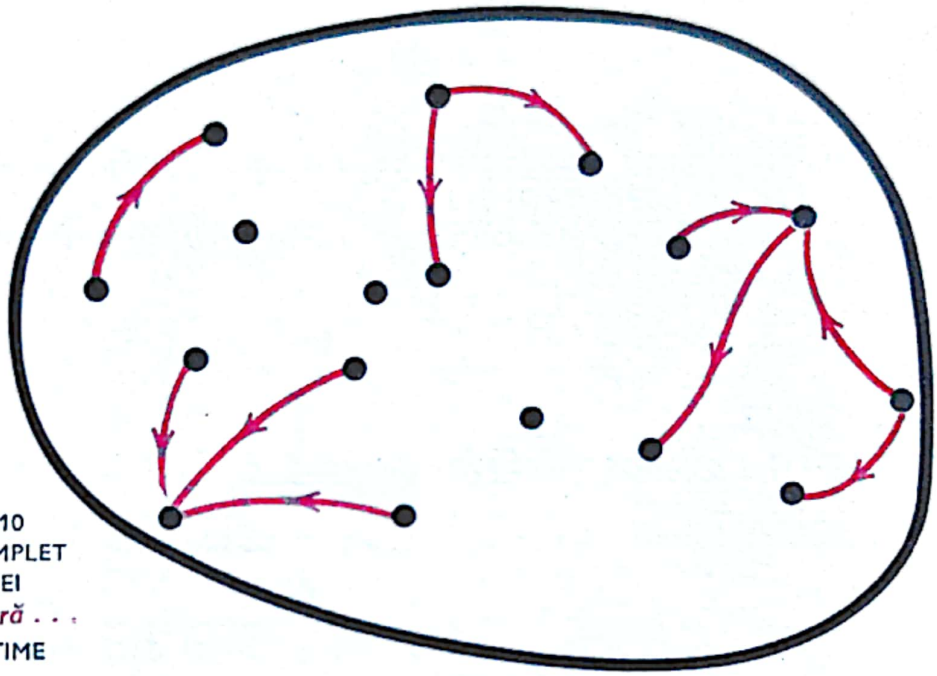
(ÎNTR-O MULȚIME DE FETE)

GRAFICUL 9

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚIU

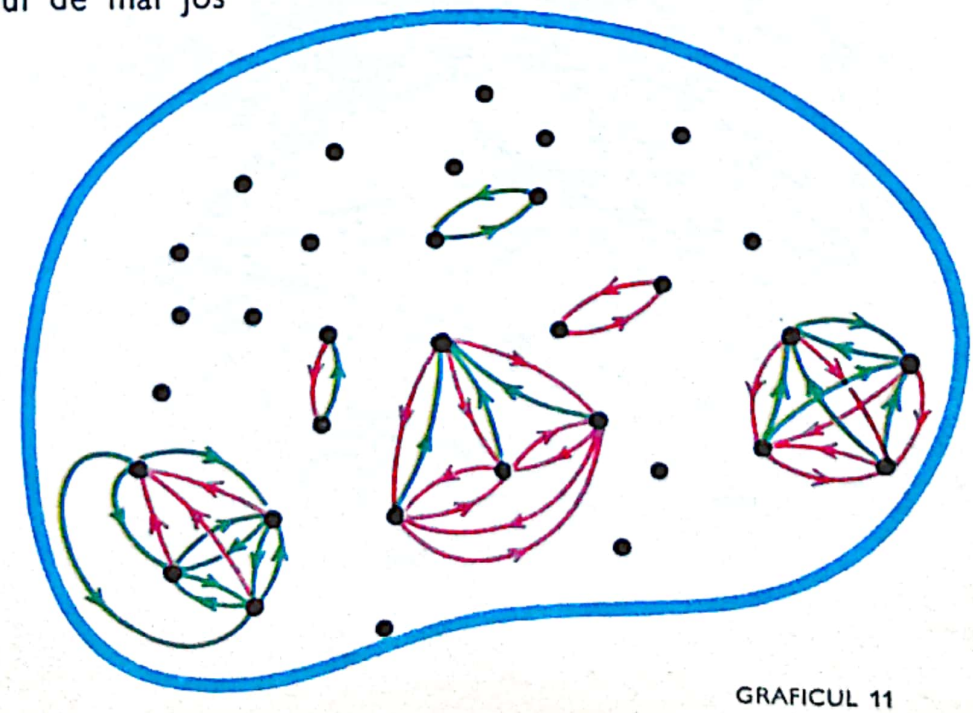
Ni se prezintă graficul de mai jos ca fiind cel al relației . . . *are ca soră* . . . într-o mulțime de fete. Desenați săgețile pe care autorul desenului a uitat *cu siguranță* să le deseneze.



GRAFICUL 10
GRAFIC INCOMPLET AL RELAȚIEI
. . . *are ca soră* . . .
ÎNTR-O MULȚIME DE FETE.

5 — RELAȚIA . . . ARE CA FRATE SAU SORĂ . . .

Relația . . . *are ca frate* . . . și relația . . . *are ca soră* . . . sînt reprezentate pe desenul de mai jos



GRAFICUL 11

Dacă se consideră simultan săgețile roșii și verzi, se obține graficul relației *. . . are ca frate sau soră . . .*

Această relație este *reuniunea* celor precedente.

EXERCIȚIU

Pe grafic nu există nici o buclă; de ce?

Dacă o săgeată roșie sau verde merge de la a spre b, există o săgeată roșie sau verde care merge de la b spre a; de ce?

Toate săgețile care ajung într-un punct au aceeași culoare; de ce?

Faceți alte observații.

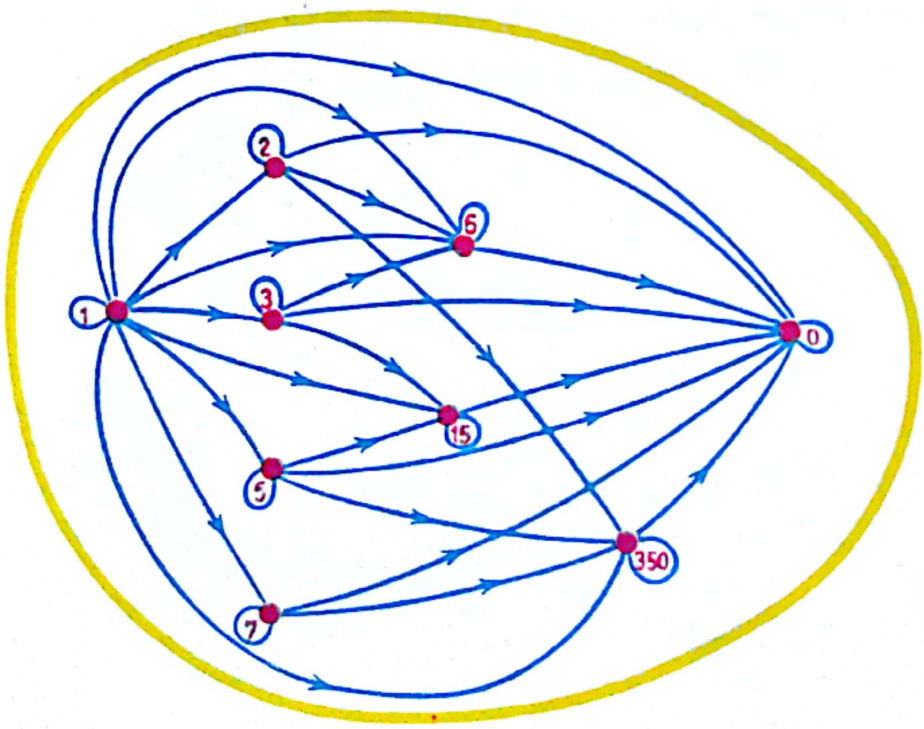
6 — RELAȚIA ... DIVIDE... ÎNTR-O MULȚIME DE NUMERE ÎNTREGI NATURALE

Să reamintim că mulțimea numerelor întregi naturale este

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, . .\}$$

Se spune că a divide pe b și se scrie $a|b$ dacă și numai dacă există un număr întreg natural q, astfel încît $b = aq$. Astfel:

$2\|6$	deoarece $6 = 2.3$	$1\|a$	deoarece $a = a.1$
$7\|7$	deoarece $7 = 7.1$	$a\|0$	deoarece $0 = a.0$
$9\|0$	deoarece $0 = 9.0$	$a\|a$	deoarece $a = a.1$



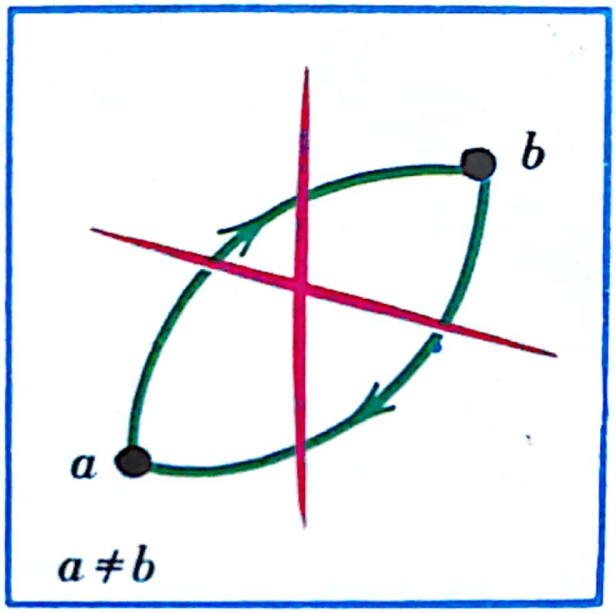
GRAFICUL 12

RELAȚIA | ÎN MULȚIMEA {1, 2, 3, 5, 7, 6, 15, 350, 0}

Graficul relației | prezintă o buclă în fiecare din punctele sale.

Dacă a și b sînt puncte *distincte*, nu putem avea în același timp o săgeată care merge de la a spre b și o săgeată « inversă » de la b spre a.

Exprimăm pe scurt acest lucru prin



ÎNTRE DOUĂ PUNCTE DISTINCTE NU EXISTĂ NICIODATĂ UN DUS-ÎNTORS

Oricare ar fi a, b, c,

$(a \mid b$ și $b \mid c)$ conduce la $a \mid c$.

Dacă o săgeată merge de la a spre b și alta de la b spre c, există o săgeată care merge de la a spre c.

EXERCIȚII

1. Întocmiți un grafic al relației | în

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 15, 25, 900\}$$

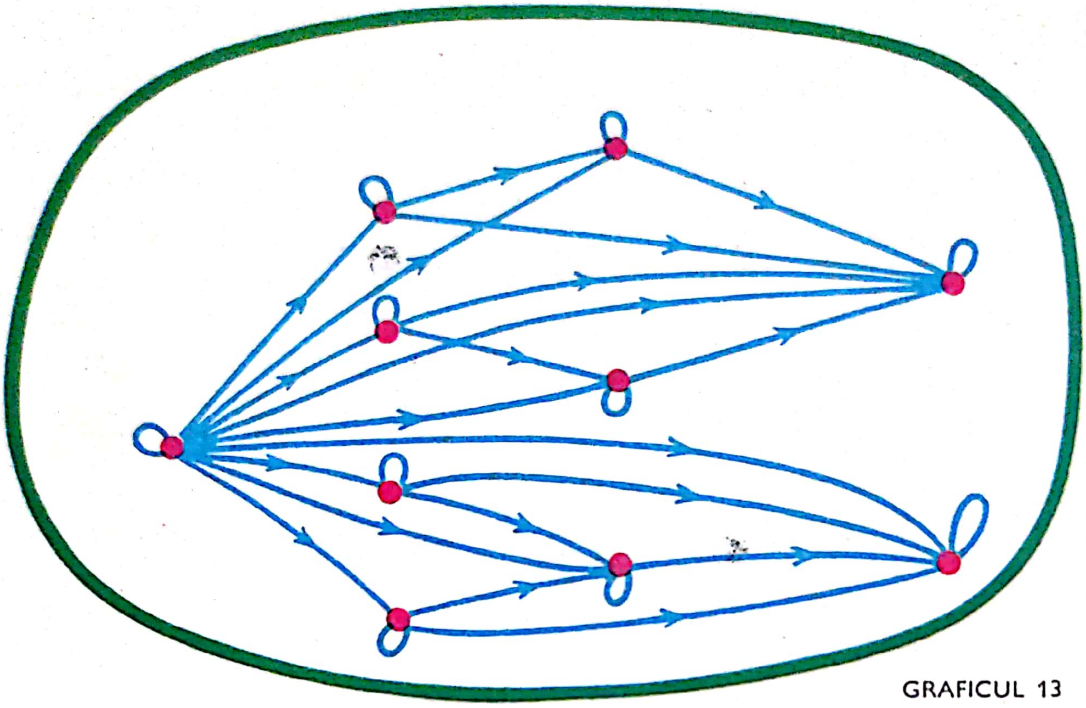
Pe același desen, trasați graficul relației

... este multiplu de ...

Cum ați procedat?

Scanned with OKEN Scanner

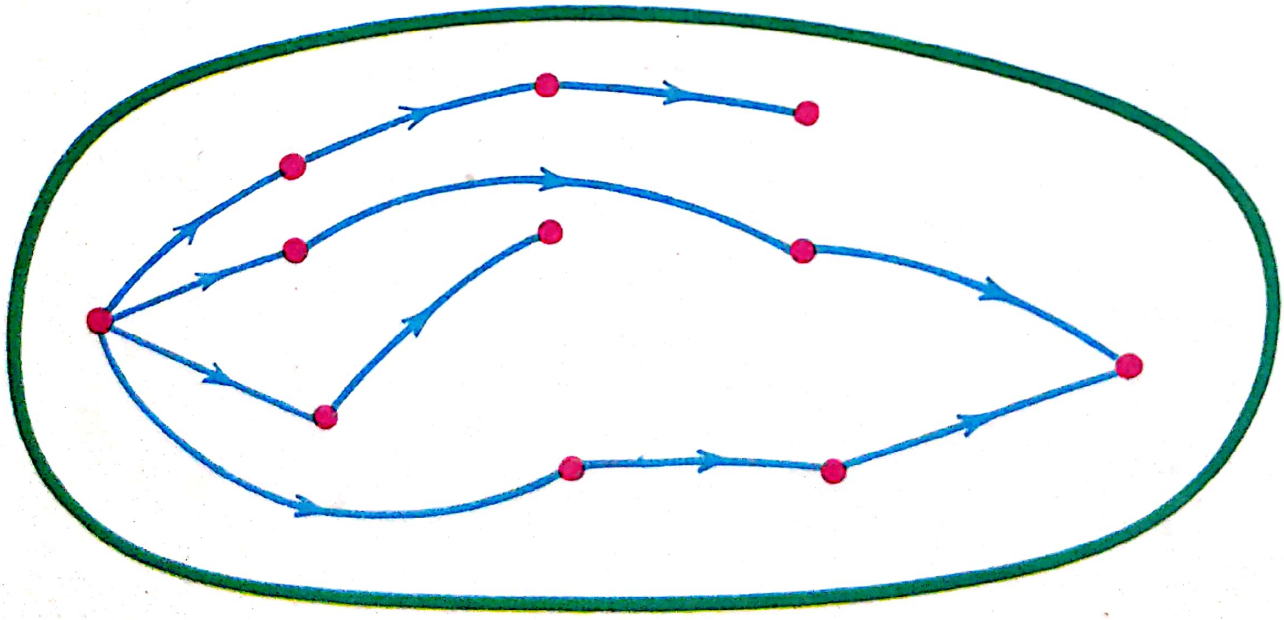
2. Puneți numere în fiecare din punctele graficului 13, astfel încît să faceți din el un grafic al relației |.



GRAFICUL 13

Dați alte soluții acestei probleme.
Ați putea indica unul sau mai multe procedee care să permită găsirea unor noi soluții pentru această problemă pe baza unei soluții date?

3. S-a schițat graficul relației | într-o mulțime de numere naturale întregi.



GRAFICUL 14

Care sînt săgețile ce vor trebui trase în mod sigur în acest grafic?

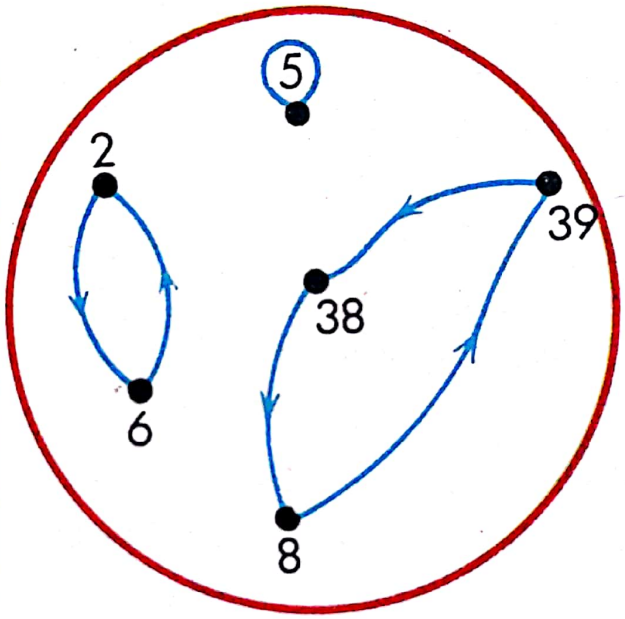
Scanned with OKEN Scanner

4. Știm că **o relație este o mulțime de perechi.**

Se cere să se scrie relația | în {1, 2, 3, 5, 7, 6, 15, 350, 0} ca mulțime de perechi.

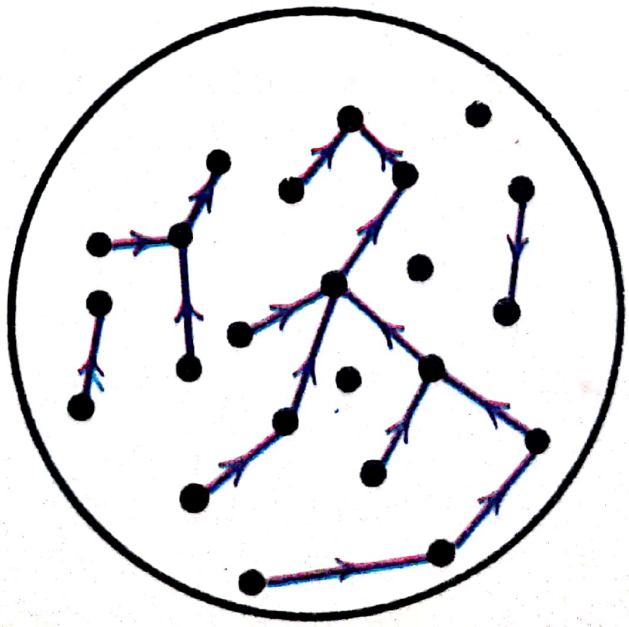
Răspuns: {(1,1), (1,2), (1,3), (1,5), (1,7), (1,6), (1,15), (1,350), (1,0), (2,2), (2,6), (2,350), (2,0), (3,3), (3,6), (3,15), (3,0), (5,5), (5,15), (5,350), (5,0), (7,7), (7,350), (7,0), (6,6), (6,0), (15,15), (15,0), (350,350), (350,0), (0,0)}

5. Desenați graficul relației
{(5,5), (6,2), (2,6), (38,8), (39,38), (8,39)}



GRAFICUL 15

7 — RELAȚIA . . . ARE CA TATĂ . . .



GRAFICUL 16

Scanned with OKEN Scanner

În acest grafic

1. Din fiecare punct pleacă cel mult o săgeată.
2. Nici o buclă.
3. Dacă o săgeată merge de la a spre b, nu există nici o săgeată de la b spre a !
4. Dacă o săgeată merge de la a spre b, iar o săgeată de la b spre c, nu există nici o săgeată de la a spre c !

EXERCIȚII

1. Justificați observațiile precedente.

2. Pe graficul 16 indicați persoanele care sînt în mod sigur de sex masculin. Arătați doi frați; o persoană și pe bunicul ei din partea tatălui; o persoană și pe unchiul ei; o persoană și pe unul din străbunicii ei.

3. Reproduceți graficul de mai sus. Trasați cu verde o săgeată de la a spre b ori de cîte ori avem una mov de la b spre a. Obțineți astfel cu verde graficul relației . . . *este tatăl lui* . . .

8 — O RELAȚIE ÎN MULȚIMEA Z A NUMERELOR ÎNTREGI [1]

$$Z = \{0,1, -1,2, -2,3, -3, \ldots\}$$

este mulțimea numerelor întregi.

Mulțimea perechilor

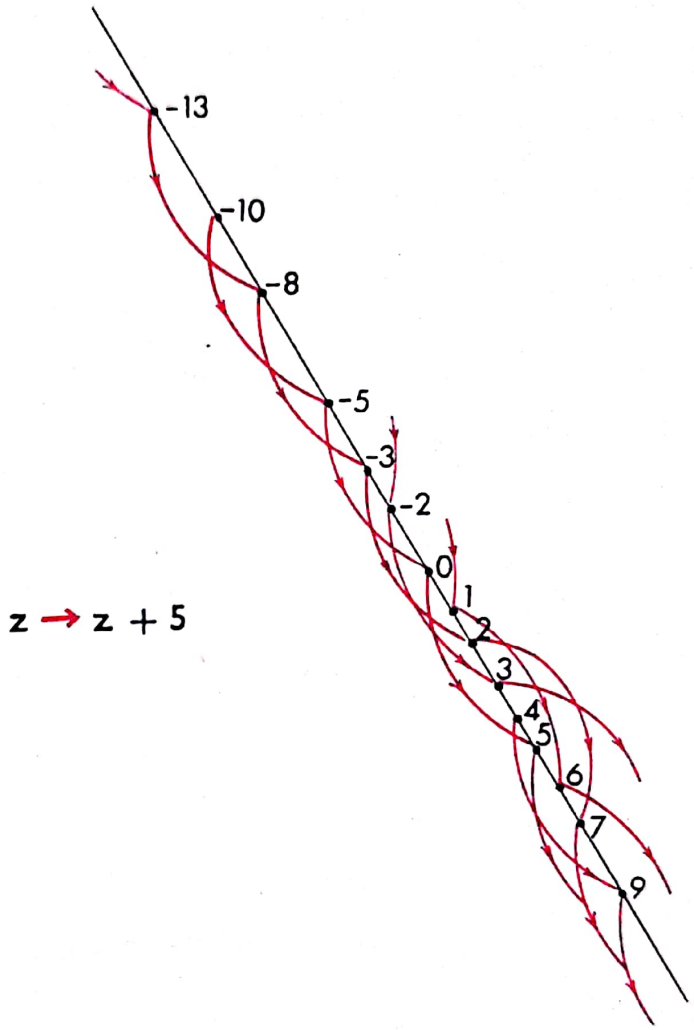
$$\mathcal{C} = \{(0,5),\ (1,6),\ (-1,4),\ (2,7),\ (-2,3),\ (3,8),\ (-3,2), \ldots\}$$

este o relație în Z.

Graficul acestei relații ar trebui să se obțină trasînd o săgeată de la orice $z \in Z$ spre $z + 5$.

[1] În acest paragraf mulțimea Z este considerată ca o mulțime dată.

Nu putem reprezenta simultan toate numerele întregi prin puncte pe desen. Ne limităm să însemnăm pe el numai unele. Se vor indica săgețile care se referă numai la aceste puncte.



GRAFICUL 17

În orice punct al lui Z ajunge și pleacă o singură săgeată a relației și numai una.

Exprimăm pe scurt acest lucru spunînd că relația considerată este o **permutare** a lui **Z**.

EXERCIȚIU

S-ar fi putut nota relația $\mathfrak{C}$ de mai sus scriind

$$\mathfrak{C} = \{(z, z+5) \mid z \in Z\}$$

9 — O PERMUTARE ÎNTR-O MULȚIME DE ELEVE

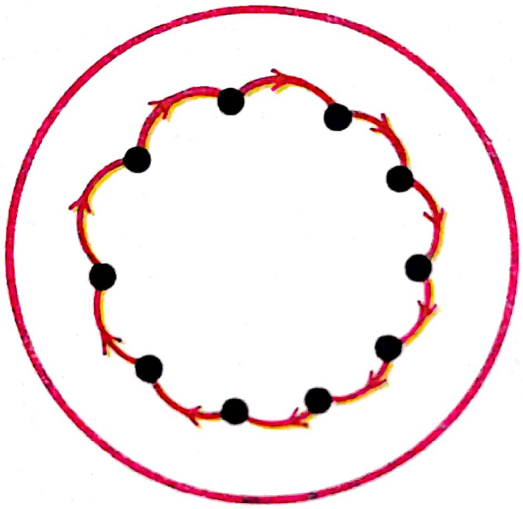
Iată o mulțime de 10 eleve care au nume diferite. Se scriu numele pe cartonașe, care se amestecă în felul cărților de joc. Se distribuie cartonașele elevelor (fiecare elevă primește un singur cartonaș).

Se cere fiecărei eleve să apuce cu mîna *dreaptă* mîna *stîngă* a elevei al cărei nume figurează pe cartonașul pe care-l posedă ea.

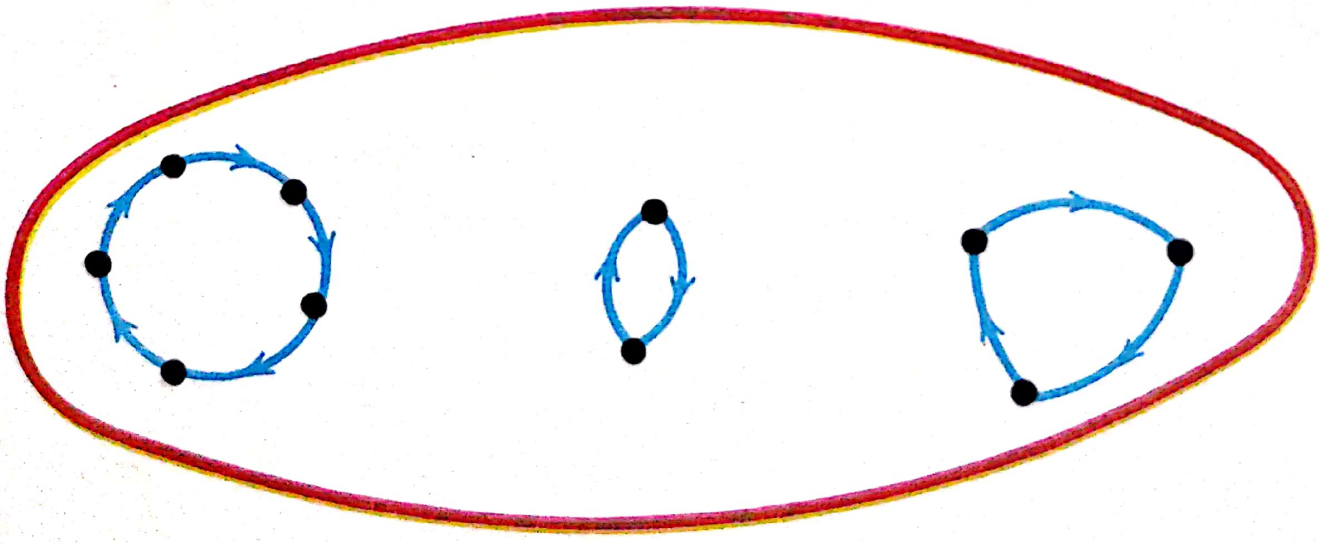
Putem reprezenta grafic relația . . . *apucă cu mîna sa dreaptă mîna stîngă a* . . . Această relație este o **permutare.**

După distribuția cartonașelor, graficul poate lua aspecte foarte diferite. Desenăm cîteva din ele.

Vreți să comentați aceste situații?

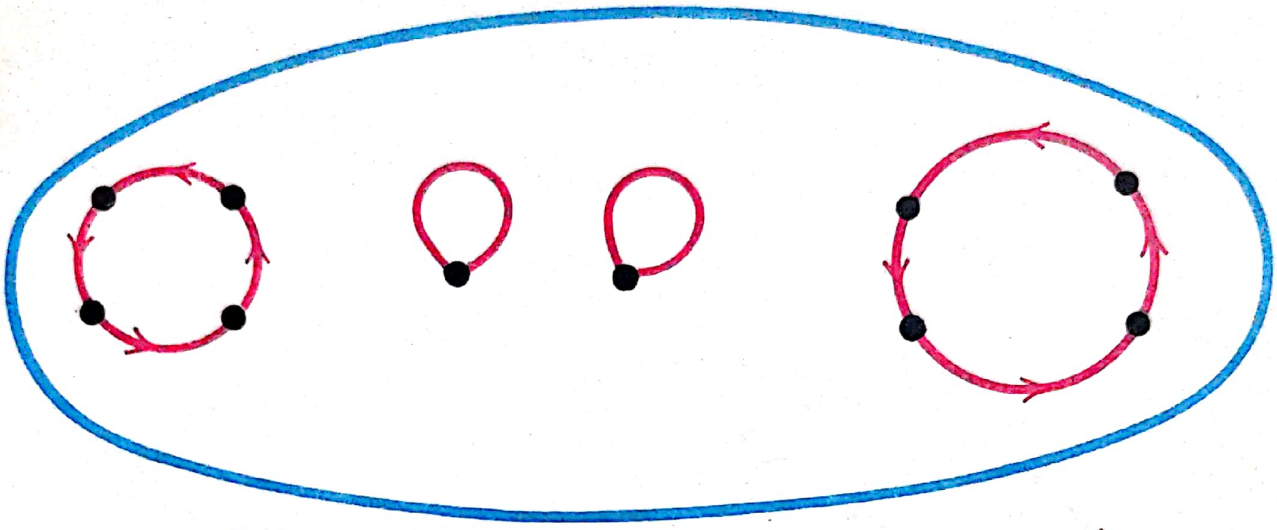


GRAFICUL 18

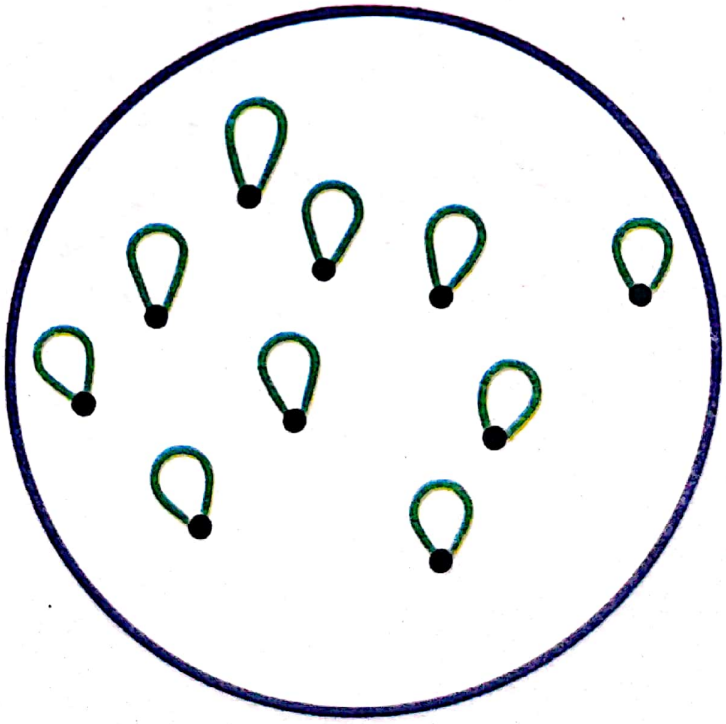


GRAFICUL 19

Scanned with OKEN Scanner



GRAFICUL 20



GRAFICUL 21

Scanned with OKEN Scanner

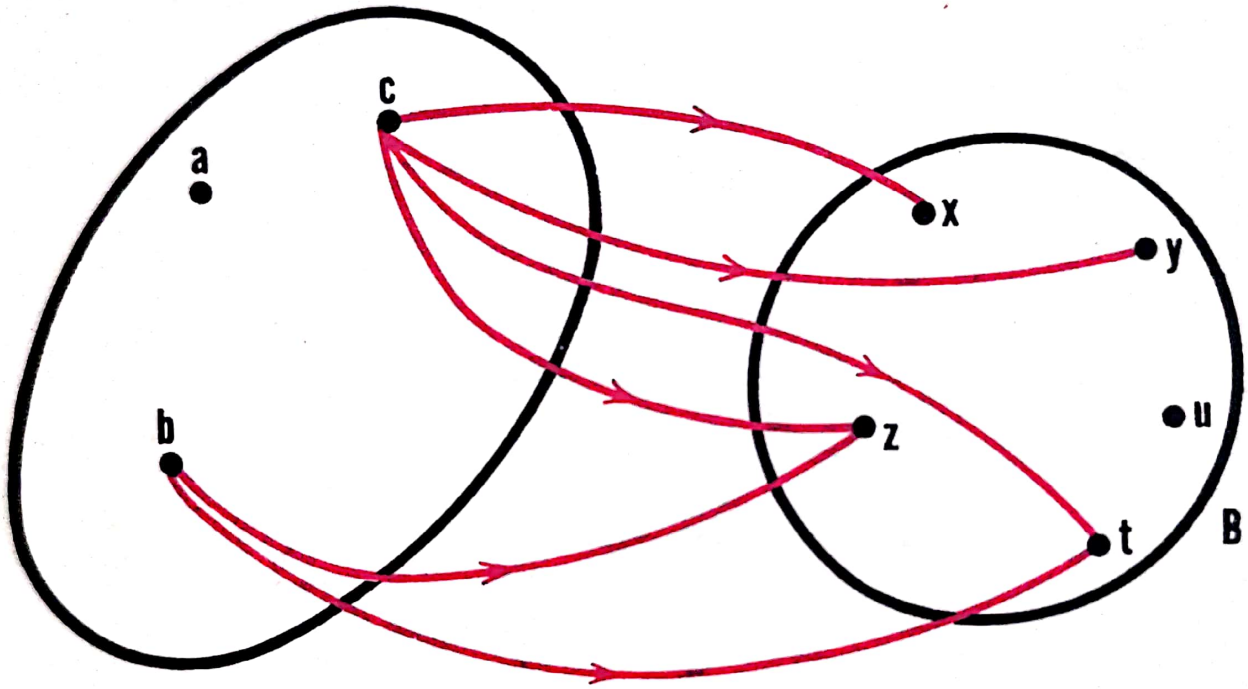
10 — RELAȚIA DE LA A SPRE B — PRODUSUL A × B

Să notăm cu A și B două mulțimi de eleve din clasa noastră. Să cerem fiecărei eleve, element al mulțimii A, *să arate* pe orice elevă din mulțimea B care este mai mare decît ea.

Se spune că relația astfel definită este o **relație de la A spre B.**

Să o reprezentăm printr-un grafic, considerînd diferite eventualități.

1. *Mulțimile A și B sînt disjuncte.*



RELAȚIA DE LA A SPRE B

GRAFICUL 22

EXERCIȚIU

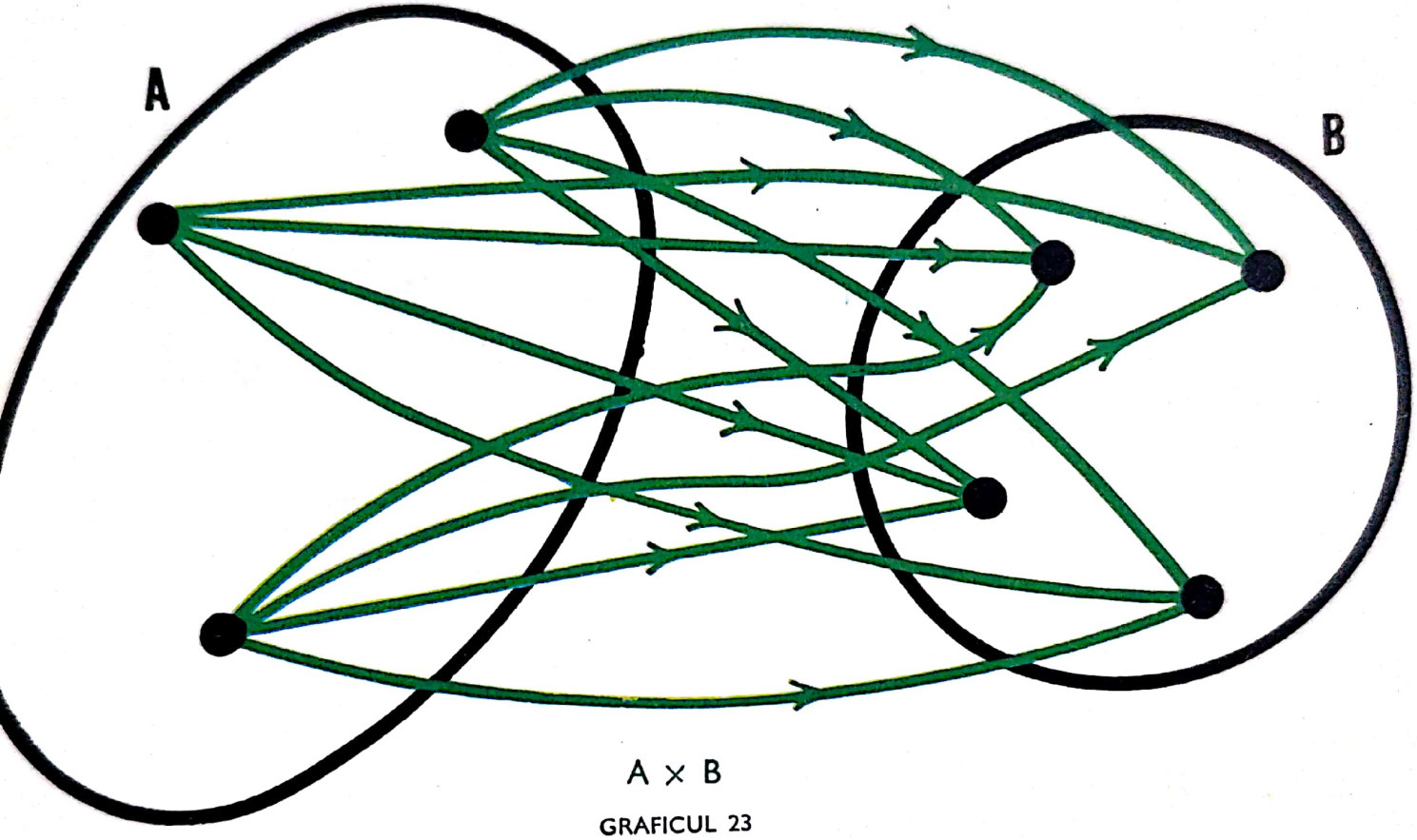
Clasați în ordinea înălțimii pe elevele a, b, c, u, x, z.

Scanned with OKEN Scanner

2. *Mulțimile A, B sînt disjuncte și orice elevă din mulțimea A este mai mică decît orice elevă din B.*

De data aceasta, din orice punct al lui A pleacă o săgeată către fiecare din punctele lui B.

Relația obținută este numită **produsul lui A și B** și este notată A × B.



A × B

GRAFICUL 23

Deci avem

$$\{a, b, c\} \times \{x, y, z, t\} = \{(a, x),\ (a, y),\ (a, z),\ (a, t),\ (b, x),\ (b, y),\ (b, z),\ (b, t),\ (c, x),\ (c, y),\ (c, z),\ (c, t)\}$$

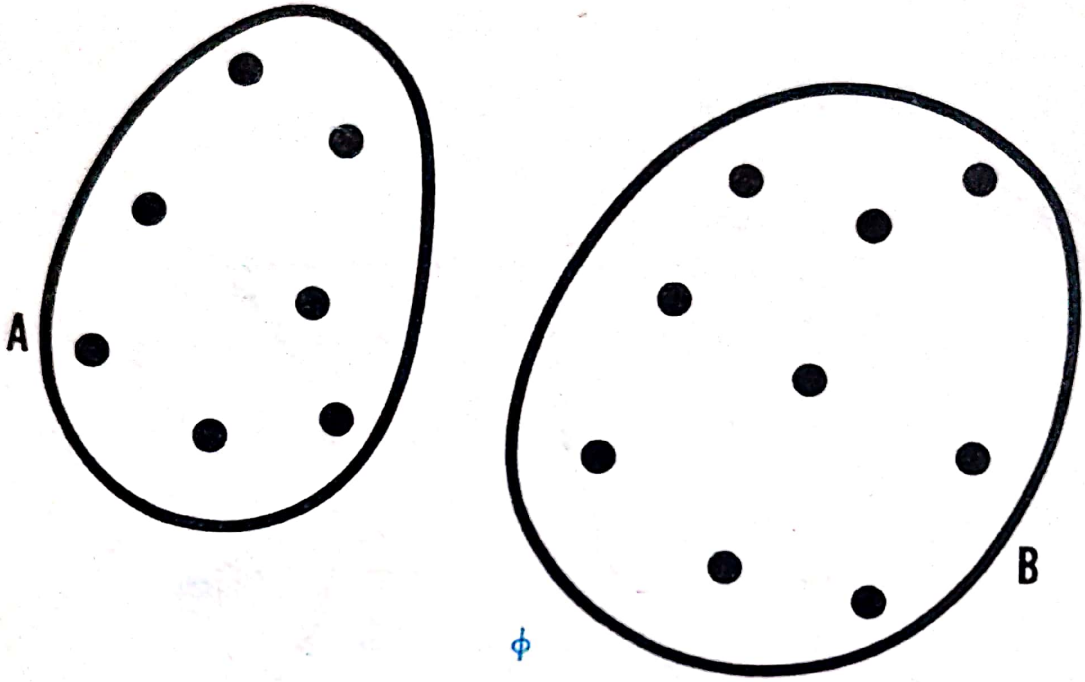
Produsul A × B este mulțimea perechilor (a, b) cu a ∈ A și b ∈ B

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Scanned with OKEN Scanner

3. *Mulțimile A și B sînt disjuncte și nici o elevă din B nu este mai mare decît o elevă din A.*

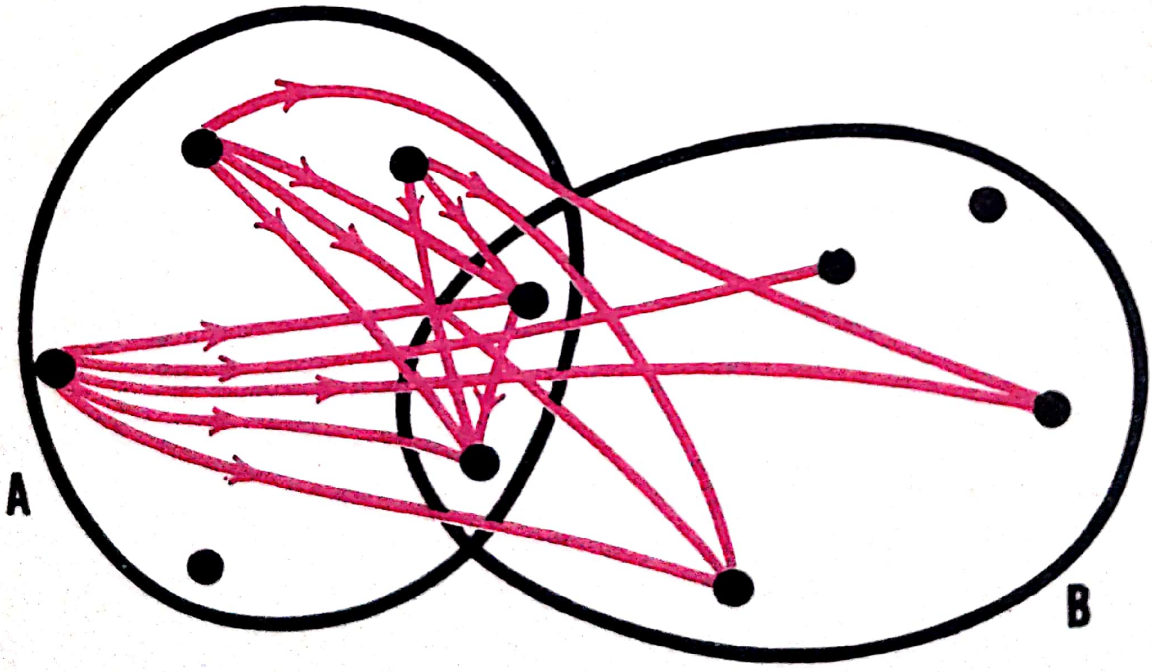
De data aceasta sarcina noastră este ușoară : nici o săgeată nu trebuie să fie trasă. *Relația obținută este vidă.*



O RELAȚIE DE LA A SPRE B : RELAȚIA VIDĂ

GRAFICUL 24

4. *Mulțimile A și B nu sînt disjuncte.*

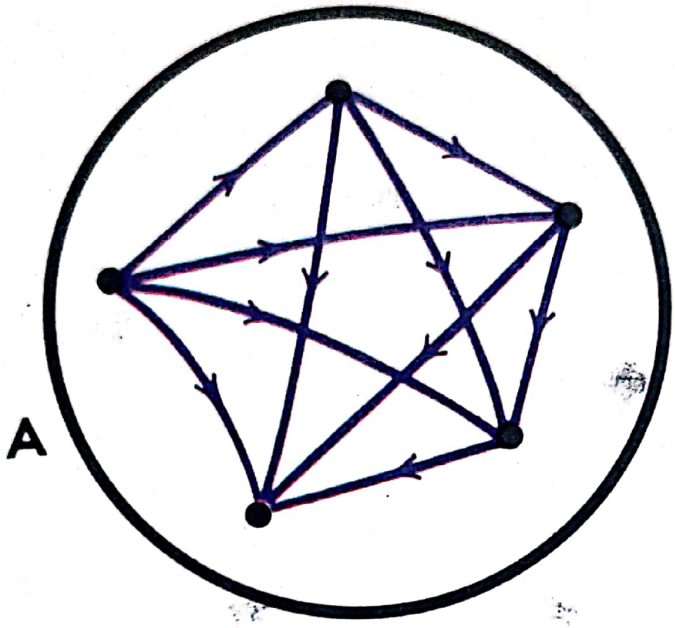


O RELAȚIE DE LA A SPRE B

GRAFICUL 25

Scanned with OKEN Scanner

5. Dacă A = B vom avea o **relație în A.**



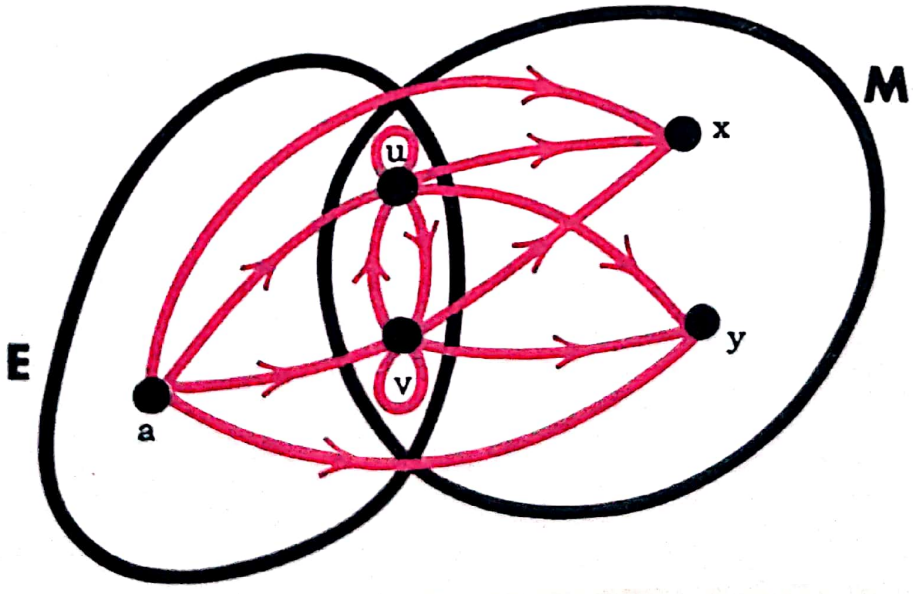
GRAFICUL 26

O RELAȚIE ÎN A

EXERCIȚII

1. Fie $E = \{a, u, v\}$ și $M = \{x, y, u, v\}$
Definiți $E \times M$ sintetic și reprezentați $E \times M$ printr-un grafic.

$$E \times M = \{(a, u), (a, v), (a, x), (a, y),$$
$$(u, u), (u, v), (u, x), (u, y),$$
$$(v, u), (v, v), (v, x), (v, y)\}$$

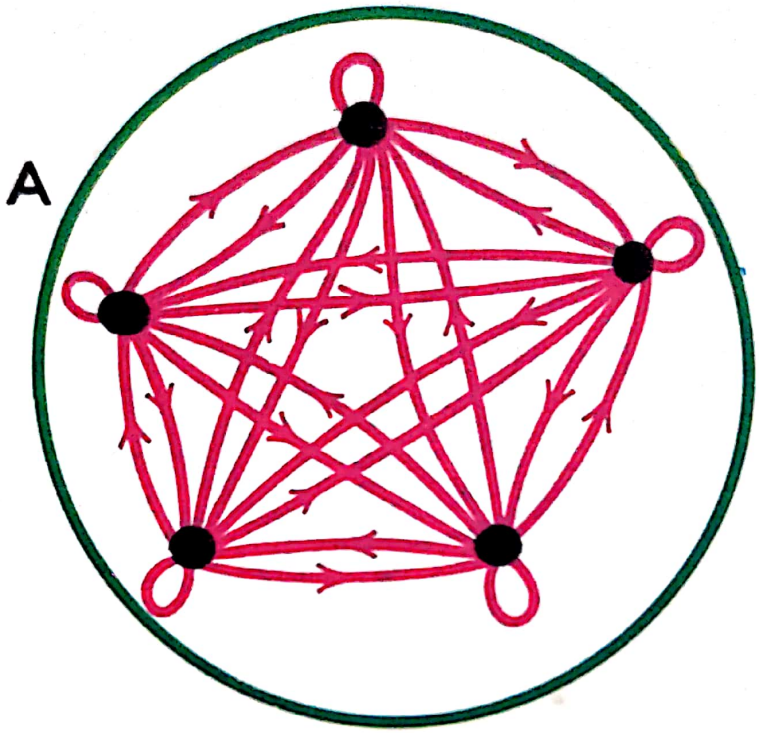


E × M

GRAFICUL 27

2. Fie $A = \{a, b, c, x, y\}$

Calculați sintetic și desenați un grafic al lui $A \times A$



A X A

GRAFICUL 28

3. $\{1, 2, 3\} \times \{5, 6, 7, 8, 9\} = \{(1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9),$
$(2,5), (2,6), (2,7), (2,8), (2,9),$
$(3,5), (3,6), (3,7), (3,8), (3,9)\}$

4. $\{a, b, c, d\} \times \{u, v, w, x, y, z,\} = \ldots$

5. Se cere să se calculeze produsul

$$\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

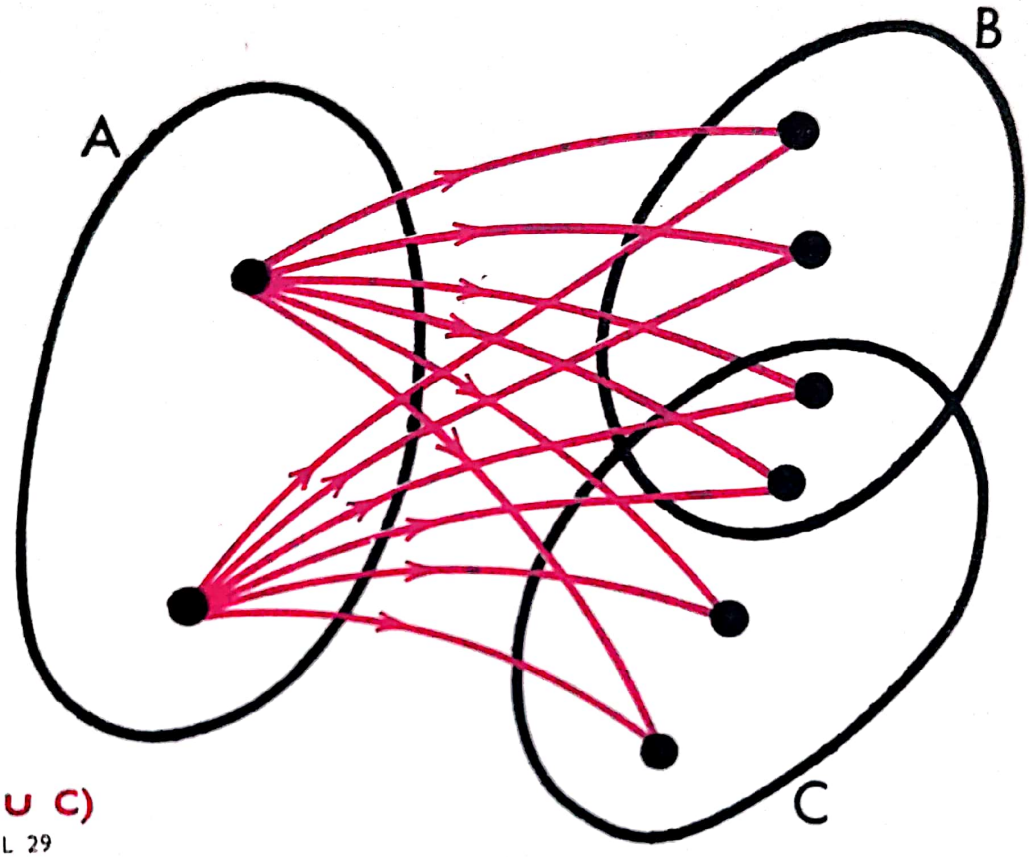
și să se deseneze graficul acestei relații.

Scanned with OKEN Scanner

11 — DISTRIBUTIVITATEA LUI × ÎN RAPORT CU ∪

Dacă fiecare din literele A, B, C indică o mulțime

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$



A × (B ∪ C)

GRAFICUL 29

Arătați mulțimea săgeților lui $A \times B$,
mulțimea săgeților lui $A \times C$,
mulțimea săgeților lui $A \times (B \cup C)$
mulțimea săgeților lui $(A \times B) \cup (A \times C)$

Fiecare din termenii $A \times (B \cup C)$ și $(A \times B) \cup (A \times C)$ arată mulțimea perechilor a căror origine aparține lui A și a cărei extremitate aparține lui $B \cup C$.

Legea × este distributivă în raport cu legea ∪

Dacă fiecare din literele A, B, C arată o mulțime, avem formulele de distributivitate:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$
$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$
$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$$

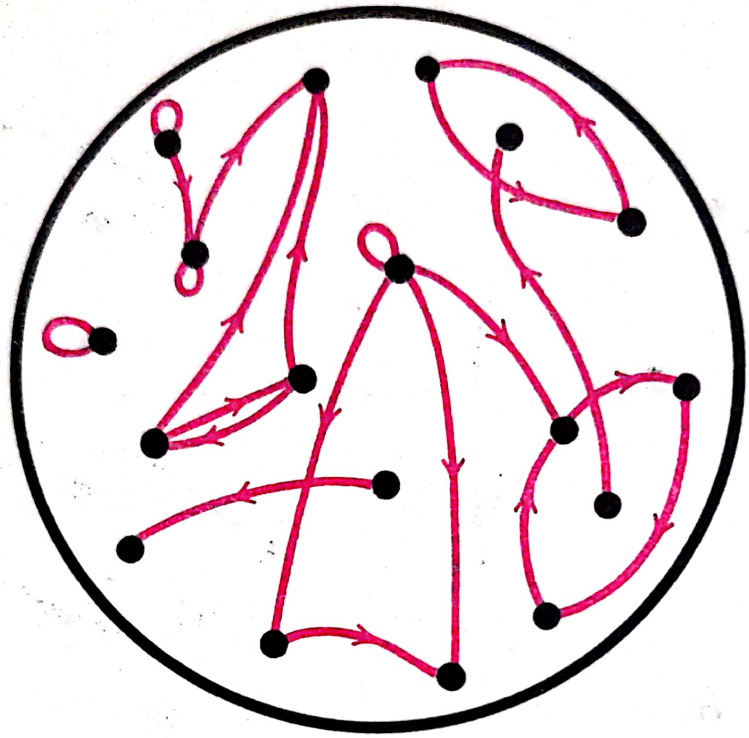
EXERCIȚIU

Justificați formulele precedente.

Scanned with OKEN Scanner

12 — RECIPROCITATEA UNEI RELAȚII

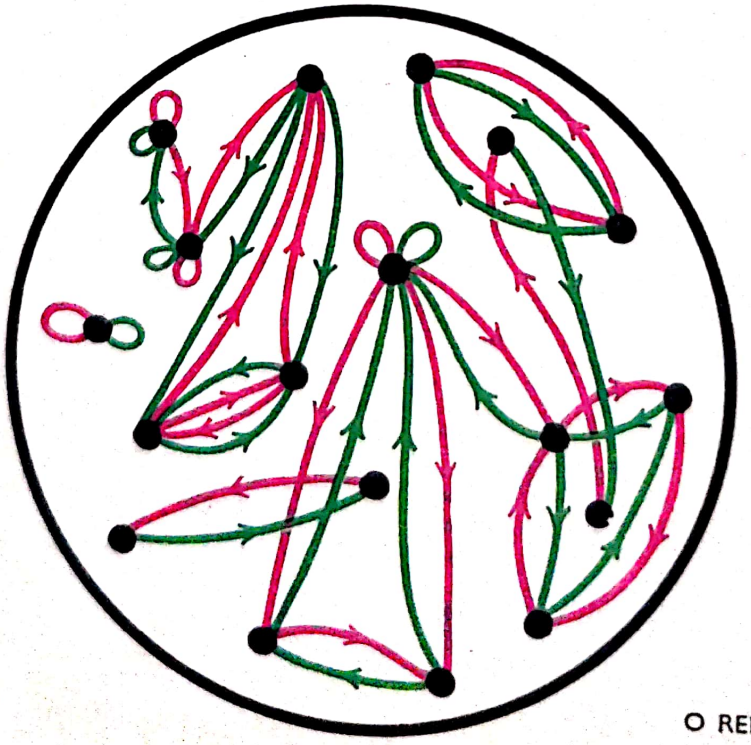
O relație R definită în mulțimea E este reprezentată prin următorul grafic



GRAFICUL 30

Desenați cu verde o săgeată de la *b* spre *a* ori de cîte ori o săgeată roșie merge de la *a* spre *b*.

Veți obține acest grafic.



R, R^{-1}

O RELAȚIE ȘI RECIPROCA EI

GRAFICUL 31

Scanned with OKEN Scanner

Săgețile roșii definesc relația R.

Săgețile verzi definesc o relație pe care o notăm R^{-1} și pe care o numim **reciproca lui R.**

Perechea $(a,b,)$ se numește de asemenea **perechea reciprocă** a lui (b,a).

EXERCIȚII

1. Reciproca relației « . . . *are ca tată* . . . » într-o mulțime de persoane de două sexe este relația « . . . *este tatăl lui* . . . ».

2. Reciproca relației « . . . *are ca soră* . . . », în mulțimea fetelor și băieților, este relația « . . . *este sora lui* . . . ».
Aceste două relații nu sînt egale.

3. Reciproca relației | este relația « . . . *este multiplu lui* . . . ».

4. Reciproca unei permutări a unei mulțimi este o permutare a acestei mulțimi.

5. Dacă F indică relația « . . . *are ca frate* . . . », definită într-o mulțime de băieți, avem $F^{-1} = F$.

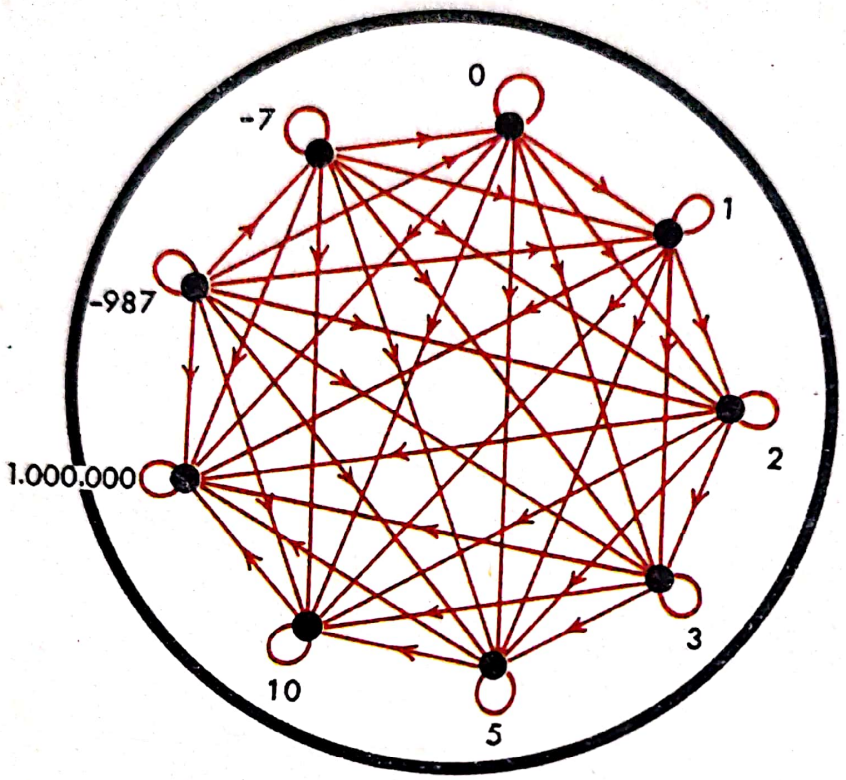
6. Dacă P este relația « . . . *are ca tată* . . . », definită într-o mulțime de persoane, avem $P \cap P^{-1} = \varnothing$.

7. Relațiile . . . *are ca tată* . . .
. . . *are ca fiu* . . .,
definite într-o mulțime de bărbați și de femei, sînt reciproce?

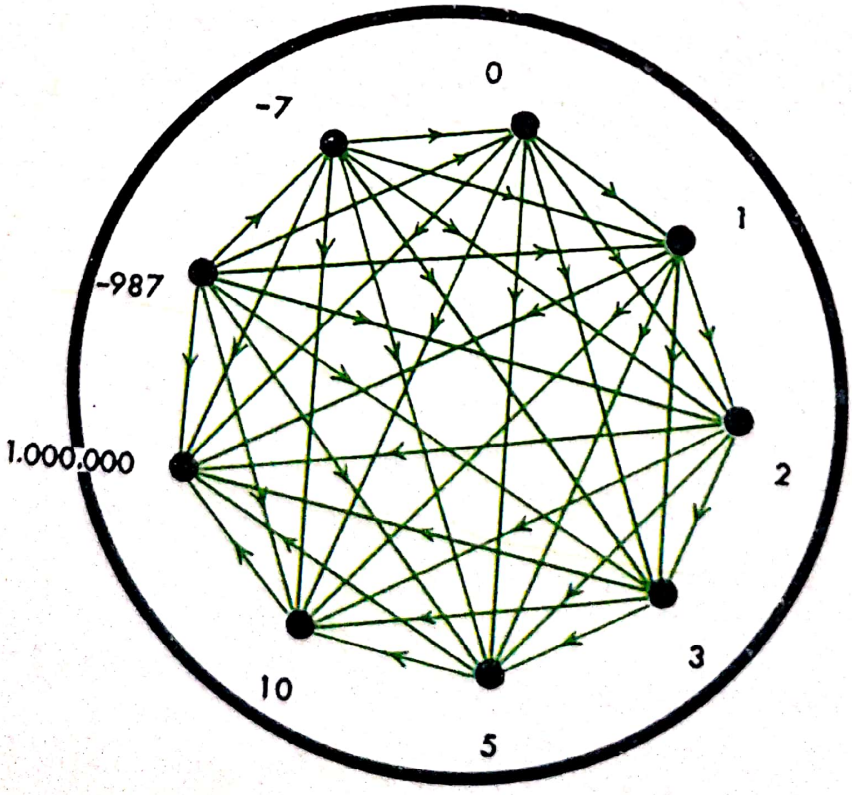
Scanned with OKEN Scanner

13 — RELAȚIILE $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$

Desenați graficele relațiilor $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$ definite în mulțimea {5, 0, 2, 1, — 7, 1.000.000, — 987, 3, 10}

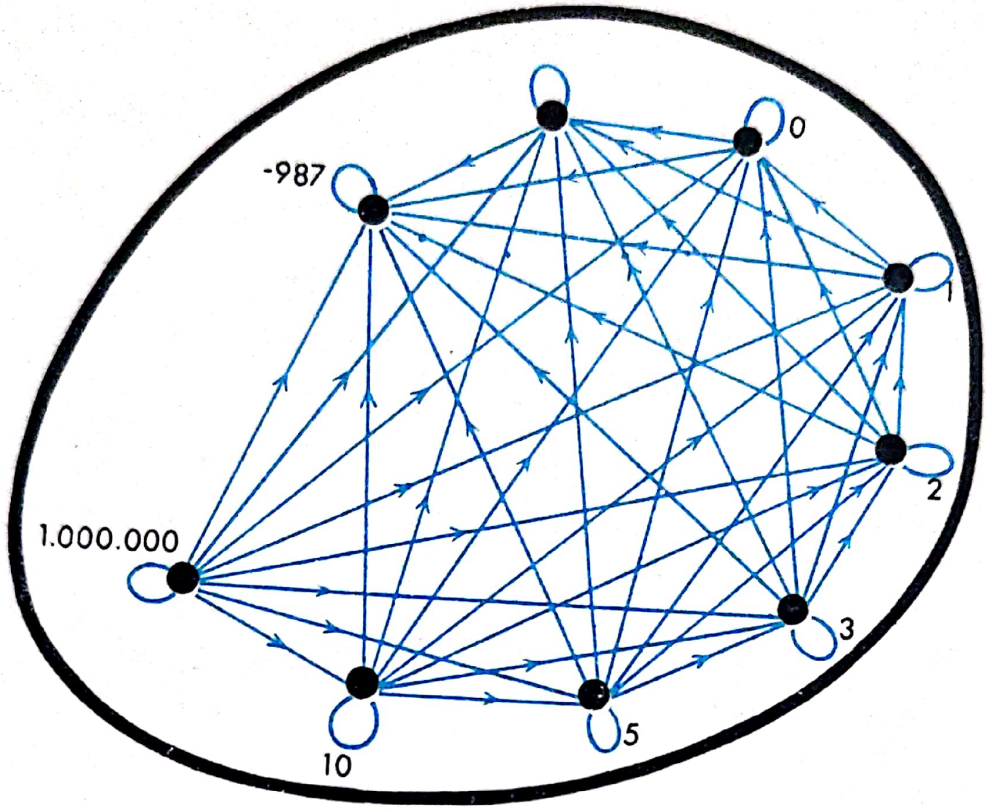


RELAȚIA $\leqslant$
GRAFICUL 32

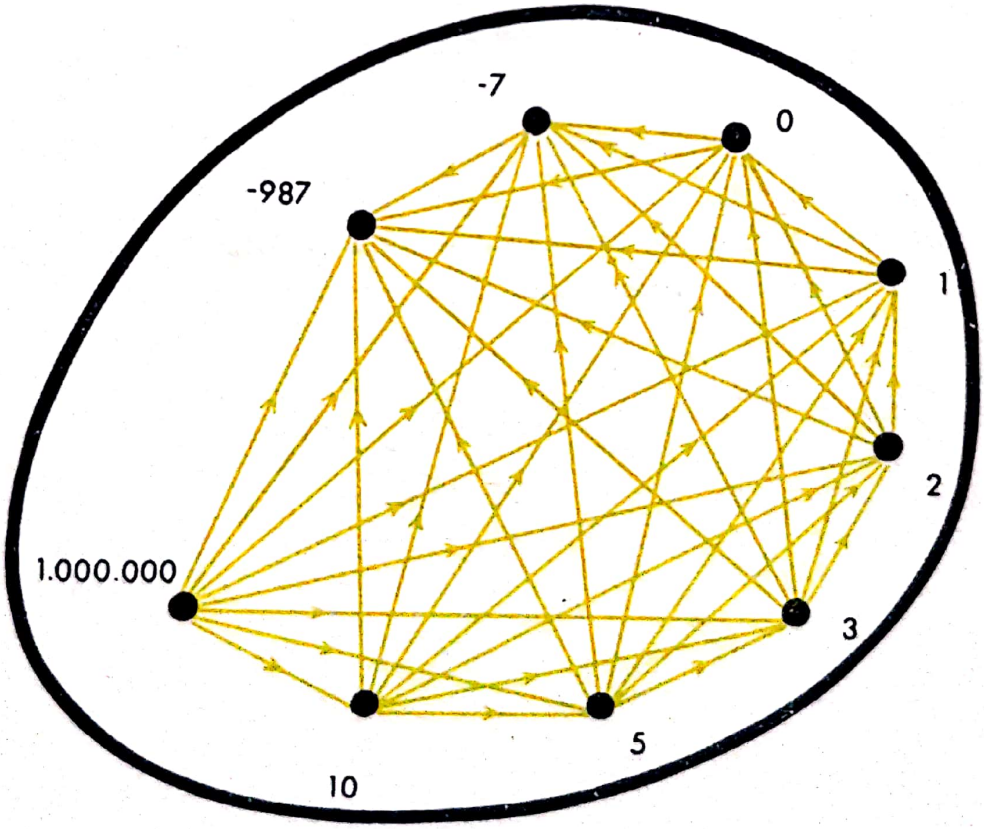


RELAȚIA $<$
GRAFICUL 33

Scanned with OKEN Scanner



RELAȚIA $\geqslant$
GRAFICUL 34



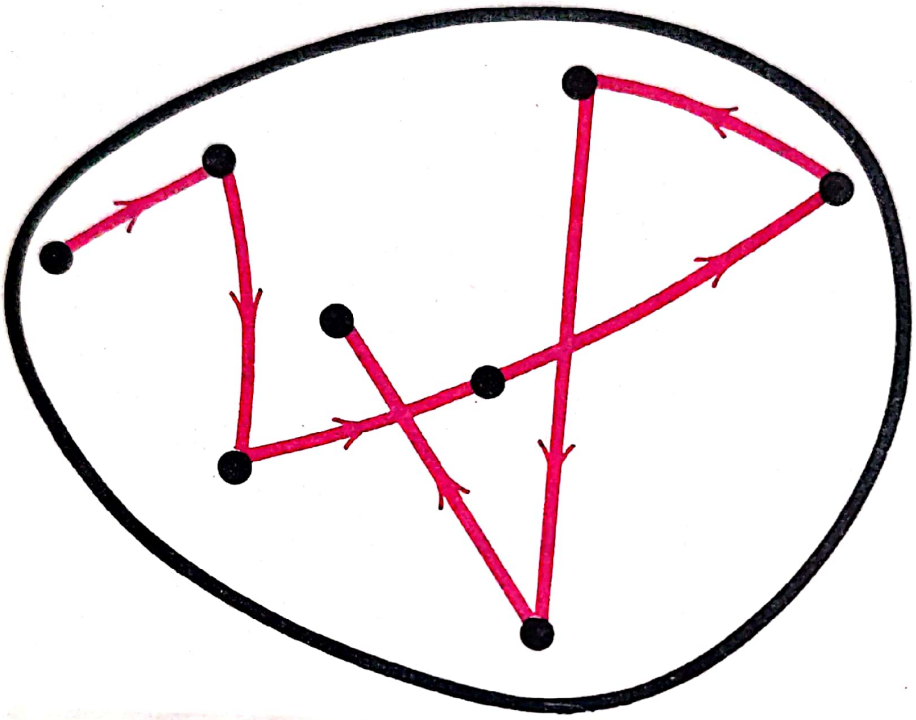
RELAȚIA $>$
GRAFICUL 35

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

1. Care sînt relațiile reciproce ale lui $\leqslant$ și $>$?

2. Elevii care desenează relația $\leqslant$ au părăsit lucrul lor, lăsînd următorul grafic neterminat.



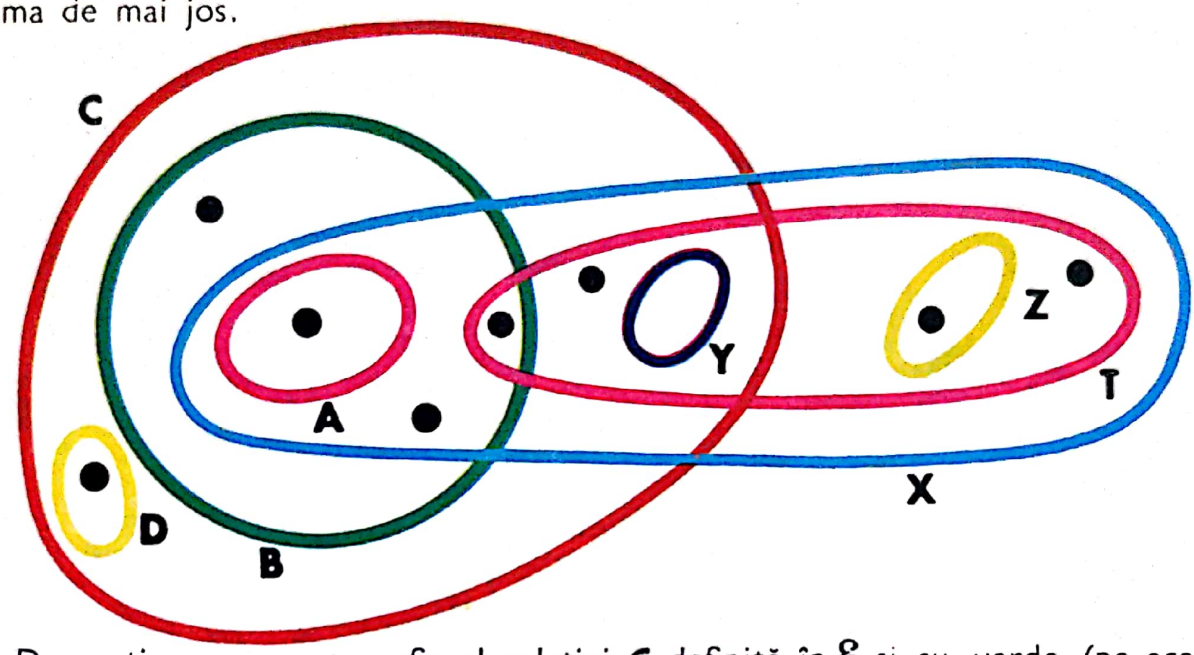
GRAFICUL 36

Fără să cunoașteți mulțimea numerelor în care relația $\leqslant$ este luată în considerare, puteți îndeplini sarcina lor. Faceți-le acest serviciu!

Scanned with OKEN Scanner

14 — RELAȚII ÎNTR-O MULȚIME DE MULȚIMI

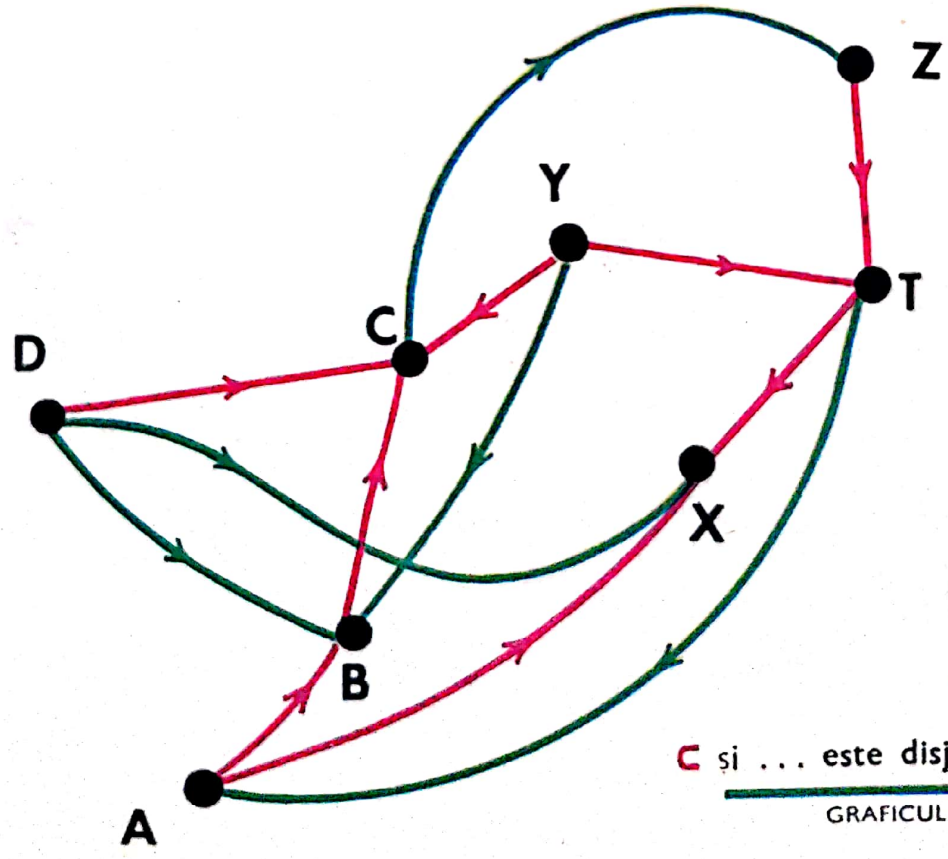
Fie $\mathfrak{E} = \{A, B, C, D, X, Y, Z, T\}$ o mulțime de mulțimi reprezentată prin diagrama de mai jos.



Desenați cu roșu un grafic al relației $\subset$ definită în $\mathfrak{E}$ și cu verde (pe același desen), un grafic al relației . . . *este disjunct cu* . . . definită în $\mathfrak{E}$

Terminați această lucrare înainte de a citi ceea ce urmează.

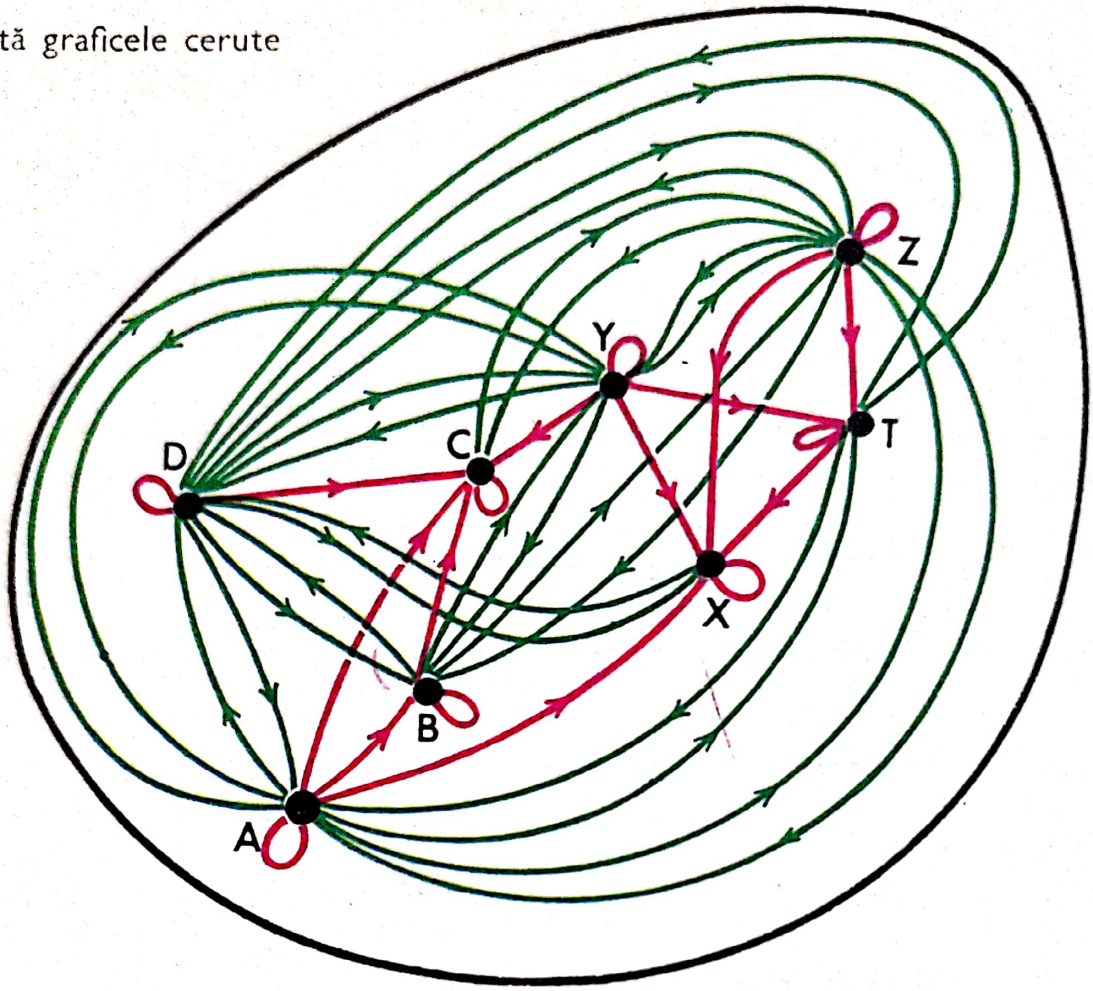
Pe graficul de mai jos nu s-au reprezentat decît anumite săgeți roșii și verzi. Totuși ele au fost alese astfel încît, fără să priviți diagramele de mai sus, să puteți reconstitui în întregime graficele lui $\subset$ și lui « . . . *este disjunct cu* . . . » De ce?



$\subset$ și . . . este disjunct cu . . .

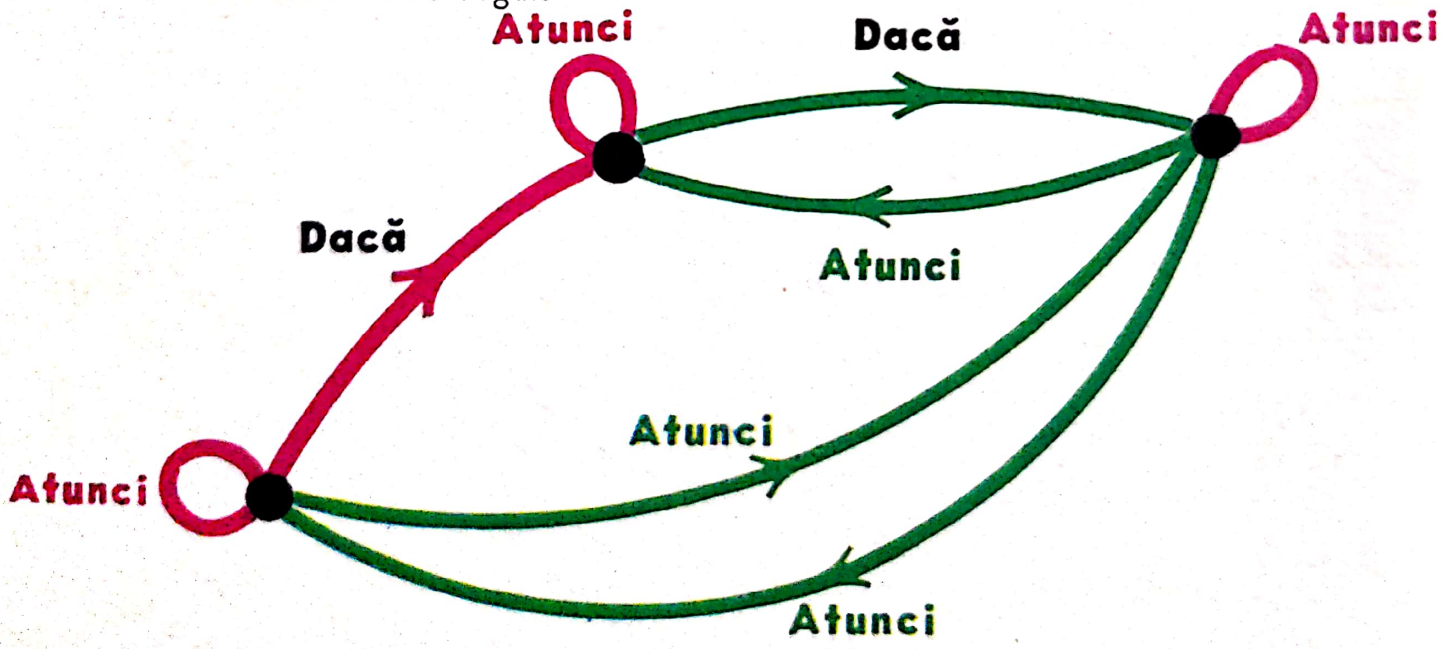
GRAFICUL 37

Iată graficele cerute



GRAFICUL 38

Avem următoarea regulă

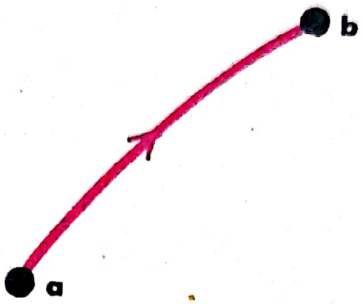


GRAFICUL 39

Scanned with OKEN Scanner

15 — IMAGINEA UNEI MULȚIMI PRINTR-O RELAȚIE

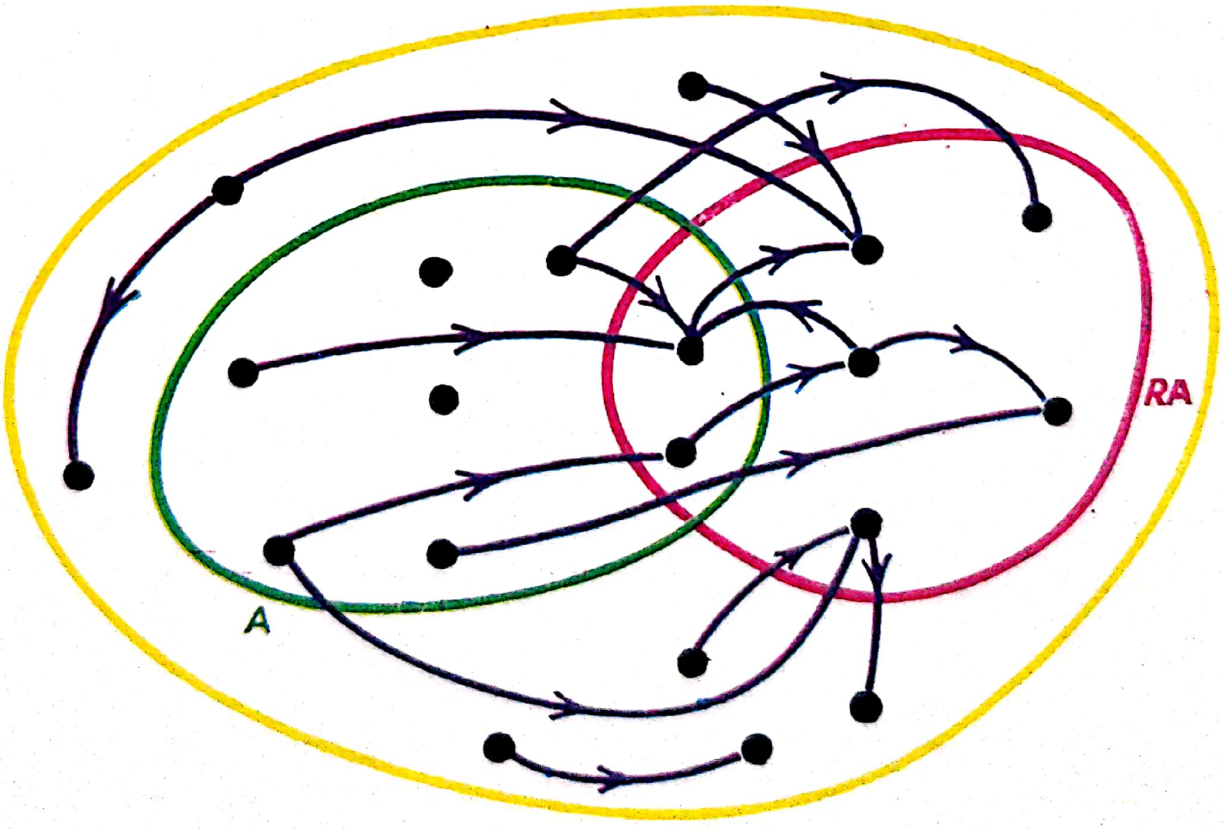
Fie R o **relație**, adică o **mulțime de perechi.**
Să numim *a* origina și *b* extremitatea perechii (*a*, *b*).



(*a*, *b*)

DEFINIȚIE — *Vom nota cu RA* ***mulțimea extremităților*** *perechilor (sau săgeților) lui R care-și au origina în mulțimea A.*

Mulțimea RA este numită ***imaginea lui A prin R.***



GRAFICUL 40

EXERCIȚII

1. Dacă notăm cu R relația definită de graficul 1:
   R {Frédérique Vincent, Nicole Garçon, Danièle Denuit, Josette Nancy} = {Annie Niouc, Josette Nancy, Danièle Denuit, Michèle Daems, Monique Dumas}
   R {Judith Martin} = $\varnothing$
   R {Noëlle Rensard} = {Annie Niouc, Josette Nancy}
   R {Lucienne Masart} = {Michèle Laurent}

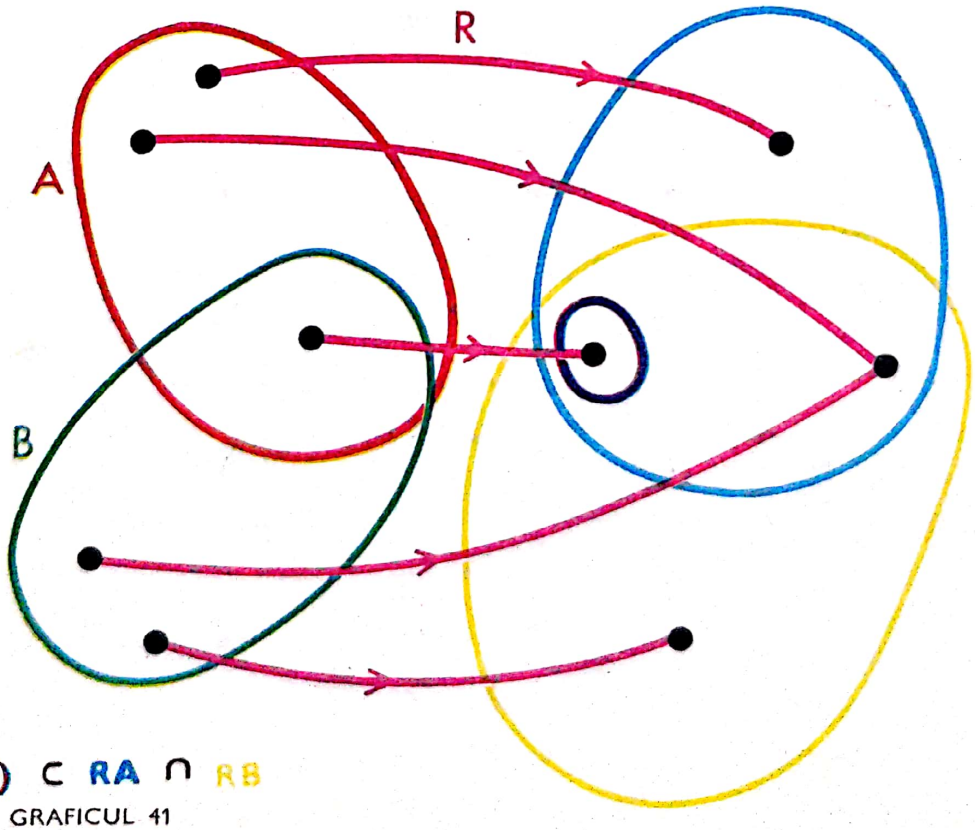
2. Pentru orice relație R: $R\,\varnothing = \varnothing$

3. Fie R o relație și x un obiect.
   Imaginea R $\{x\}$ a unui element unic este ca totdeauna, un element unic?

4. Dacă literele A și B indică fiecare o mulțime, iar R o relație, avem formulele

$$A \subset B \Rightarrow RA \subset RB$$
$$R(A \cup B) = RA \cup RB$$
$$R(A \cap B) \subset RA \cap RB$$

   Figura de mai jos arată că în ultima formulă nu se poate înlocui semnul $\subset$ prin semnul $=$



$R(A \cap B) \subset RA \cap RB$

GRAFICUL 41

Scanned with OKEN Scanner

16 — EXERCIȚII RECAPITULATIVE

1. *Relațiile sînt mulțimi de perechi.*

Deci le putem trata ca mulțimi.
Să notăm cu P relația « . . . *are ca tată* . . . »
cu M relația « . . . *are ca mamă* . . . »
cu Z relația « . . . *are ca fiu* . . . »
cu D ralația « . . . *are ca fiică* . . . »

Arătați că aceste patru relații sînt disjuncte două cîte două și scrieți formulele care arată acest lucru ($P \cap M = \varnothing, \ldots$)
Relația $P \cup M$ se exprimă « . . . *are ca tată sau ca mamă* . . . »
Mai avem și $P \cap P^{-1} = \varnothing$, $P \cap M^{-1} = \varnothing$
Dați alte formule de acest tip.
Justificați formula

$$(P \cup M)^{-1} = Z \cup D$$

Trasați graficele posibile pentru relațiile mai sus definite într-o mulțime de persoane.

Avem și

$$Z \subset (P \cup M)^{-1}$$

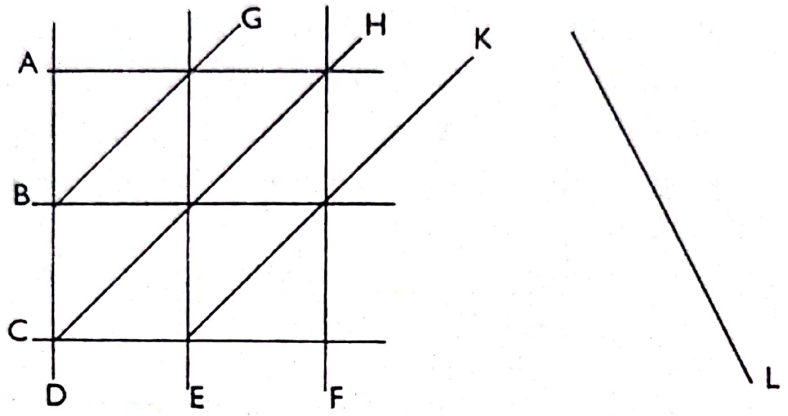
2. Printr-o diagramă reprezentați mulțimea

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

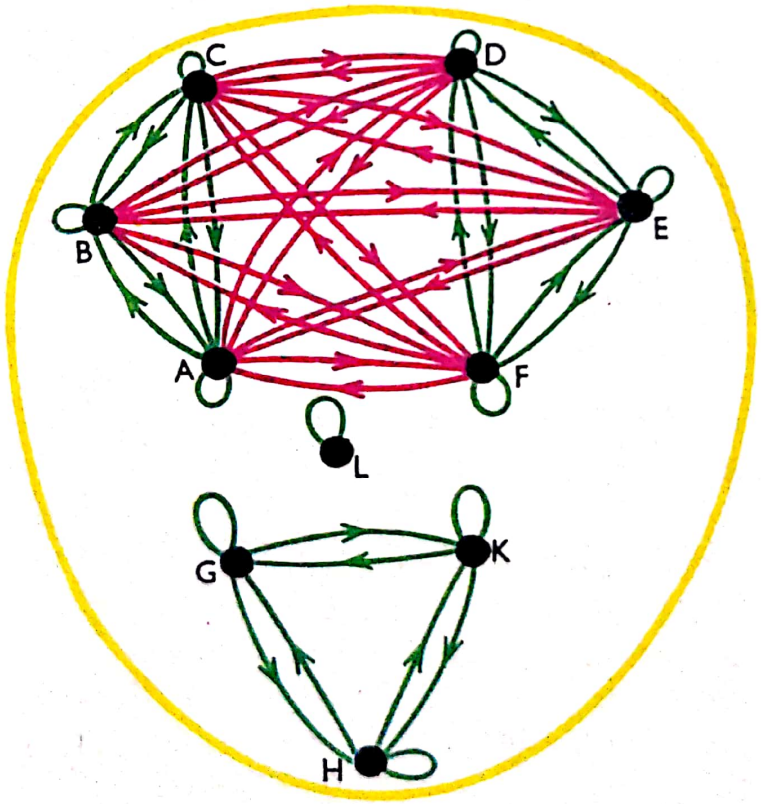
și însemnați cele 10 elemente ale acestei mulțimi.
Procurați niște cartonașe și pe fiecare din ele scrieți unul din elementele lui $E \times E$.
Cîte cartonașe va trebui să utilizați pentru ca fiecare element al lui $E \times E$ să fie reprezentat printr-un cartonaș și numai printr-unul singur?
Pachetul de cartonașe reprezintă acum $E \times E$.
Amestecați aceste cartonașe, dați-le la tăiat și luați pachetul din stînga. Aveți în mînă o parte din pachet. Ea reprezintă o parte a lui $E \times E$, adică o relație R definită în E.
Reprezentați această relație printr-un grafic roșu.
Relația definită de celălalt pachet este $(E \times E) \setminus R$.
Strîngeți cartonașele, amestecați-le din nou și reîncepeți jocul.
Veți fi definit astfel o nouă relație S.
Reprezentați prin grafice în culori diferite S, $R \cap S$, $R \cup S$, $R \setminus S$, $S \setminus R$.

Scanned with OKEN Scanner

3. $\parallel$ și $\perp$ sînt relații definite în mulțimea $\mathfrak{D}$ a dreptelor planului Π. Iată o mulțime $\mathfrak{E} = \{A, B, C, D, E, F, G, K, L\}$ de drepte din acest plan. Desenați cu verde și roșu grafice pentru relațiile $\parallel$ și $\perp$ definite în $\mathfrak{E}$.



ÎN PLANUL Π

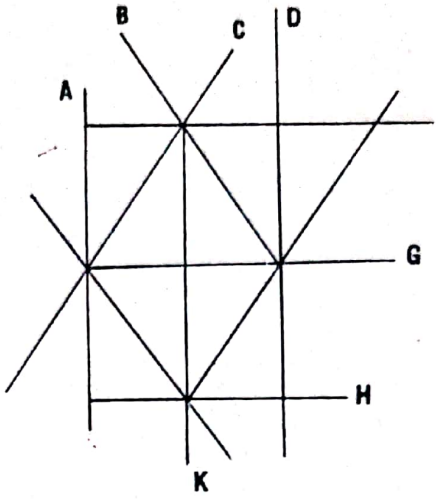


$\perp$ $\parallel$

GRAFICUL 42

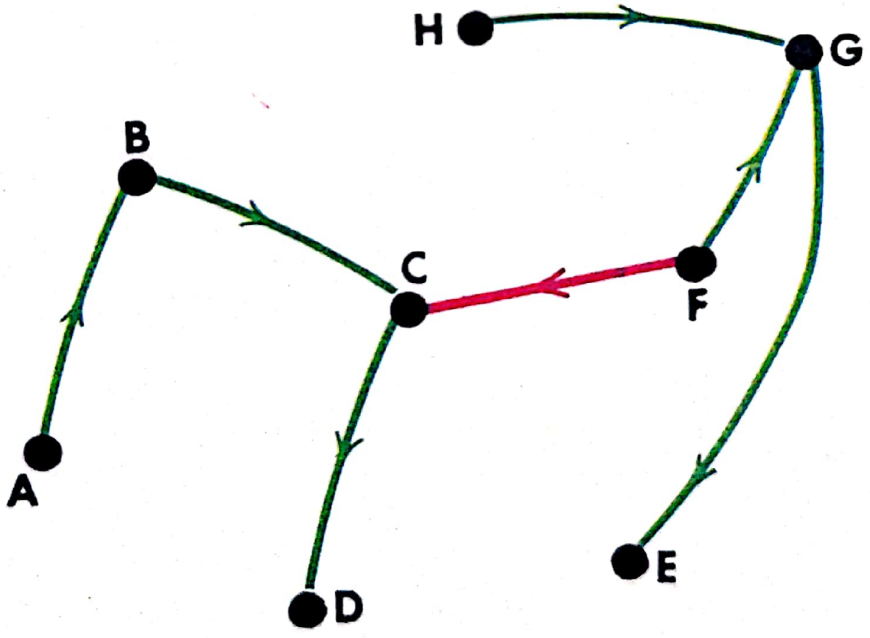
Scanned with OKEN Scanner

4. Același exercițiu



ÎN PLANUL Π

5. În graficul de mai jos, punctele reprezintă drepte din planul Π, săgețile roșii reprezintă relația $\perp$, săgețile verzi relația $\parallel$.
Acest grafic este desigur incomplet. Desenați săgețile care au fost uitate în mod sigur.



$\perp$ $\parallel$

GRAFICUL 43

Reprezentați în planul Π drepte A, B, C, D, E, F, G, H în situația care reiese din graficul 43.

Scanned with OKEN Scanner

6. Avem $\perp^{-1} = \perp$, $\|^{-1} = \|$, $\perp \cap \| = \varnothing$

7. Pentru orice dreaptă $D \in \mathfrak{D}$: $\| \{D\} = dir\ D$

8. $A, B, \in \mathfrak{D}$ și $A \perp B \Rightarrow$
$$\begin{aligned} \perp \{A\} &= \| \{B\} \\ \perp \{B\} &= \| \{A\} \\ \perp \{A, B\} &= \| \{A, B\} \end{aligned}$$

9. Desenați un grafic al relației « . . . *are ca dublu* . . . » în ω.
Această relație este mulțimea $\{(x, 2x) \mid x \in \omega\}$

10. Un joc obișnuit, cu 52 de cărți, poate fi considerat ca produsul {pică, cupă, caro, treflă} × {A, R, D, V, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2}.

Reprezentați prin două diagrame cele două mulțimi care figurează în produsul de mai sus și însemnați toate elementele lor prin puncte.
Distribuiți cărțile la patru jucători.
Mulțimea cărților primite de fiecare dintre jucători definește o relație.
Reprezentați aceste patru relații prin grafice de culori diferite.

Scanned with OKEN Scanner

ARTHUR CAYLEY (1821—1895)

Graficele pe care le utilizăm ca să reprezentăm relații joacă actualmente un rol important în multe aplicații, ca teoria circuitelor electrice, teoria informației, sociologia . . . Ele sînt necesare mai ales celor ce vor să studieze marile mașini electronice.

Prima carte consacrată în întregime graficelor a fost scrisă în 1936 de König.

Cayley a utilizat însă grafice multicolore încă din 1878, mai ales pentru a scoate în evidență anumite proprietăți ale teoriei grupurilor.

Arthur Cayley, născut în anul 1821, este unul din fondatorii algebrei moderne. Tatăl său a fost un negustor englez care-și instalase o agenție comercială la Petrograd și spera ca și fiul său să participe la afacerile sale. În perioada studiilor sale strălucite A. Cayley s-a dovedit dintr-o dată un mare talent matematic, dar a trebuit să se consacre dreptului pentru a face față nevoilor sale materiale. La 42 de ani el a fost numit profesor la prima catedră de matematică pură creată la marea Universitate de la Cambridge, putînd în sfîrșit să se dedice cu totul matematicii. El a ajutat pe un alt mare matematician englez, Sylvester, care trăise un timp în Statele Unite, să promoveze predarea matematicii la nivel superior în această țară, în special prin seria de conferințe ținute la Universitatea John Hopkins.

Scanned with OKEN Scanner

8

Punerea în evidenţă a proprietăţilor anumitor relaţii

1 — Examinînd graficele din capitolul 7, constatăm că anumite proprietăți comune dau unor relații un aspect de familie.

Matematica și multe alte științe folosesc relații în mod constant.

De aceea, este important să schițăm un fel de clasificare și să scoatem în evidență anumite clase de relații, care au importante proprietăți comune.

2 — REFLEXIVITATEA

Graficele 5, 6, 12, 13, 21, 28, 32, 34 posedă una dintre cele mai izbitoare proprietăți.

Ele prezintă o buclă în fiecare din punctele lor.

DEFINIȚIE — *O relație se numește* **reflexivă** *dacă și numai dacă prezintă o buclă în fiecare din punctele ei.*

REFLEXIVITATE

În **orice** punct al graficului

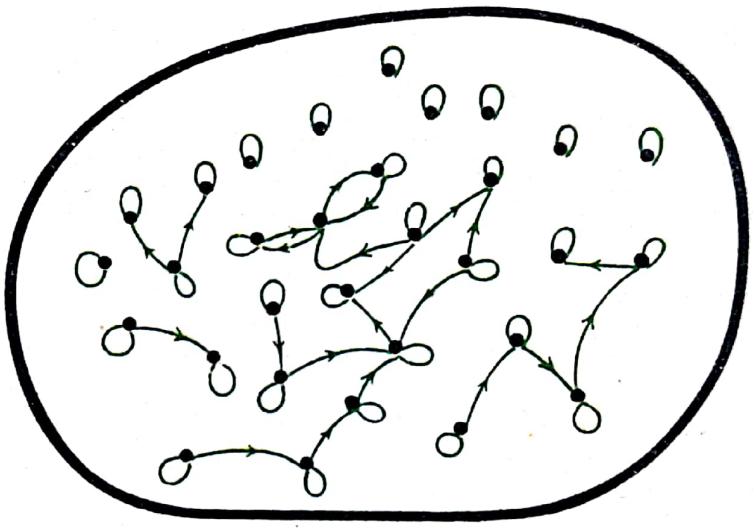
Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

1. Relația de egalitate este reflexivă.

2. Deoarece una dintre colegele noastre a declarat că știe « o persoană care nu se iubește pe sine», am tras concluzia că relația *iubește*, definită în mulțimea ființelor omenești, nu este reflexivă.
Deoarece toate colegele noastre au declarat că se iubesc pe sine, relația *iubește* definită în mulțimea elevelor clasei noastre, este reflexivă.

3. Graficul de mai jos definește o relație nereflexivă. De ce?



GRAFICUL 44

4. Este foarte ușor să se construiască o relație reflexivă pe baza unei relații date adăugîndu-i săgeți. Este suficient să se pună o buclă tuturor punctelor care n-o au.
Dacă procedăm în acest mod cu relația $<$, obținem relația $\leqslant$.

5. Relația R este reflexivă dacă și numai dacă R^{-1} este reflexivă.

6. Dacă R este o relație reflexivă, iar S o relație obținută plecînd de la R prin adăugarea anumitor săgeți, *atunci* relația S este reflexivă.

7. Relația $\subset$ este reflexivă.

8. Relația $|$ este reflexivă.

9. Relația $||$ este reflexivă.

Scanned with OKEN Scanner

3 — ANTIREFLEXIVITATEA

DEFINIȚIE — *O relație este numită* ***antireflexivă*** *dacă și numai dacă graficul ei nu cuprinde nici o buclă.*

EXERCIȚII

1. Graficele 7, 8, 9, 10, 11, 14, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 29, 33, 35, 36, 40, 41 definesc relații **antireflexive.**

2. Graficele 1, 2, 3, 4, 15, 20, 27, 30 definesc relații care nu sînt nici **reflexive,** nici **antireflexive.**

3. Dați 7 exemple noi de relații care nu sînt nici reflexive, nici antireflexive.

4. Relația $\perp$ definită în $\mathfrak{D}$ este antireflexivă.

5. Relația R este antireflexivă dacă și numai dacă R^{-1} este antireflexivă.

6. Relația $<$ este antireflexivă. Același lucru și pentru relația $>$. De ce?

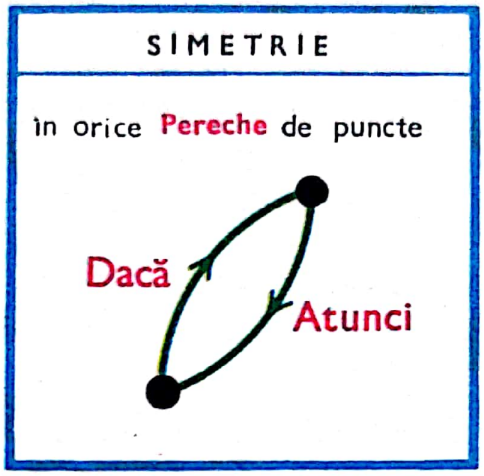
7. Dacă tăiem buclele unei relații, obținem o relație antireflexivă. Dacă procedăm la fel cu relația $\leqslant$, obținem relația $<$.

8. Care este relația obținută prin tăierea buclelor relației $\subset$?

9. Aceeași întrebare pentru $|$.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIE — *O relație este* ***simetrică*** *dacă și numai dacă ori de cîte ori graficul ei cuprinde o săgeată care merge de la* ***a*** *la* ***b****, ea cuprinde și una care merge de la* ***b*** *la* ***a****.*



O relație este deci simetrică dacă și numai dacă ea este egală cu reciproca ei.

$$R \text{ simetric} \iff R = R^{-1}$$

EXERCIȚII

1. Relația *divide* definită în $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ nu este simetrică (Avem 2/6, dar nu 6/2).

2. Relația *iubește* definită în mulțimea {Romeo, Julieta} este simetrică.

3. Relația *iubește* definită în omenire nu este, din nefericire, simetrică.

4. Relația $\leqslant$ definită în mulțimea ω a numerelor naturale nu este simetrică.

5. Relația *... are ca soră ...* definită într-o mulțime de fete este simetrică. Relația *... are ca soră ...* definită într-o mulțime de băieți și fete nu este simetrică în general.

6. Graficele 5, 6, 9, 21, 24, 28 definesc relații simetrice.

7. Relația $\|$ definită în $\mathfrak{D}$ este simetrică.

Scanned with OKEN Scanner

8. Fie E o mulțime de fete și băieți.
Ni se semnalează că relația . . . *are ca soră* . . ., definită în această mulțime E, este simetrică.
Ce puteți afirma despre băieții care aparțin lui E?

9. Relația $\perp$ definită în $\mathfrak{D}$ este simetrică.

10. Relația . . . *are ca frate* și *ca soră* . . . definită într-o mulțime de băieți și fete este totdeauna simetrică.

11. Relația . . . *este disjunctă cu* . . . definită într-o mulțime $\mathfrak{E}$ de mulțimi este simetrică.

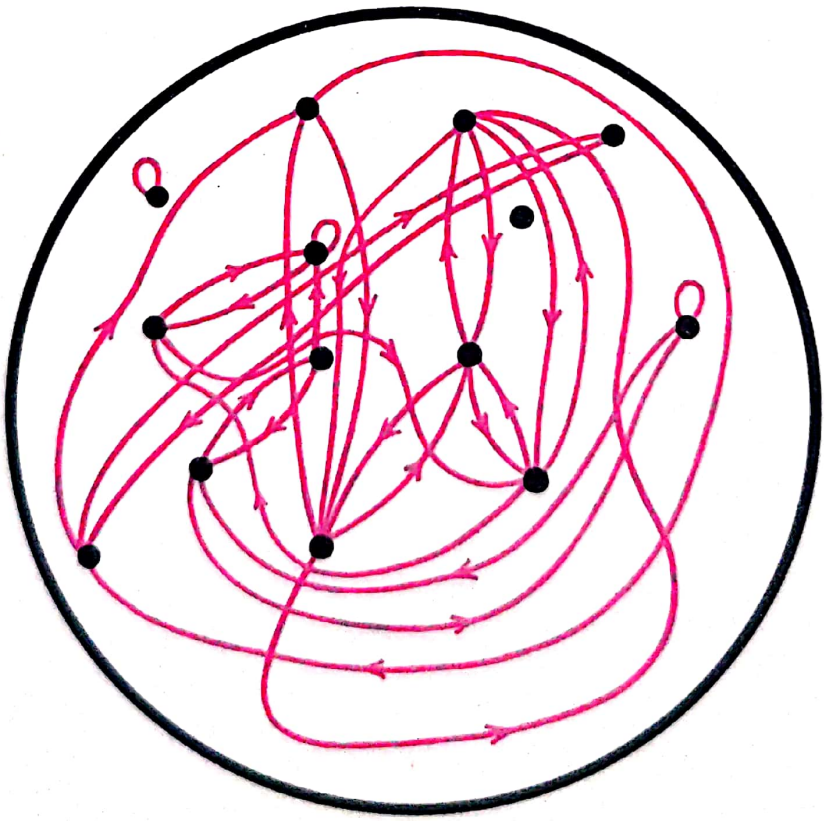
12. Pentru orice relație R, relația $R \cup R^{-1}$ este simetrică.

13. Dacă S este relația . . . *are ca soră* . . . într-o mulțime de băieți și fete, care este relația $S \cup S^{-1}$?

14. O relație R fiind dată de graficul ei, cum vom obține o relație simetrică S trăgînd cel mai mic număr posibil de săgeți noi?

15. O relație R fiind definită de graficul ei, cum vom obține o relație simetrică T suprimînd cel mai mic număr de săgeți?

16. Graficul de mai jos nu este simetric. De ce?

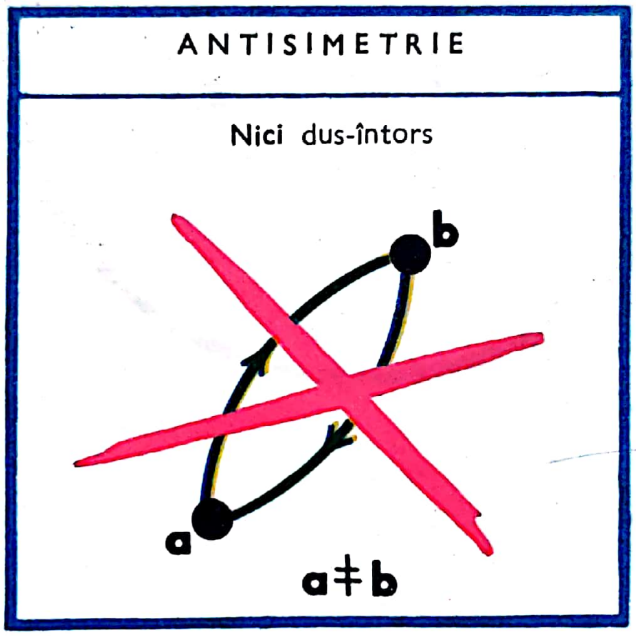


GRAFICUL 45

Scanned with OKEN Scanner

5 — ANTISIMETRIE

DEFINIȚIE — *O relație este* ***antisimetrică*** *dacă și numai dacă graficul ei nu cuprinde* ***niciodată, simultan*** *o săgeată care merge de la* ***a*** *la* $b \neq a$ *și o săgeată care merge de la* ***b*** *la* ***a***.



EXERCIȚII

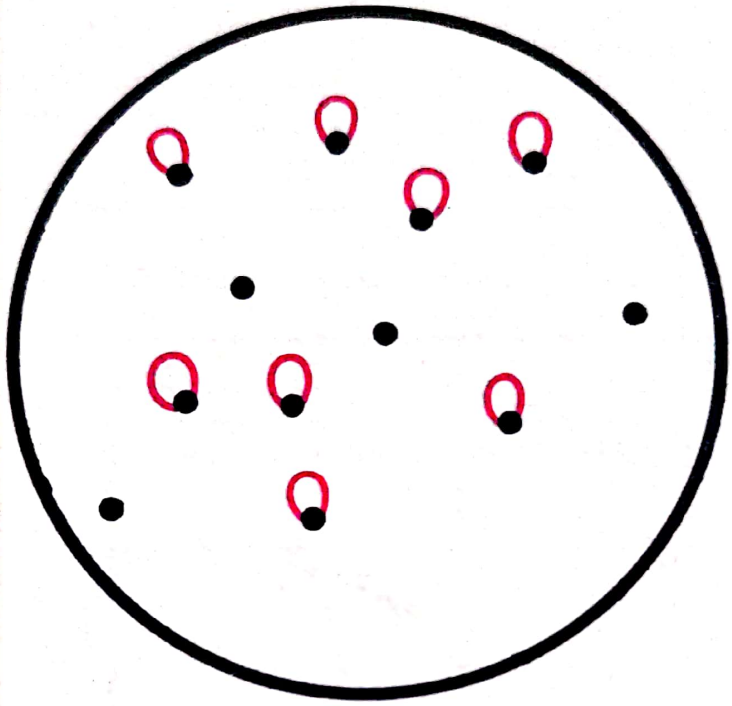
1. Graficele 4, 7, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 29, 34, 35, 36, 40 definesc relații **antisimetrice.**

2. Graficele 1, 2, 3, 8, 15, 19, 27, 30, 44, 45 definesc relații care nu sînt **nici simetrice, nici antisimetrice.**

3. Graficele 21, 24 sînt în același timp **simetrice și antisimetrice.**

Scanned with OKEN Scanner

4. O relație este **în același timp simetrică și antisimetrică** dacă și numai dacă graficul ei nu cuprinde **decît bucle.**



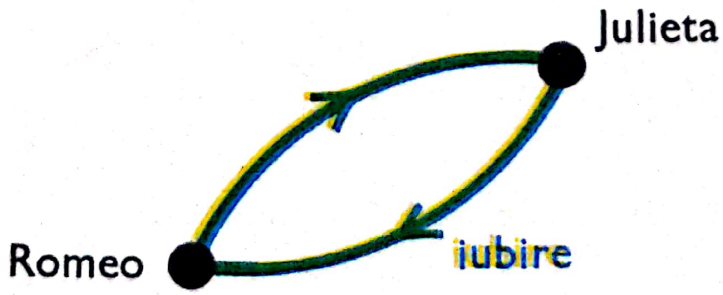
RELAȚIA R ÎN ACELAȘI TIMP SIMETRICĂ ȘI ANTISIMETRICĂ

GRAFICUL 46

5. Relațiile $\subset$, $\supset$, $\leqslant$, $\geqslant$, $<$, $>$ sînt antisimetrice.

6. Relația $|$ (*divide*) definită pe mulțimea $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ este antisimetrică.

7. Relația *iubește* nu **este** antisimetrică.
Într-adevăr



Este oare sigur că Romeo și Julieta trebuie să aibă bucle?

Scanned with OKEN Scanner

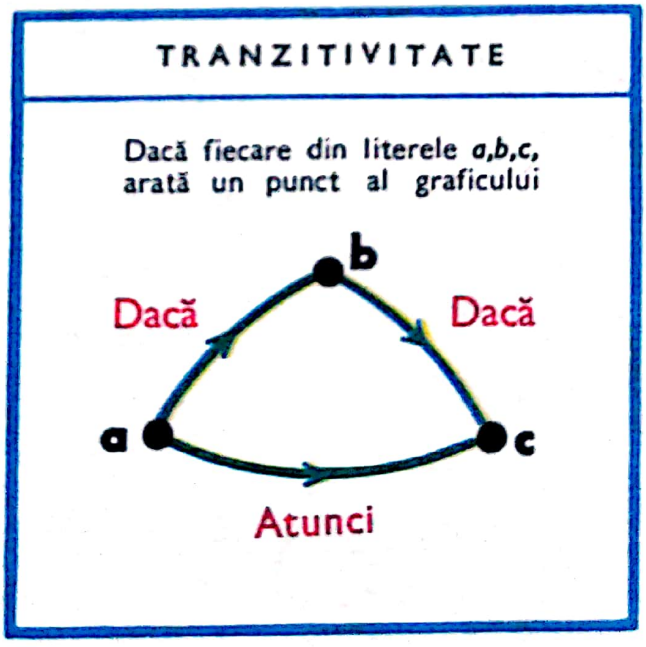
6 — TRANZITIVITATE

DEFINIȚIE — *O relație este* ***tranzitivă*** *dacă și numai dacă graficul ei satisface condiția:*

Dacă { *o săgeată merge de la* ***a*** *spre* ***b*** *și o săgeată merge de la* ***b*** *spre* ***c*** } ***Atunci*** *o săgeată merge de la* ***a*** *spre* ***c***

și aceasta, oricare ar fi punctele ***a***, ***b***, ***c***, *distincte sau nu.*

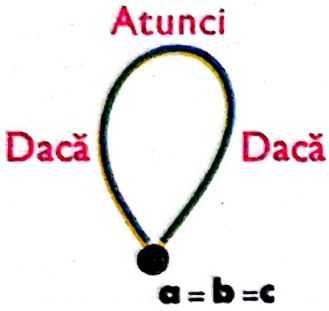
Iată schema **tranzitivității**:



Să subliniem că obiectele reprezentate de *a*, *b*, *c* nu sînt neapărat distincte.

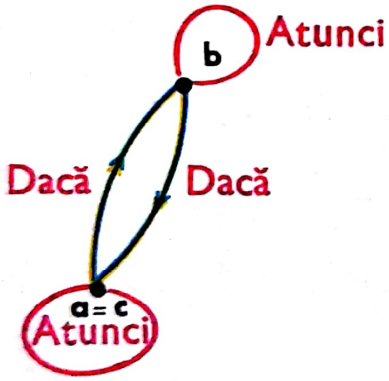
Să vedem ce dă această schemă în diversele situații

1. $a = b = c$

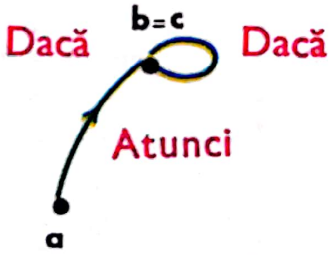


2. $a = b \neq c$

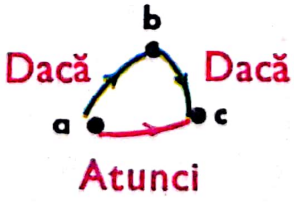
3. $a = c \neq b$



4. $b = c \neq a$



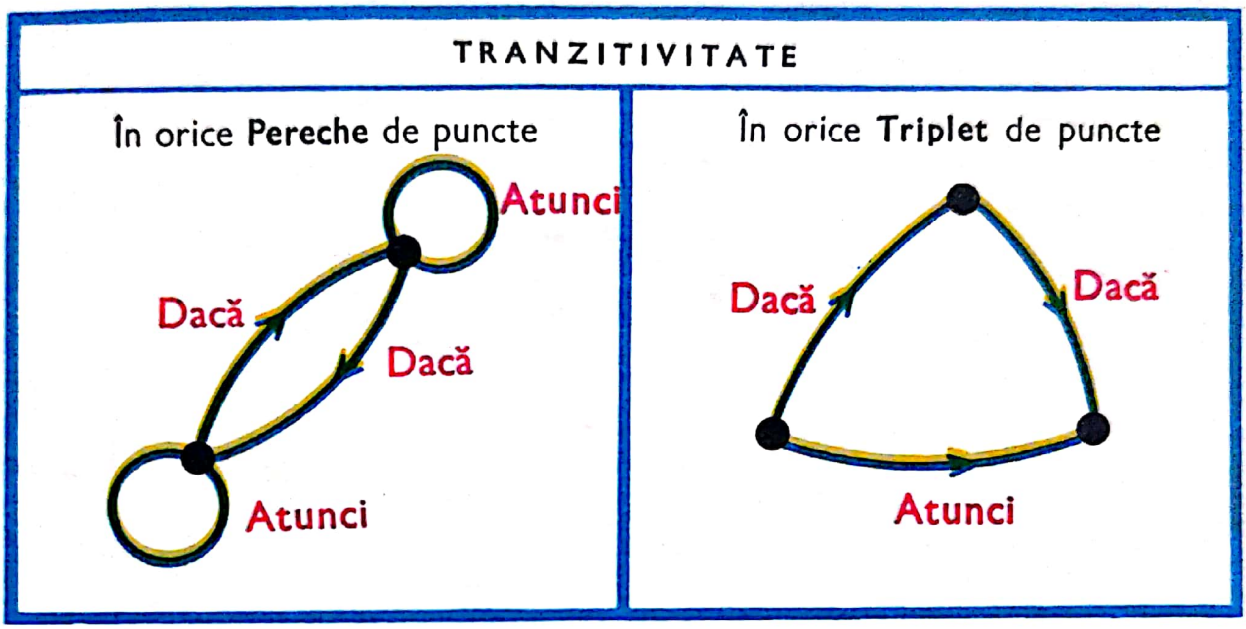
5. $a \neq b \neq c \neq a$



Am desenat cu roșu săgețile noi pe care trebuie să le cuprindă graficul atunci cînd cuprinde săgeata sau săgețile verzi.

Se vede că numai cazurile 3 și 5 impun existența unei săgeți (sau unei bucle) noi.

Deci, mai putem reprezenta tranzitivitatea prin schema (în care, de data aceasta, punctele reprezintă obiecte distincte).

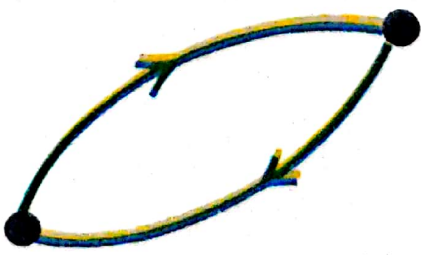


EXERCIȚII

1. Relațiile definite de graficele 4, 5, 6, 12, 13, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27 28, 29, 32, 33, 34, 35, 41, 46 sînt tranzitive.

2. Relațiile definite de graficele 1, 2, 3, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 30, 36, 44, 45 nu sînt tranzitive.

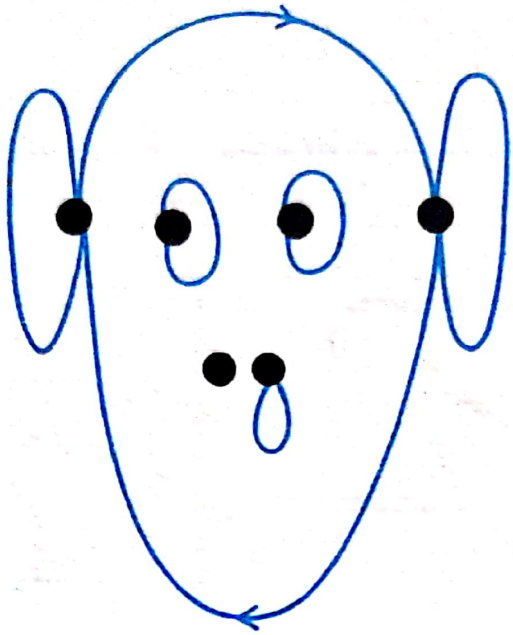
3. Acest grafic definește o relație netranzitivă.



GRAFICUL 47

Scanned with OKEN Scanner

4. Acest grafic definește o relație tranzitivă.



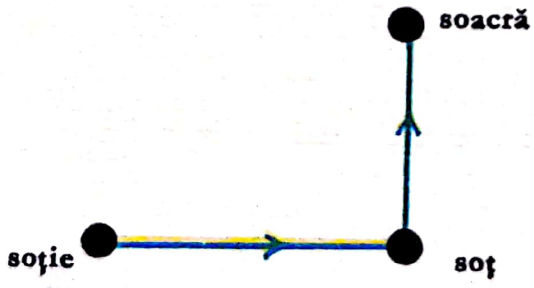
GRAFICUL 48

5. Relațiile $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$, $=$ definite în mulțimea numerelor naturale sînt tranzitive.

6. Relațiile $\subset$ și $\supset$ definite în orice mulțime de mulțimi sînt tranzitive.

7. Relația $|$ definită în mulțimea $\omega = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ este tranzitivă.

8. Relația *iubește* nu este, în general, tranzitivă. Pentru a ne convinge de acest lucru să luăm mulțimea formată dintr-o femeie, din soțul ei și din soacră. Adesea, avem următorul grafic:



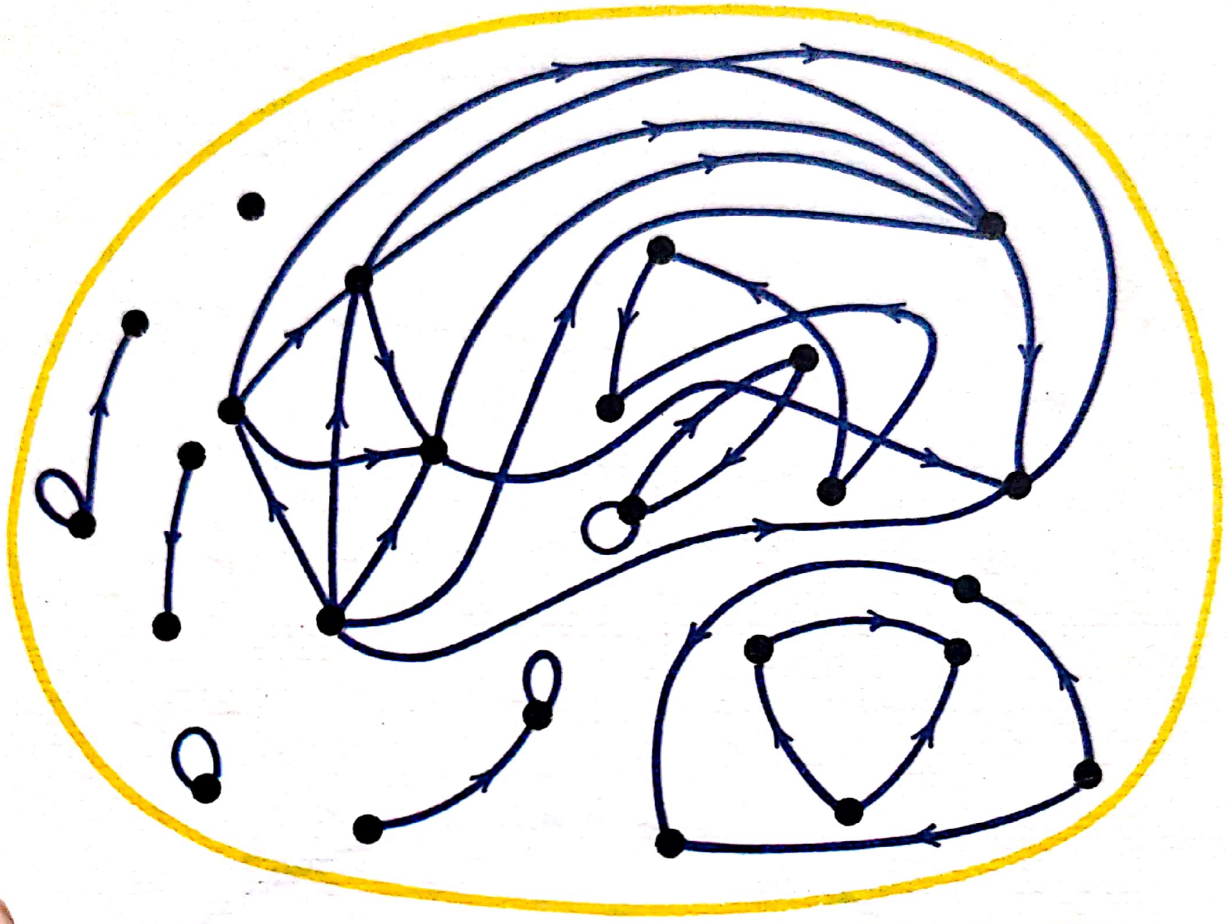
GRAFICUL 49

9. Relația R este tranzitivă
dacă și numai dacă
relația reciprocă R^{-1} este tranzitivă.

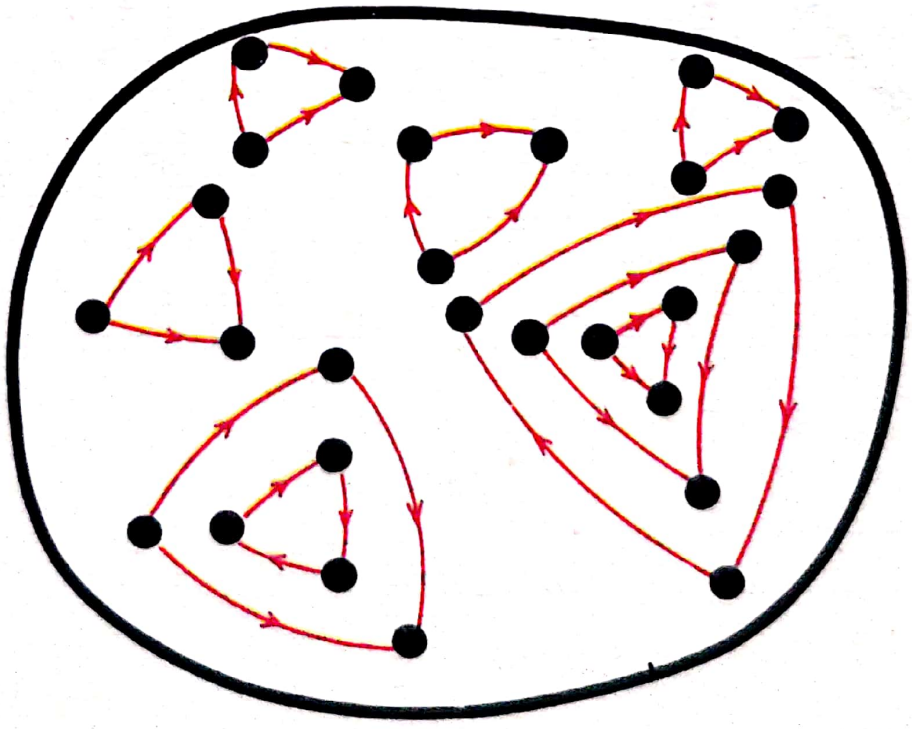
10. Relația ... *are ca tată* ... nu este tranzitivă.

11. Relația ... *are ca soră* ..., definită în omenire, nu este tranzitivă.

12. Graficele 50 şi 51 reprezintă oare relaţii tranzitive? De ce?



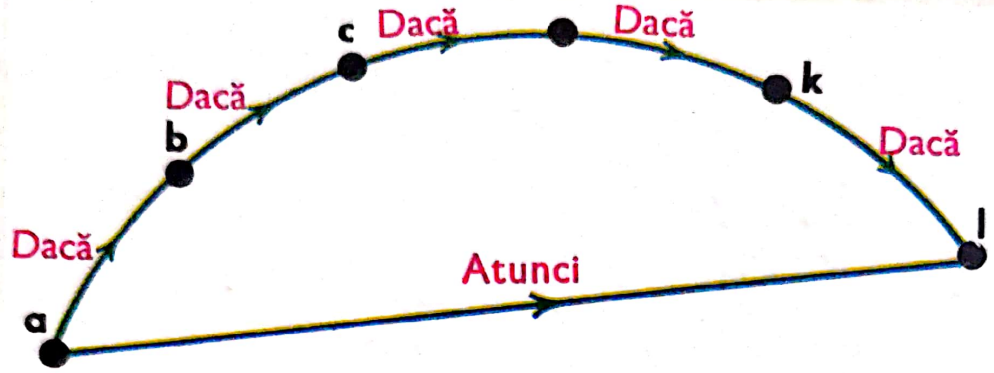
GRAFICUL 50



GRAFICUL 51

Scanned with OKEN Scanner

13. Dacă R este o relație tranzitivă și dacă perechile (a, b), (b, c), . . ., (k, l) aparțin lui R, avem încă $(a, l) \in R$.

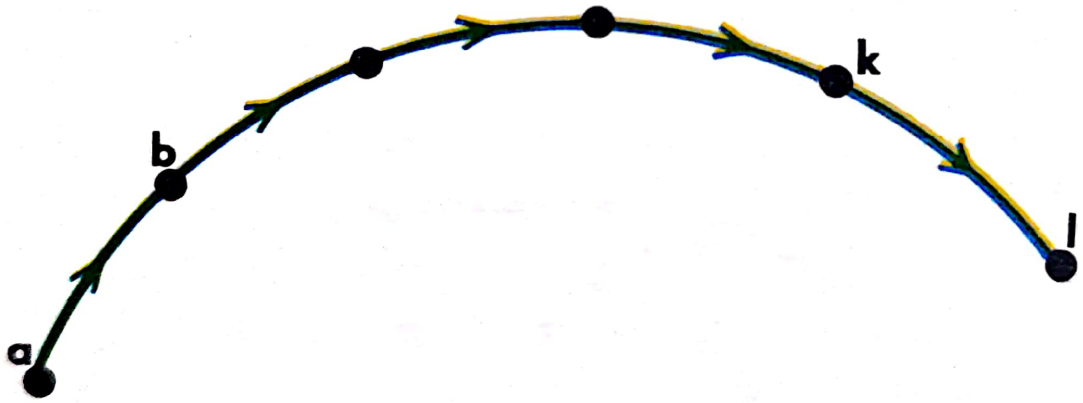


14. Relația || definită în $\mathfrak{D}$ este tranzitivă.

15. Comentați aforismul: « Prietenii prietenilor noștri sînt prietenii noștri».

16. Relația $\perp$ definită în $\mathfrak{D}$ nu este tranzitivă.

17. Ți se spune în mod sigur că relația R este tranzitivă și că $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$, . . ., $(k, l) \in R$.



GRAFICUL 52

Enumerați celelalte perechi care știți că aparțin relației R. Desenați graficul.

18. Fie R o relație definită într-o mulțime E.

R este reflexivă $\iff$ pentru orice $x \in E$: $(x, x) \in R$.

R este simetrică $\iff$ (pentru orice x, $y \in E$: $(x, y) \in R \iff (y, x) \in R$)

R este tranzitivă $\iff$ (pentru orice x, y, $z \in E$: $(x, y) \in R$ și $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$).

În loc să scriem $(x, y) \in R$ scriem $x \, R \, y$.

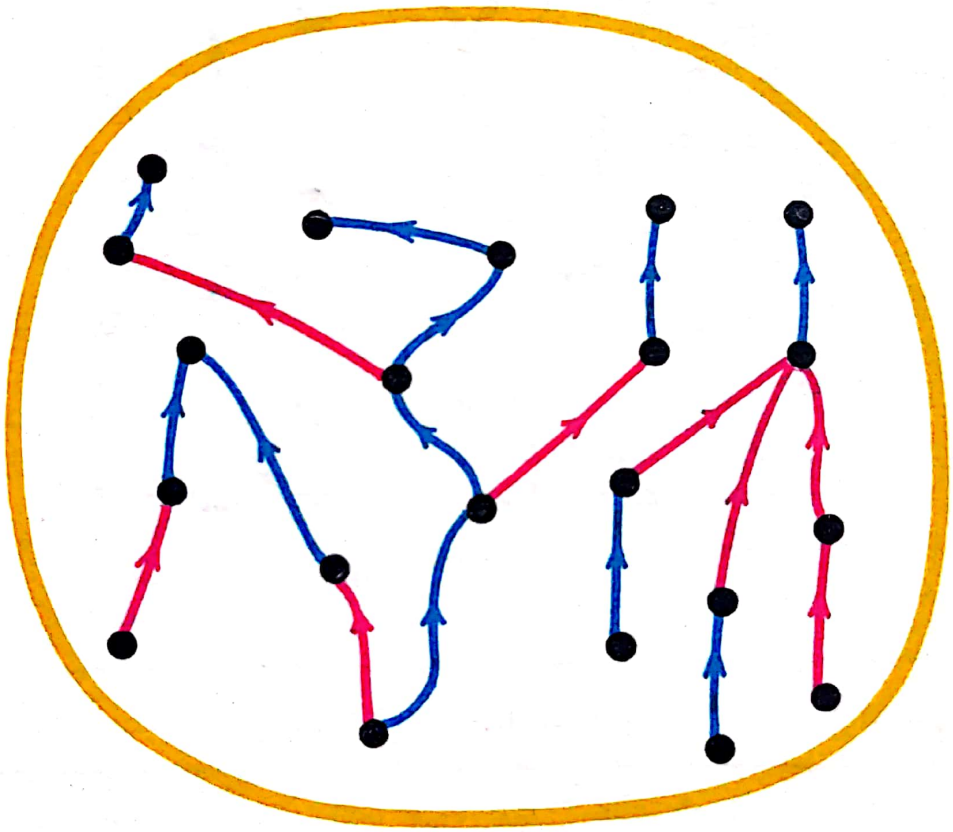
Formulați din nou definițiile de mai sus, utilizînd ultima notare.

Scanned with OKEN Scanner

9

Compunere de relaţii

1 — BUNICII



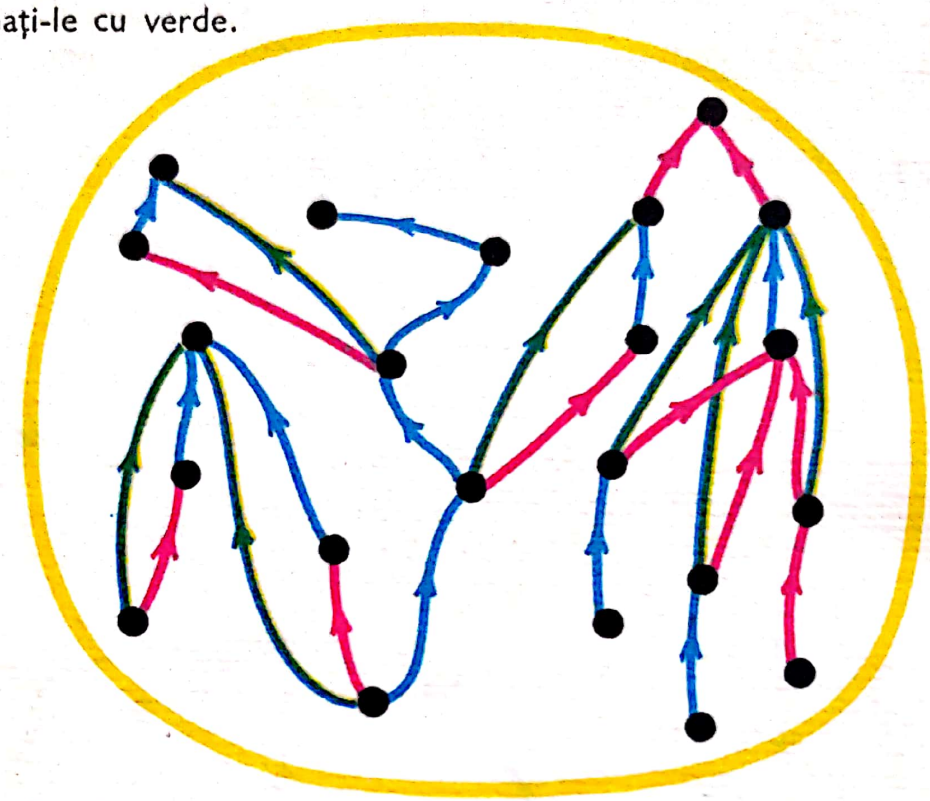
M : *are ca mamă*
P : *are ca tată*

GRAFICUL 53

Ce săgeţi ale relaţiei **M o P** : « *are ca bunică din partea tatălui* » puteţi trasa?

Scanned with OKEN Scanner

Desenați-le cu verde.



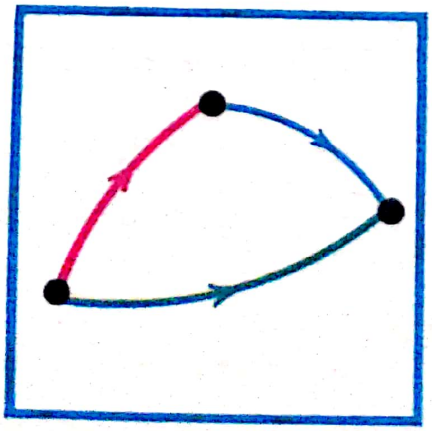
M : *are ca mamă*
P : *are ca tată*
M o P : *are ca bunică din partea tatălui*

GRAFICUL 54

Relația M o P este numită **compusa** *relațiilor P și M.*

Modul în care se va desena M o P este clar:

Cînd o săgeată a lui **P** merge de la *a* spre *b*, iar o săgeată a lui **M** merge de la *b* spre *c*, o săgeată a lui **M o P** merge de la *a* spre *c*.



GRAFICUL 55

Scanned with OKEN Scanner

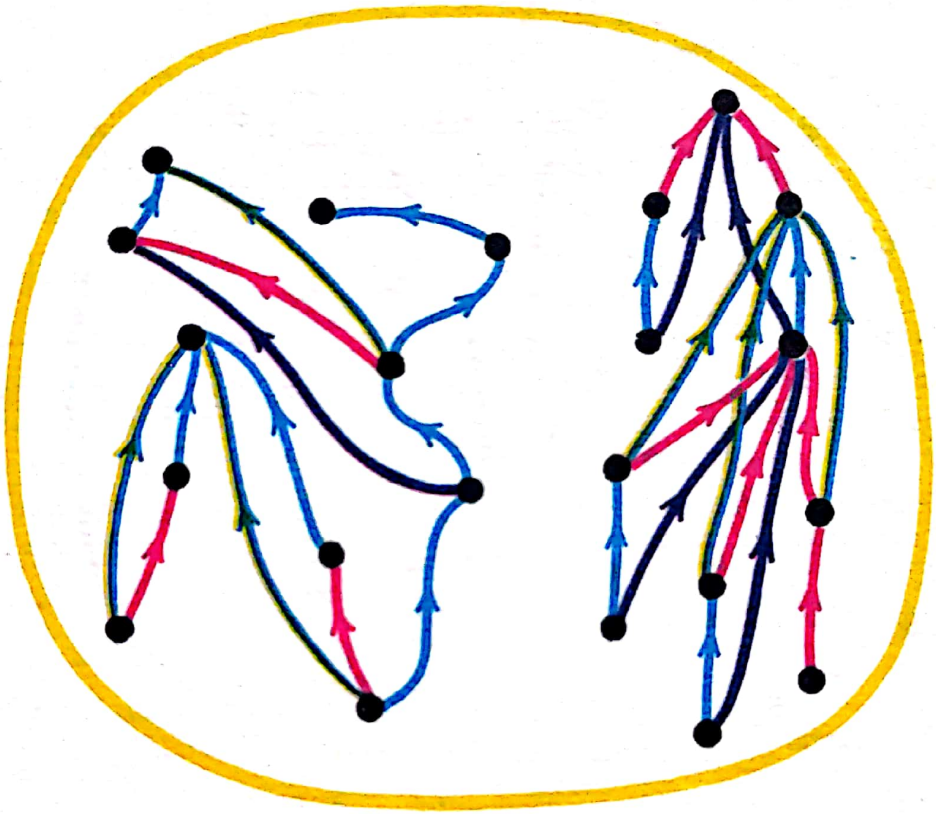
Care este relația **P o M?**
Este relația

. . . are ca bunic din partea mamei . . .

Bunicul tău din partea mamei nu este bunica ta din partea tatălui !
Verificați pe schemă că

$$P \circ M \neq M \circ P$$

Compoziția relațiilor M și P nu este comutativă.



M : *are ca mamă*
P : *are ca tată*
M o P : *are ca bunică din partea tatălui*
P o M : *are ca bunic din partea mamei*

GRAFICUL 56

Să compunem o relație cu ea însăși !

$$P \circ P = (. . . \textit{are ca bunic din partea tatălui} . . .)$$
$$M \circ M = (. . . \textit{are ca bunică din partea mamei} . . .)$$

Scriem deseori P^2 în loc de P o P și spunem că P^2 este pătratul lui P. Astfel un bunic din partea tatălui nu este decît un **tată pătrat !**

Desenați relațiile P^2 și M^2.

Ce poate oare reprezenta P^3?

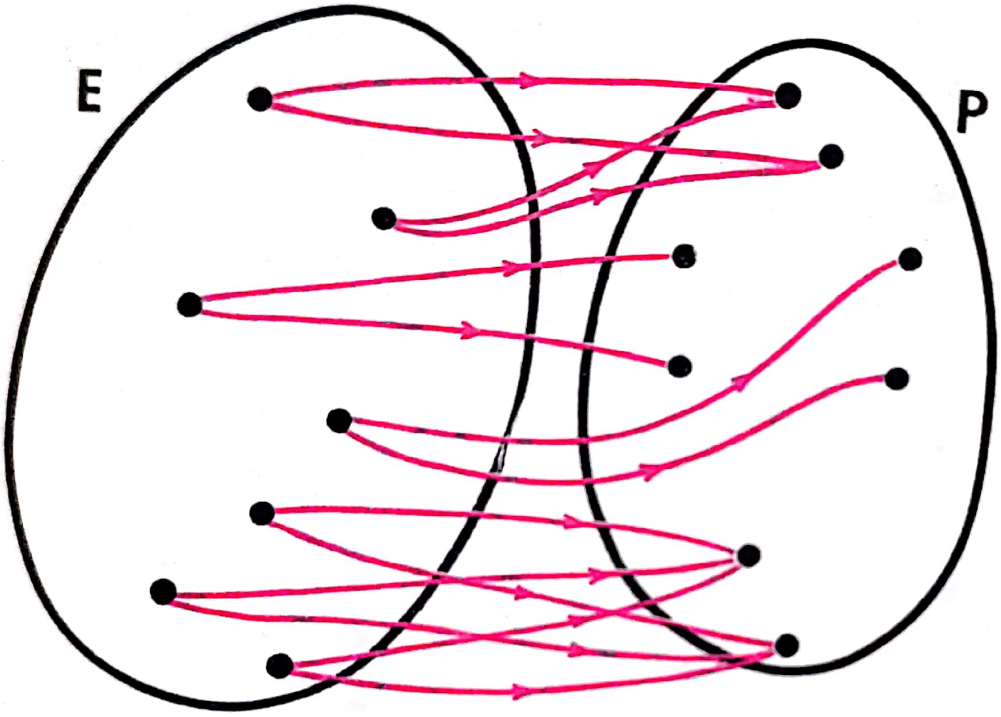
2 — COPII ȘI PĂRINȚI

Fie E o mulțime de șapte copii, iar P mulțimea părinților lor (tați și mame). Notăm cu A relația

. . . are ca părinte (tată sau mamă) . . .

Desenați un grafic pentru o situație de acest fel.

Fie de exemplu



A : *. . . are ca părinte (tată sau mamă) . . .*

GRAFICUL 57

— Desenați graficul relației reciproce

A^{-1} *. . .este tatăl sau mama lui . . .*

— Este foarte ușor, este suficient « să întoarcem săgețile lui A ».

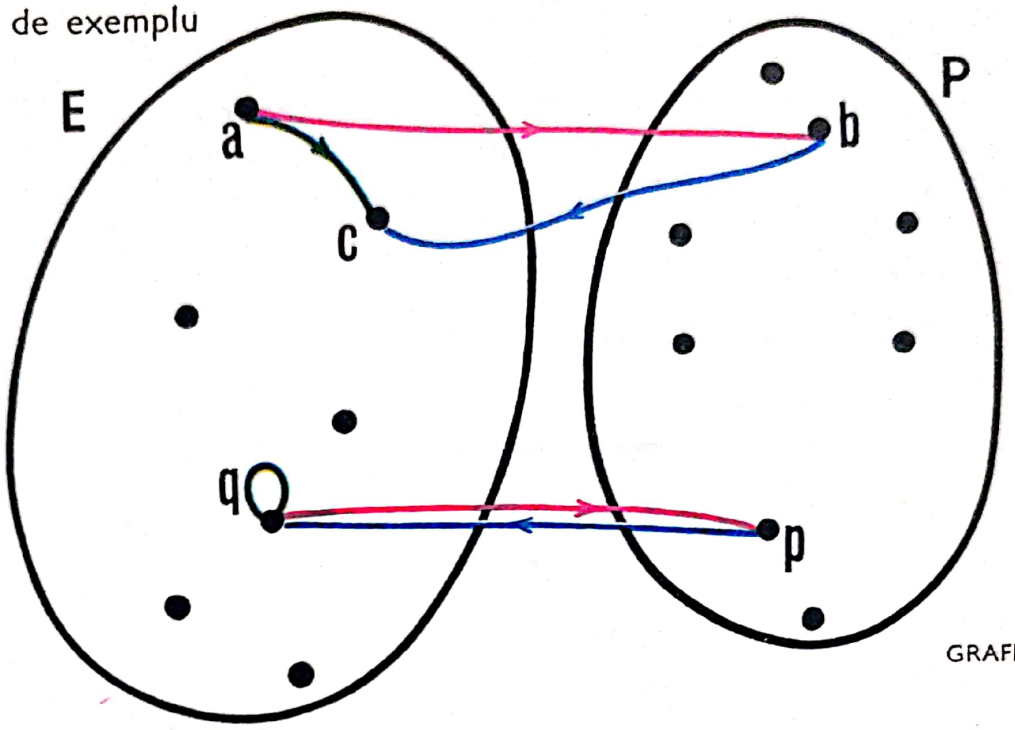
— Desenați graficul A^{-1} cu albastru.

Și desenați apoi un grafic al compusului $A^{-1} \circ A$

— Ori de cîte ori o săgeată albastră urmărește o săgeată roșie, desenăm una verde care merge din punctul de plecare al celei roșii pînă la punctul la care ajunge cea albastră.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel de exemplu

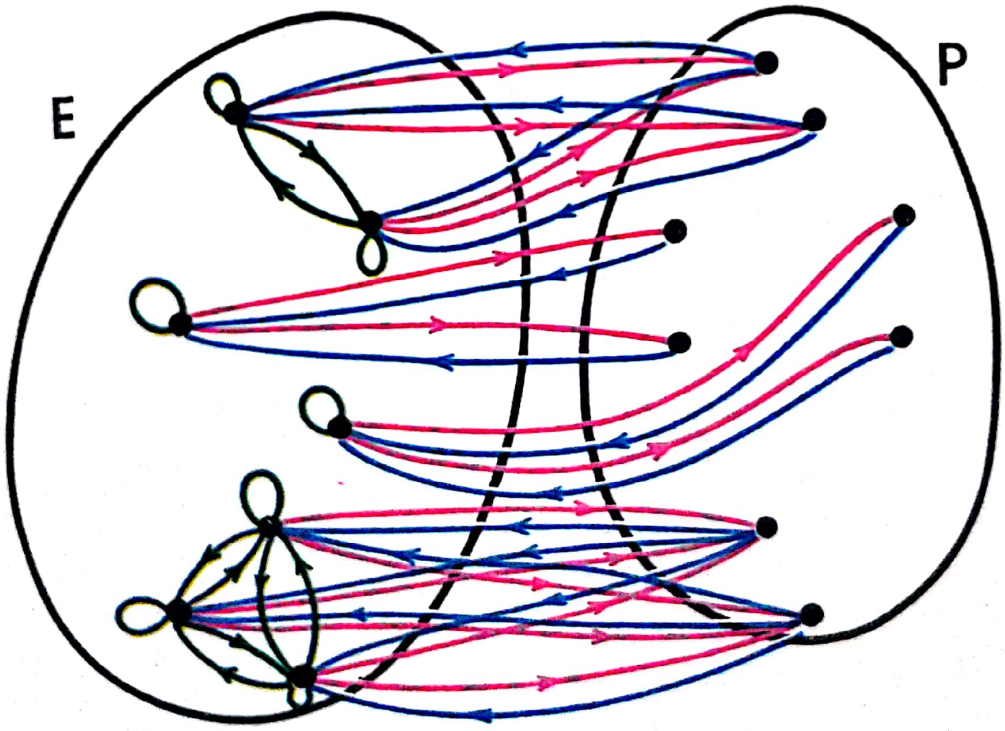


GRAFICUL 58

— O săgeată roşie merge de la *a* spre *b*, una albastră de la *b* spre *c:* deci, desenăm o săgeată verde de la *a* spre *c*. O săgeată roşie merge de la *q* spre *p*, una albastră de la *p* spre *q:* deci, desenăm una verde de la *q* spre *q*. Ea este o buclă !

— Nu uitaţi că nu trebuie să desenaţi mai mult de o săgeată de la un punct *x* spre un punct *y*.

Iată graficul final cerut.



A : . . . *are ca tată sau ca mamă . . .*

A^{-1} . . . *este tatăl sau mama lui . . .*

$A^{-1} \circ A$

GRAFICUL 59

— Cum să exprimăm relaţia $A^{-1} \circ A$?

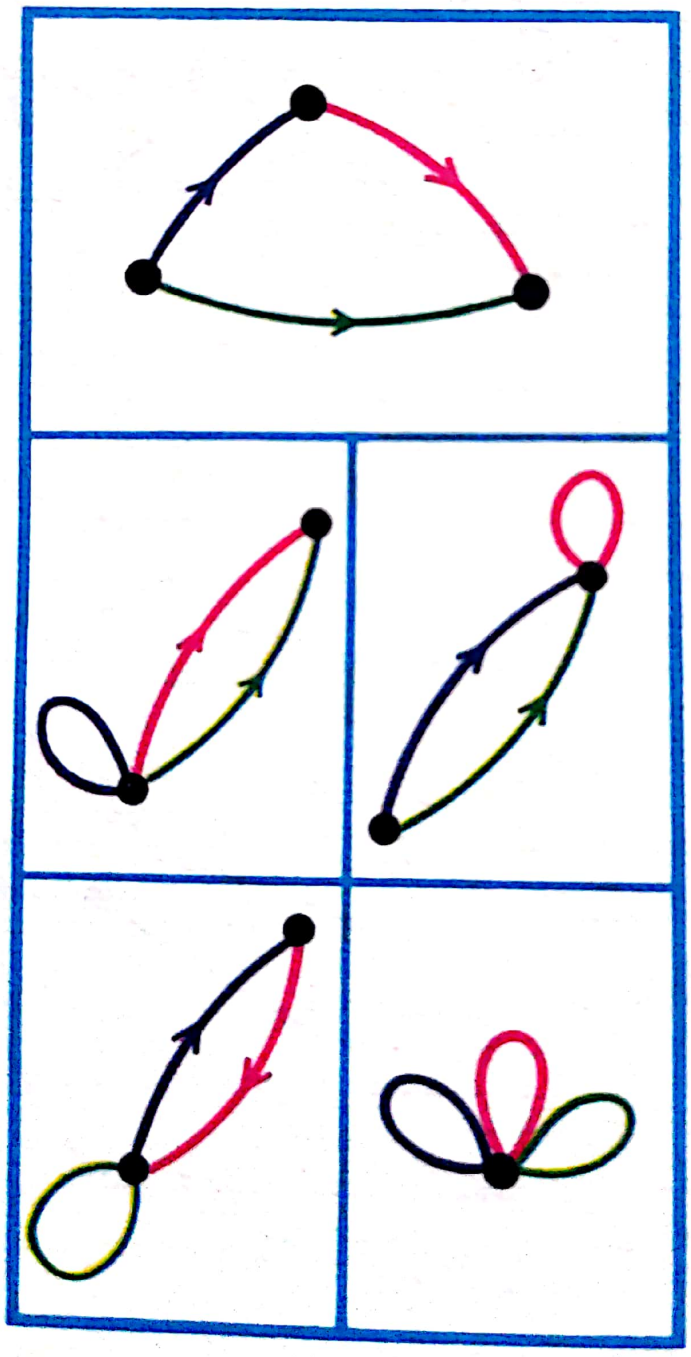
— $A^{-1} \circ A$: . . . *are aceiaşi părinţi ca . . .*

Scanned with OKEN Scanner

3 — TABLA DE COMPUNERE

Fie A o relație al cărei grafic nu conține decît o singură săgeată (mov). Fie B o relație al cărei grafic nu conține decît o singură săgeată (roșie) ; și să presupunem că această din urmă săgeată pleacă din punctul de sosire al săgeții mov a lui A.

Desenați graficele lui A, B, B o A în fiecare din cazuri : $a \neq b \neq c \neq a$, $a = b \neq c$, $a = c \neq b$, $a \neq b = c$, $a = b = c$.

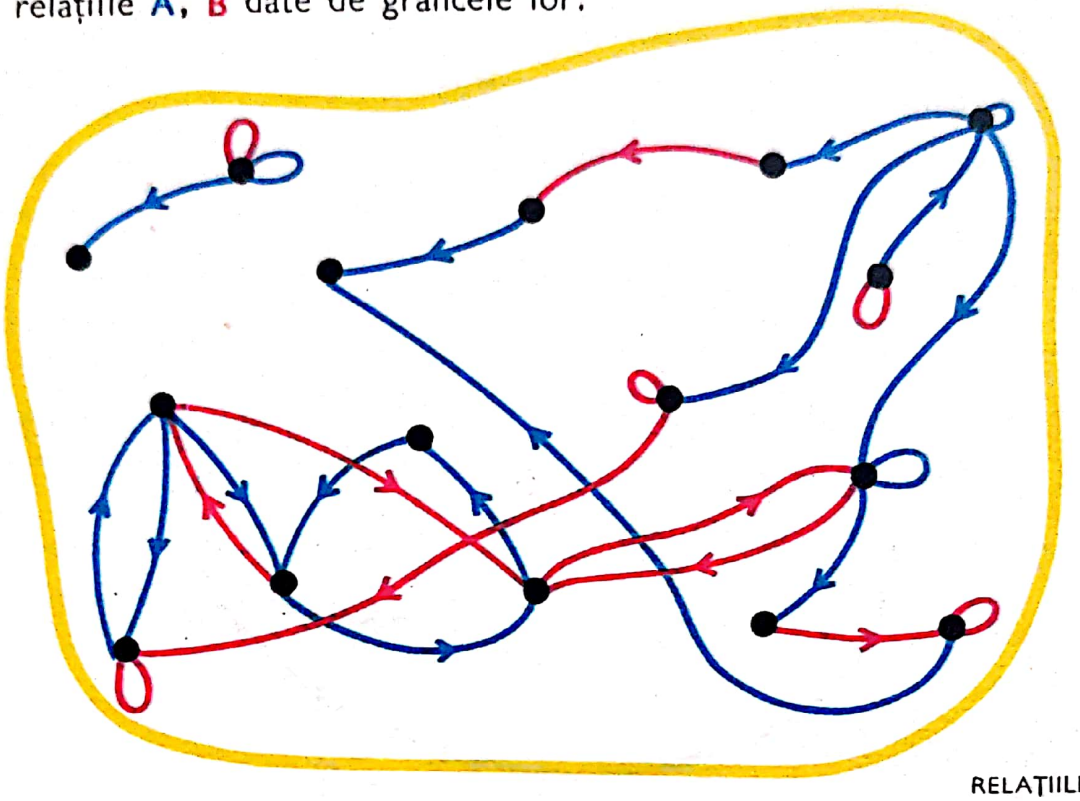


A, B, BoA

Scanned with OKEN Scanner

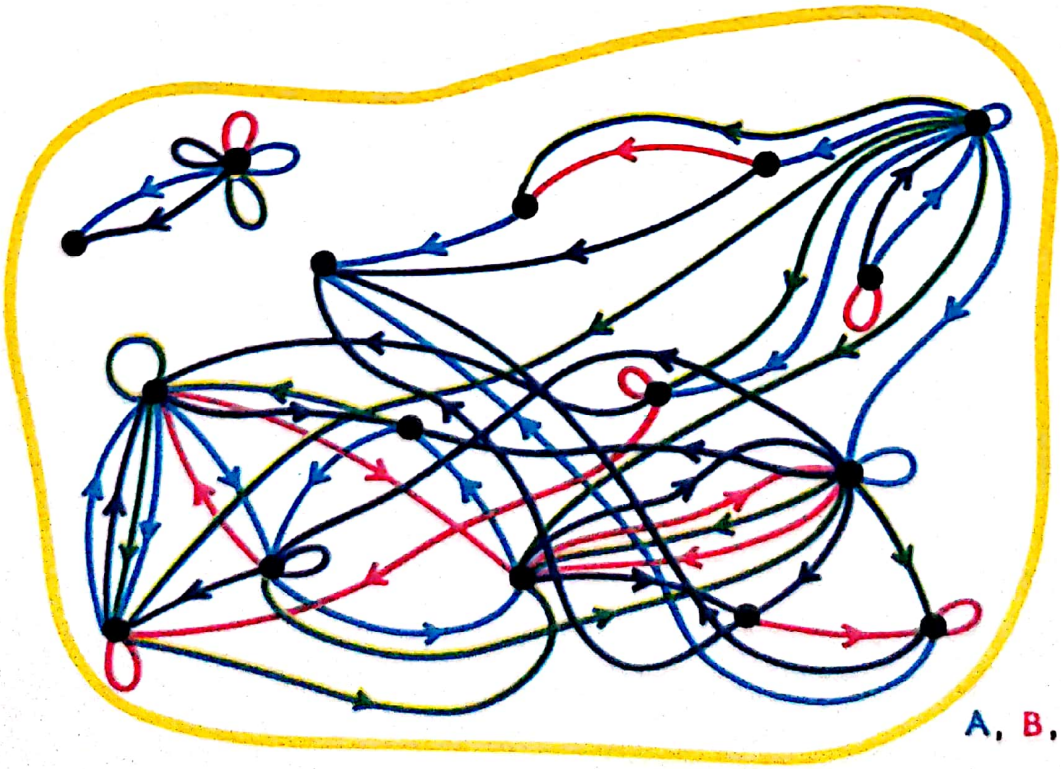
4 — COMPUNEREA UNOR RELAȚII OARECARE

Iată relațiile A, B date de graficele lor.



RELAȚIILE A, B
GRAFICUL 60

Desenați un grafic al relațiilor $B \circ A$, $A \circ B$, $A^2 = A \circ A$, $B^2 = B \circ B$?



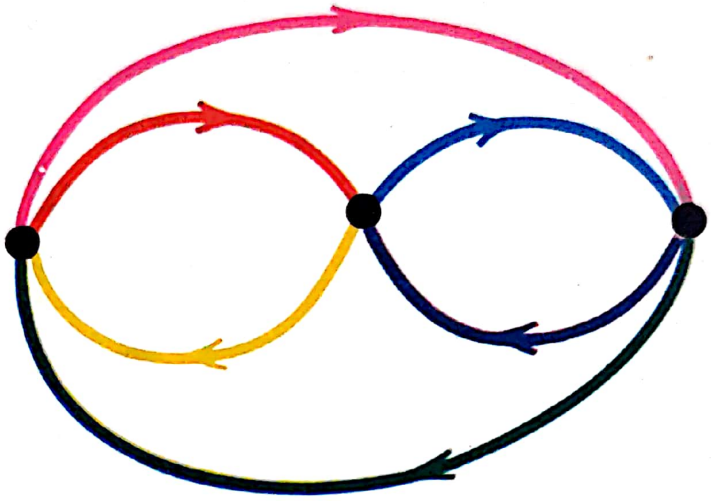
A, B, B o A, A o B
GRAFICUL 61

Scanned with OKEN Scanner

5 — DACĂ A ȘI B SÎNT RELAȚII, AVEM FORMULA

$$(B \circ A)^{-1} = A^{-1} \circ B^{-1}$$

Priviți acest desen



A, B

Completați legenda.

Cu ce culoare este cazul să scriem $B \circ A$, A^{-1}, B^{-1}?

Cărei relații îi aparține săgeata verde?

Formula anunțată nu este stabilită !

EXERCIȚIU

Care sînt relațiile

$$(M \circ P)^{-1},\ (P \circ M)^{-1},\ (M \circ M)^{-1},\ (P \circ P)^{-1}$$

în care M arată relația *are ca mamă*, iar P relația *are ca tată*?

6 — COMPUNEREA RELAȚIILOR ESTE ASOCIATIVĂ

Să notăm din nou cu P relația . . . ***are ca tată*** . . ., iar cu M relația . . . ***are ca mamă*** . . .

Vom spune mai simplu că P este relația **tată**, iar M relația **mamă**.

Relația P o M este deci relația **bunic din partea mamei**, iar M o P este relația **bunică din partea tatălui**.

Compusa M o (P o M) este relația

mama bunicului din partea mamei,

iar compusa (M o P) o M este relația

bunica mamei din partea tatălui.

Deoarece mama bunicului din partea mamei este bunica din partea tatălui a mamei, avem M o (P o M) = (M o P) o M.

EXERCIȚIU

Exprimați pe scurt, ca mai sus, relațiile

(P o P) o P	,	P o (P o P)
(M o M) o M	,	M o (M o M)
(P o P) o M	,	P o (P o M)
(M o P) o P	,	M o (P o P)
(M o M) o P	,	M o (M o P)
P o (M o M)	,	(P o M) o M
P o (M o P)	.	(P o M) o P

Care din termenii de mai sus exprimă aceeași relație?

Vom arăta că dacă fiecare din literele A, B, C arată o relație

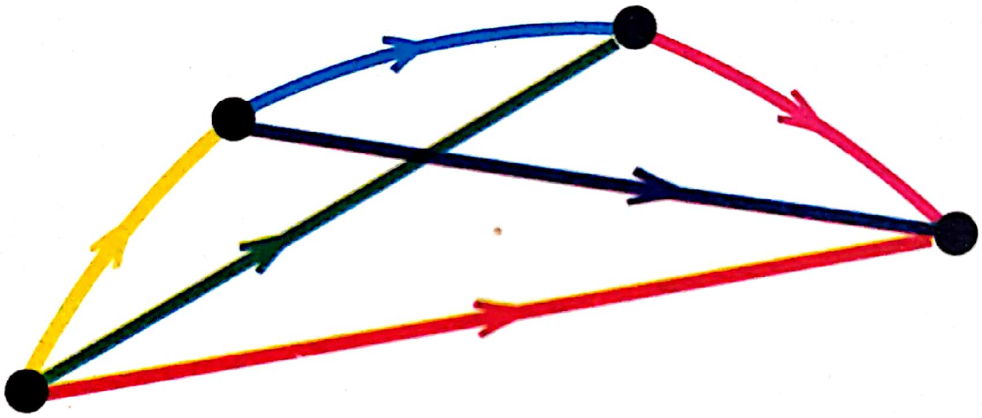
$$C \circ (B \circ A) = (C \circ B) \circ A$$

Această proprietate se enunță:

Compoziția este asociativă

Pentru a stabili această formulă, este inutil să desenăm un grafic complet. Ne vom limita să desenăm o schemă în care după o săgeată (galbenă) a lui A, urmează o săgeată (albastră) a lui B și o săgeată roșie a lui C. În mod excepțional, punctele negre vor indica obiecte distincte sau nu.

Să reprezentăm cu verde relația B o A și cu violet relația C o B.



$$C \circ (B \circ A) = (C \circ B) \circ A$$

Pentru a indica compusa a trei relații, ne vom putea dispensa, deci, de scrierea parantezei. Într-adevăr, există două feluri de a pune parantezele în expresia C o B o A și știm că termenii obținuți sînt egali.

Vom pune deci

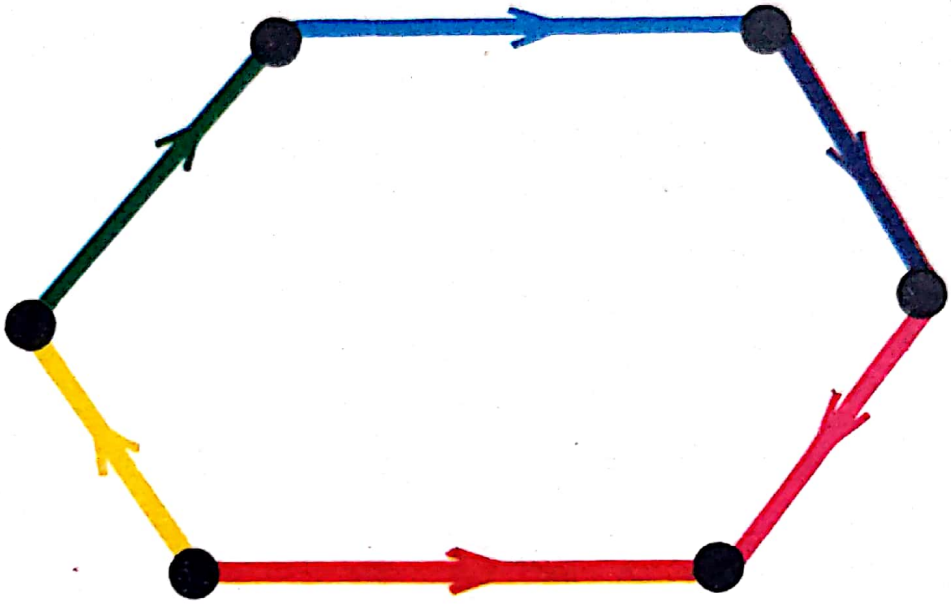
$$C \circ B \circ A = C \circ (B \circ A) = (C \circ B) \circ A$$

Verificați voi înșivă faptul că avem aceeași proprietate cînd compunem mai mult de trei relații.

Expresia E o D o C o B o A este clară pentru că toate modurile de a pune în ea parantezele duc la același rezultat.

Scanned with OKEN Scanner

Avem o săgeată a lui E o D o C o B o A ori de cîte ori avem una după alta o săgeată a lui A, o săgeată a lui B, o săgeată a lui C, o săgeată a lui D, o săgeată a lui E.



E o D o C o B o A

EXERCIȚII

1. Notați cu S relația *soră* definită într-o mulțime de fete și reprezentată prin graficul 9.
   Desenați un grafic al relației $S^2 = S \circ S$.
   Încercați să exprimați această relație.

2. Dacă F este relația *frate* și D relația *fiică*, care sînt relațiile $F \circ F$, $D \circ D$, $F \circ D$, $D \circ F$, $(F \circ F) \cup (F \circ D)$?

3. $||$ este o relație definită în mulțimea $\mathfrak{D}$ a dreptelor din planul Π. Arătați că $|| \circ || = ||$

4. Ce este un «tată cub»?

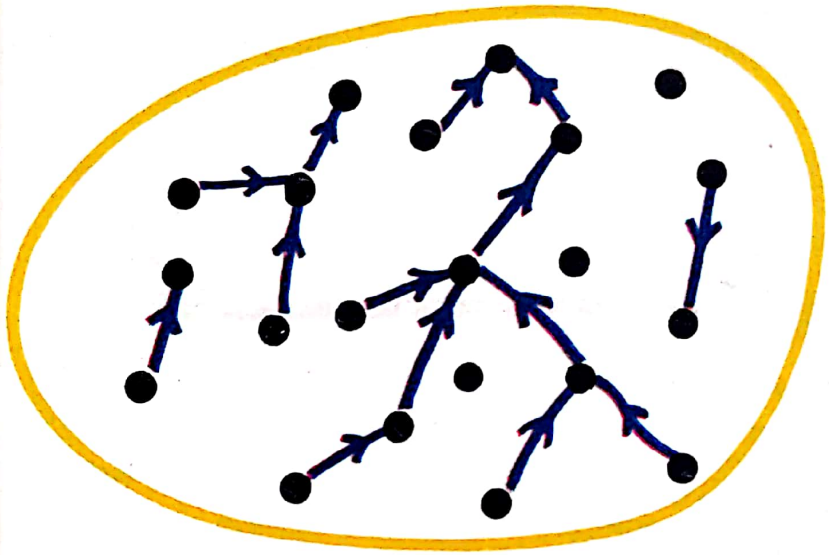
5. $\perp$ este o relație definită în mulțimea $\mathfrak{D}$
   Arătați că $\perp^2 = \perp \circ \perp = ||$
   $\perp \circ || = || \circ \perp = \perp$

Scanned with OKEN Scanner

6. Calculați $\perp^3$, $||^8$, $\perp^{17}$, $\perp^5$, $\perp^{128}$,
$\perp^3 \circ ||^2 \circ \perp^5 \circ ||^8 \circ \perp^7 \circ ||^7$

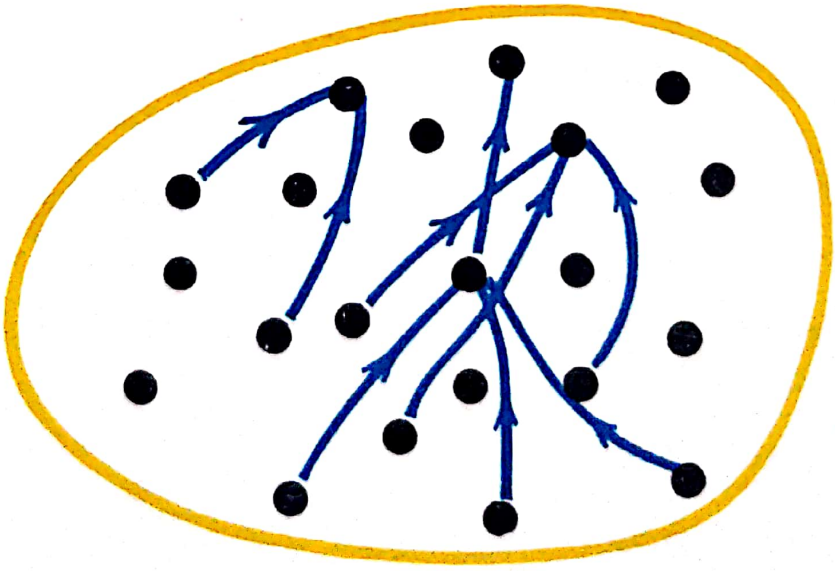
7. Desenați un grafic al pătratului relației | reprezentată de graficul 12.
Ce observați?
Calculați $|^9$.

8. Să notăm cu P relația *tată* reprezentată de graficul 62.
Desenați un grafic al relațiilor P^2, P^3, P^4, P^5.



P

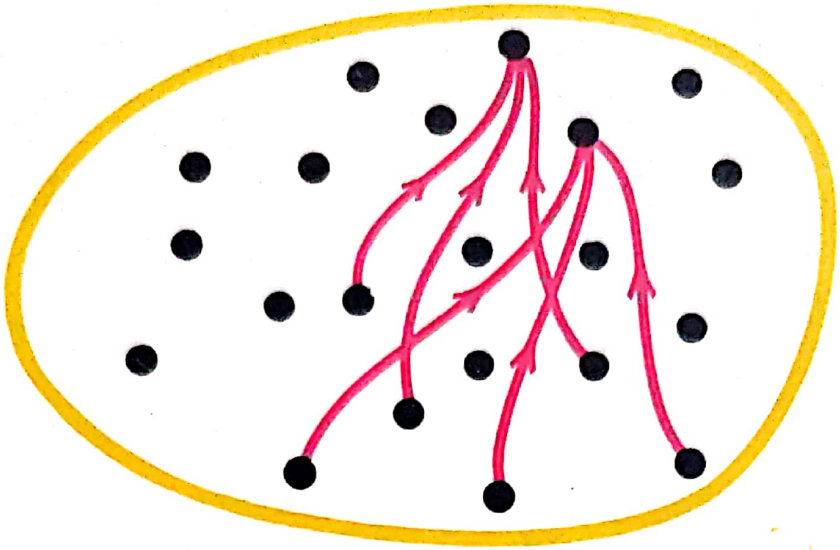
GRAFICUL 62



P^2

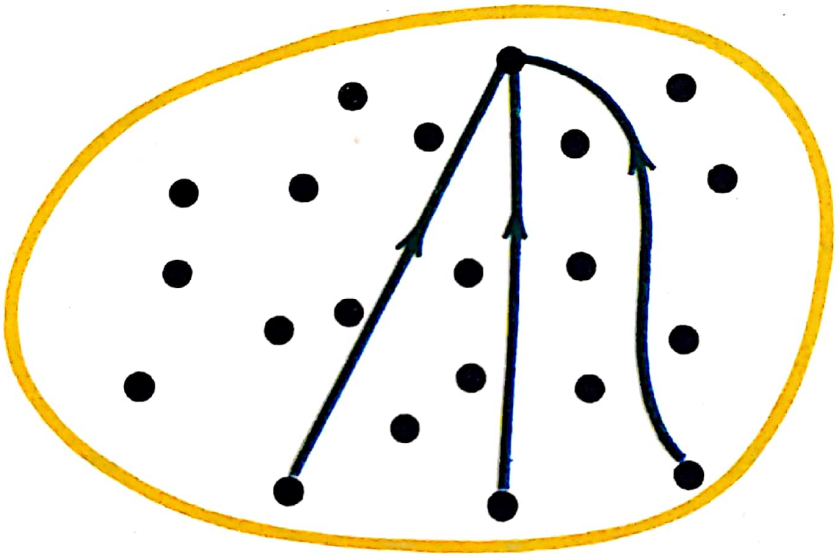
GRAFICUL 63

Scanned with OKEN Scanner



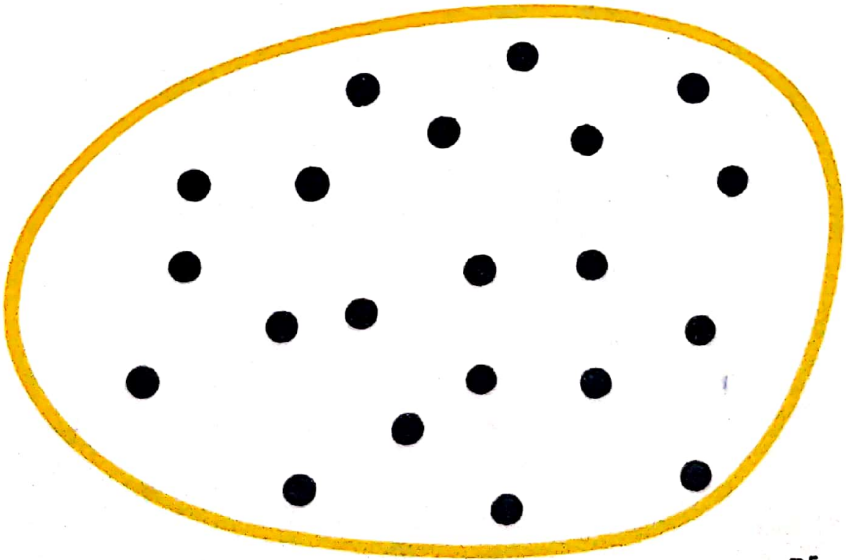
P^3

GRAFICUL 64



P^4

GRAFICUL 65



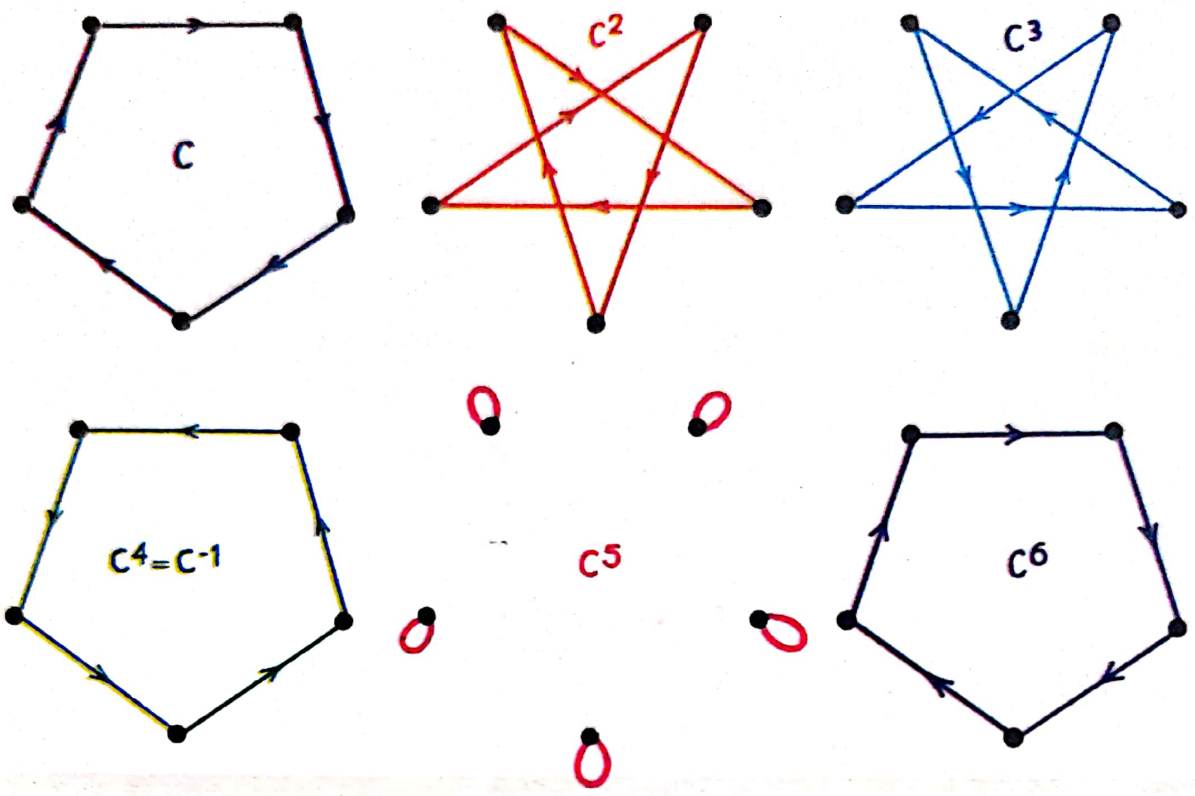
RELAȚIA VIDĂ

$P^5 = P^6 = \cdots = \varnothing$

GRAFICUL 66

Scanned with OKEN Scanner

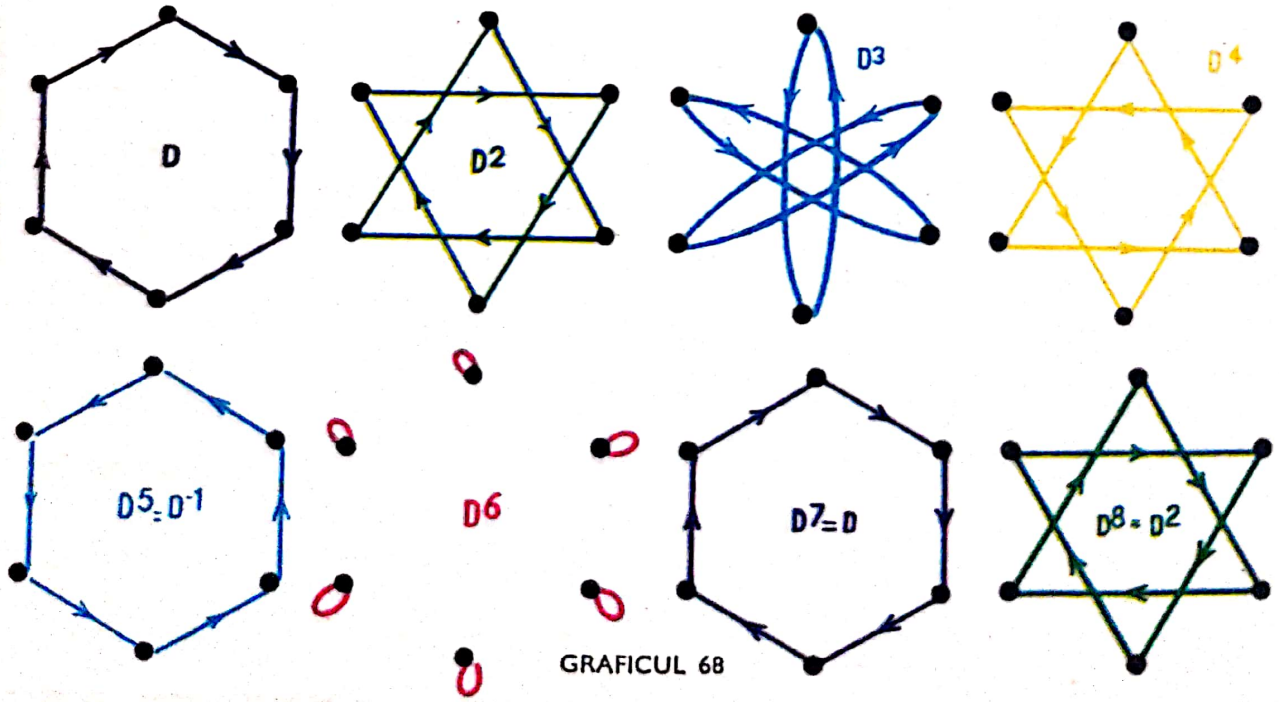
9. Desenați grafice ale puterilor ciclului C definit pe o mulțime de cinci puncte.



GRAFICUL 67

Unde sînt graficele relațiilor C^7, C^8, C^{17}, C^{19}, C^{100}, $C^{1.000.000}$?

10. Desenați grafice pentru puterile *ciclului* D definit pe o mulțime de 6 puncte.



GRAFICUL 68

Scanned with OKEN Scanner

11. Notăm cu S relația *soră* și cu M relația *mamă* definite în mulțimea ființelor omenești vii și moarte.
Care este relația S o M?
O formulăm M o S $\subset$ M.
De ce nu avem M o S = M? (Faceți un desen!)

12. Relația T este tranzitivă $\Leftrightarrow$ T o T $\subset$ T.

13. În cîte feluri puteți pune parantezele în expresia D o C o B o A?

14. Calculați $(M \circ P)^{-1}$, $(M \circ P \circ M)^{-1}$

15. Care este relația P^3?
Arătați că relația $(P^{-1})^3 = (P^3)^{-1}$
Nu este firesc să punem $P^{-3} = (P^{-1})^3 = (P^3)^{-1}$?
Calculați $P^{-3} \circ P^5$, $P^7 \circ P^{-9}$.

Scanned with OKEN Scanner

10

Echivalenţe

1 — A CLASA PENTRU A CUNOAŞTE, A ÎNŢELEGE, A REŢINE

Pierre este tăcut: el îşi aranjează colecţia sa de timbre.

Încetul cu încetul se formează mici grămezi aliniate.

Sarcina a fost îndeplinită: timbrele sînt clasate pe ţări ! Astfel Pierre îşi cunoaşte mai bine scumpa sa colecţie.

Să nu credeţi că aceasta este singura clasificare admisă de Pierre. Amicul nostru este foarte priceput. Cînd îşi clasează timbrele pe ţări, cînd pe culori, cînd pe valoarea indicată, cînd pe mătuşi . . . căci mătuşile lui Pierre sînt singurele care îi îmbogăţesc colecţia sa.

Pierre este foarte sensibil faţă de frumuseţe şi foarte sigur de el, îşi mai clasează timbrele în urîte, frumoase, foarte frumoase şi super-frumoase.

Oamenii reacţionează în faţa celor mai diverse situaţii ca Pierre faţă de timbrele sale: pentru a cunoaşte, înţelege şi reţine . . . ei clasează.

Noi clasăm cuvintele în substantive, adjective, verbe, adverbe, pronume, conjuncţii, interjecţii, articole.

Clasăm animalele în vertebrate şi nevertebrate.

Echipele de fotbal pe ţări, în echipe de amatori şi de profesionişti, pe categorii.

A clasa o mulţime E, înseamnă a **da o diviziune *P* a mulţimii *E*.**

Reamintiţi definiţia diviziunii.

— *Se numeşte* ***diviziune*** *a mulţimii E orice mulţime* $\mathcal{P}$ *de părţi* ***nevide*** *ale lui E, astfel încît orice element al lui E să aparţină* ***unei mulţimi*** *— element al lui* $\mathcal{P}$ *şi* ***numai uneia singure.***

— *Elementele lui* $\mathcal{P}$ *sînt numite* ***clasele diviziunii.***

Atunci cînd Pierre împarte colecţia sa în mici grămăjoare, el creează o diviziune pentru că

1. nici o grămăjoară nu este vidă,
2. oricare timbru se găseşte într-o grămăjoară,
3. într-una singură.

Scanned with OKEN Scanner

Aceste diviziuni sînt aproape întotdeauna date de relații ca

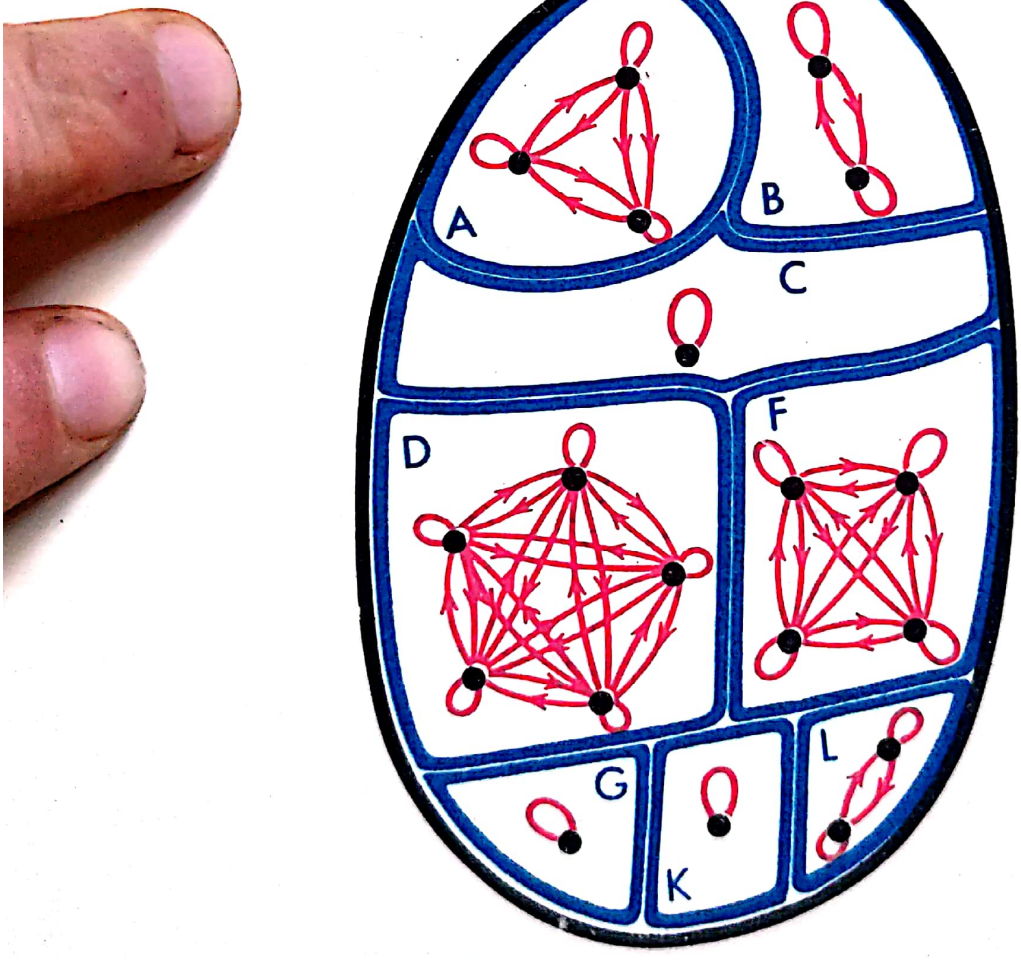
. . . este din aceeași țară ca . . .
. . . este de aceeași culoare ca . . .

Invers, orice diviziune $\mathcal{P}$ dă o relație:

. . . aparține aceleiași clase $\mathcal{P}$ ca . . .

— Faceți o diviziune $\mathcal{P}$ a unei mulțimi de 19 obiecte în 8 clase. Trasați o diagramă a diviziunii $\mathcal{P}$ și un grafic al relației

. . . aparține aceleiași clase $\mathcal{P}$ ca . . .



DIVIZIUNEA $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, F, G, K, L\}$ A MULȚIMII **E**.

RELAȚIA *. . . este un element al aceleiași clase a lui $\mathcal{P}$ ca . . .*

GRAFICUL 69

Scanned with OKEN Scanner

— Ce proprietăți recunoașteți relației

. . . este un element al aceleiași clase a lui $\mathcal{P}$ *ca . . .*

Această relație este *reflexivă, tranzitivă, simetrică.*

DEFINIȚIE — *Orice relație care este în același timp* ***reflexivă, tranzitivă, simetrică*** *se numește* ***echivalență.***

Astfel relația

. . . este un element al aceleiași clase a diviziunii $\mathcal{P}$ *ca . . .*

este o **echivalență !**

Am văzut că

Orice diviziune dă o echivalență

EXEMPLU — Relația $||$ definită în mulțimea $\mathfrak{D}$ a dreptelor lui Π este o echivalență. Într-adevăr

Relația $||$ este *reflexivă:* pentru orice $D \in \mathfrak{D}$, avem $D \,||\, D$.
Relația $||$ este *tranzitivă:* dacă $A, B, C \in \mathfrak{D}$, atunci $A \,||\, B \,||\, C \Rightarrow A \,||\, C$
Relația $||$ este *simetrică:* dacă $A, B \in \mathfrak{D}$, atunci $A \,||\, B \iff B \,||\, A$.

EXERCIȚII

Relația $\perp$ definită în mulțimea $\mathfrak{D}$ a dreptelor lui Π nu este o echivalență. (Relația $\perp$ este simetrică, nu reflexivă, nu tranzitivă).

Scanned with OKEN Scanner

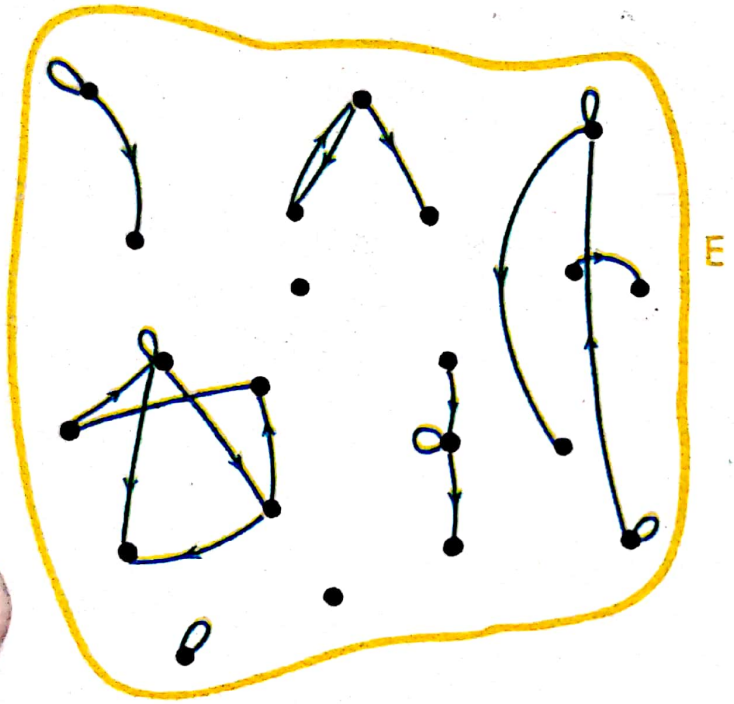
2 — DIVIZIUNEA DEFINITĂ DE O RELAȚIE

Fie R o relație definită într-o mulțime E.

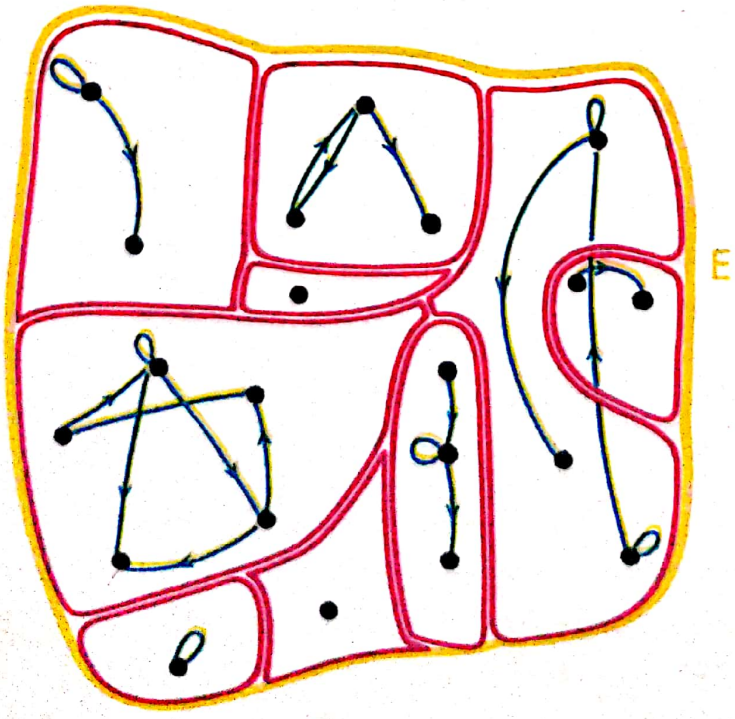
Gîndiți-vă la graficul ei.

Din acesta se vede o diviziune a mulțimii E.

Veți pune două puncte distincte ale lui E în aceeași clasă a diviziunii, dacă și numai dacă ele sînt legate printr-o linie a graficului, adică dacă și numai dacă se poate merge de la unul din aceste puncte la celălalt, urmînd liniile graficului, dar să ținem seama de sensul săgeților.



O RELAȚIE R
DEFINITĂ ÎN MULȚIMEA E
GRAFICUL 70



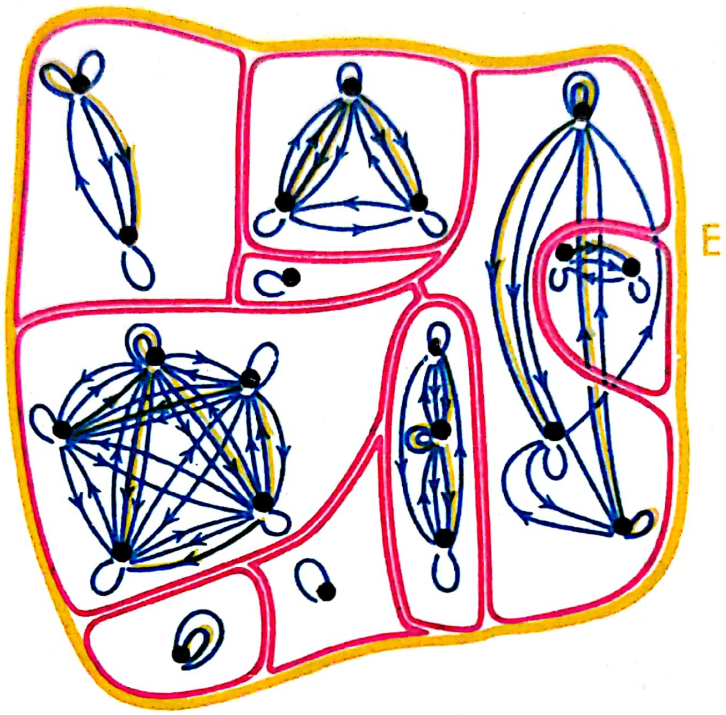
RELAȚIA R
DEFINITĂ ÎN MULȚIMEA E
DIVIZIUNEA $\mathcal{P}$
DATĂ DE R
$R \rightarrow \mathcal{P}$
GRAFICUL 71

Scanned with OKEN Scanner

În paragraful precedent am văzut că o diviziune dădea o echivalență. Ați putea trasa echivalența Q definită de $\mathcal{P}$?

Această echivalență se obține luînd toate perechile lui R și adăugîndu-i unele (deci $R \subset Q$).

Dacă R ar fi fost o echivalență, n-ar fi trebuit să adăugăm nimic (vezi graficul 69).



RELAȚIA R DEFINITĂ ÎN E
DIVIZIUNEA $\mathcal{P}$ DEFINITĂ DE R
ECHIVALENȚA Q DATĂ DE $\mathcal{P}$

$$R \to \mathcal{P} \to Q \to \mathcal{P} \to Q \to \mathcal{P}$$

GRAFICUL 72

Rezumăm aceste rezultate în formulele

$$R \xrightarrow{\text{dă}} \mathcal{P} \xrightarrow{\text{dă}} Q \xrightarrow{\text{dă}} \mathcal{P} \xrightarrow{\text{dă}} Q \xrightarrow{\text{dă}} \mathcal{P}$$

În cazul unei echivalențe avem deci

$$\mathcal{P} \rightleftarrows Q$$

diviziune — echivalență

Pe scurt

> Diviziunea $\mathcal{P}$ și echivalența Q rezultă una din alta.

EXERCIȚII

1. Graficele 5, 6, 21, 28, 69 reprezintă echivalențe. De ce?

2. Relațiile reprezentate de graficele 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 40, 41, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 57, 62, 63, 64, 65, 66, 70, 71 nu sînt echivalențe. De ce?

3. Într-o mulțime de fete, relația soră nu este o echivalență. De ce?

4. Relația de **egalitate** definită într-o mulțime E este o echivalență! Recitește paragrafele 5 și 6 din capitolul 1.

5. Dacă a și b indică obiecte distincte, scriem $a \neq b$. (a este diferit de b). Relația $\neq$ este **antireflexivă, netranzitivă, simetrică, neantisimetrică.** Această relație *nu* este o echivalență. De ce?

6. Relația $|$ nu este o echivalență. De ce?

7. Relația *. . . are aceiași părinți ca . . .* este o **echivalență.**

8. Considerăm numere întregi scrise în numerația zecimală.
Relațiile *. . . se termină cu aceeași cifră ca . . .*
. . . are aceeași sumă de cifre ca . . . sînt echivalențe.

9. Diviziunea dată de relația pe care o definește graficul 1 cuprinde două clase.

10. Care sînt diviziunile date de relațiile pe care le definesc graficele 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 36, 44, 45, 46, 48, 51?

11. Întoarceți-vă la graficul 51. Desenați diagramele diviziunii definită de această relație. Desenați un grafic al echivalenței definită de această diviziune.

12. Într-o mulțime de femei, relația *. . . se duce la același coafor ca . . .* este o echivalență?

Scanned with OKEN Scanner

13. Comentați acest aforism « relația *iubește* nu posedă nici una din proprietățile echivalenței».

14. Care este diviziunea mulțimii $\mathfrak{D}$ definită de echivalența $||$?

15. Care este echivalența definită de diviziunea *dir* D a lui Π (cu $D \in \mathfrak{D}$)?

16. Relația ... *intersectează* ... definită în $\mathfrak{D}$ nu este o echivalență.

17. Care este diviziunea definită de $\perp$ în $\mathfrak{D}$?

18. Știți că orice relație dă o diviziune care dă la rîndul ei o echivalență. Astfel, orice relație dă o echivalență: este cea mai mică echivalență, care conține relația dată.

19. Relația $\perp$ (definită în mulțimea $\mathfrak{D}$ a dreptelor din plan) dă echivalența $\perp \cup ||$. Cu alte cuvinte: $\perp \cup ||$ este cea mai mică echivalență care conține relația $\perp$ (definită în mulțimea $\mathfrak{D}$ a dreptelor din plan).

Scanned with OKEN Scanner

11

Ordine

1 — IERARHII ŞI ORDINE

Societăţile sînt ierarhizate: fiecare trebuie să asculte de superiorii săi.

O ierarhie, într-o societate, defineşte o relaţie în mulţimea indivizilor ei.

Să vedem care sînt proprietăţile unor astfel de relaţii.

Dacă *a* trebuie să asculte de *b*, se va desena o săgeată de la *a* spre *b*.

Soldatul ascultă de caporal, acesta de sergent, sergentul de locotenent etc. . .

Dacă soldatul întîlneşte un locotenent, el va trebui să-i dea ascultare.

Relaţia definită de o ierarhie trebuie să fie **tranzitivă.**

Este evident că prezenţa situaţiei

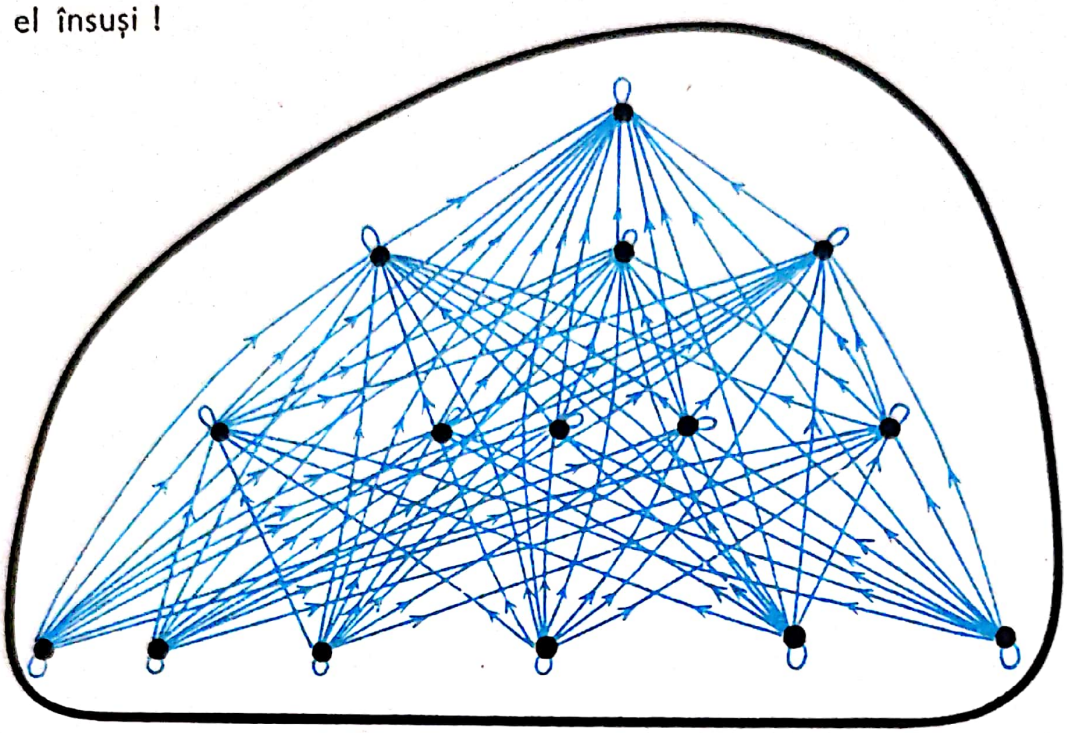
în graficul unei ierarhii ar fi catastrofală.

Relaţia definită de o ierarhie trebuie să fie **antisimetrică.**

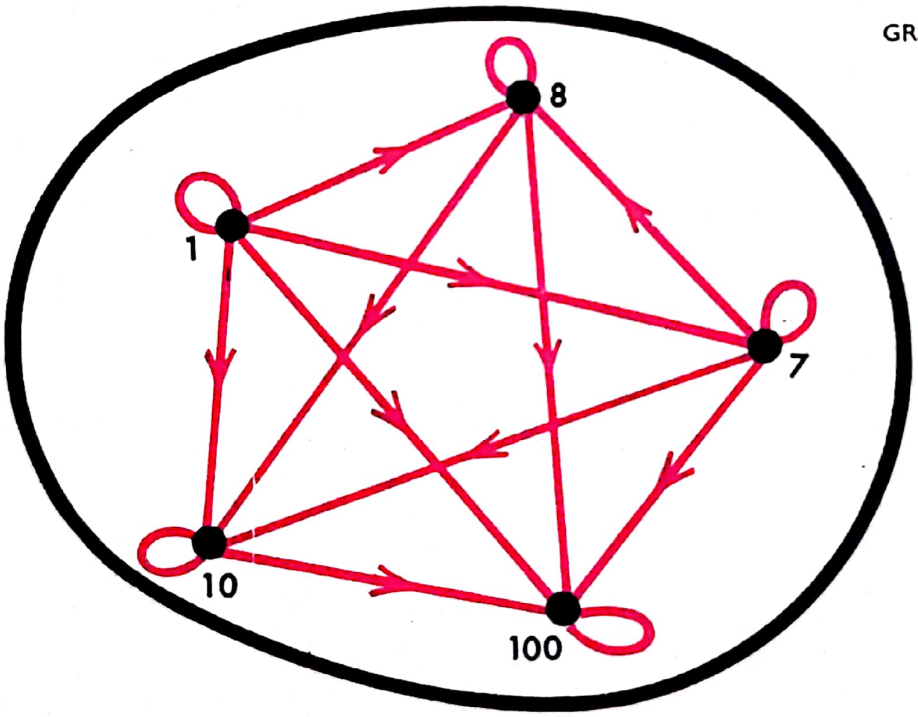
Tranzitivitatea şi *antisimetria*, acestea sînt proprietăţile indispensabile ale unei relaţii definită de o ierarhie.

DEFINIŢIA 1 — *Vom numi* **ordine** *orice relaţie care este în acelaşi timp* ***reflexivă, tranzitivă*** *şi* ***antisimetrică.***

Astfel, fiecare va avea consolarea de a fi ascultat de o persoană (cel puțin): de el însuși !



ORDINEA ÎN ARMATĂ
GRAFICUL 73



$\leqslant$

GRAFICUL 74

Ordinele reprezentate de graficele 73 și 74 prezintă o diferență esențială: în primul caz se pot găsi puncte a, b astfel că nici o săgeată să nu meargă de la a spre b, nici de la b spre a.

În al doilea caz, această eventualitate nu se produce.

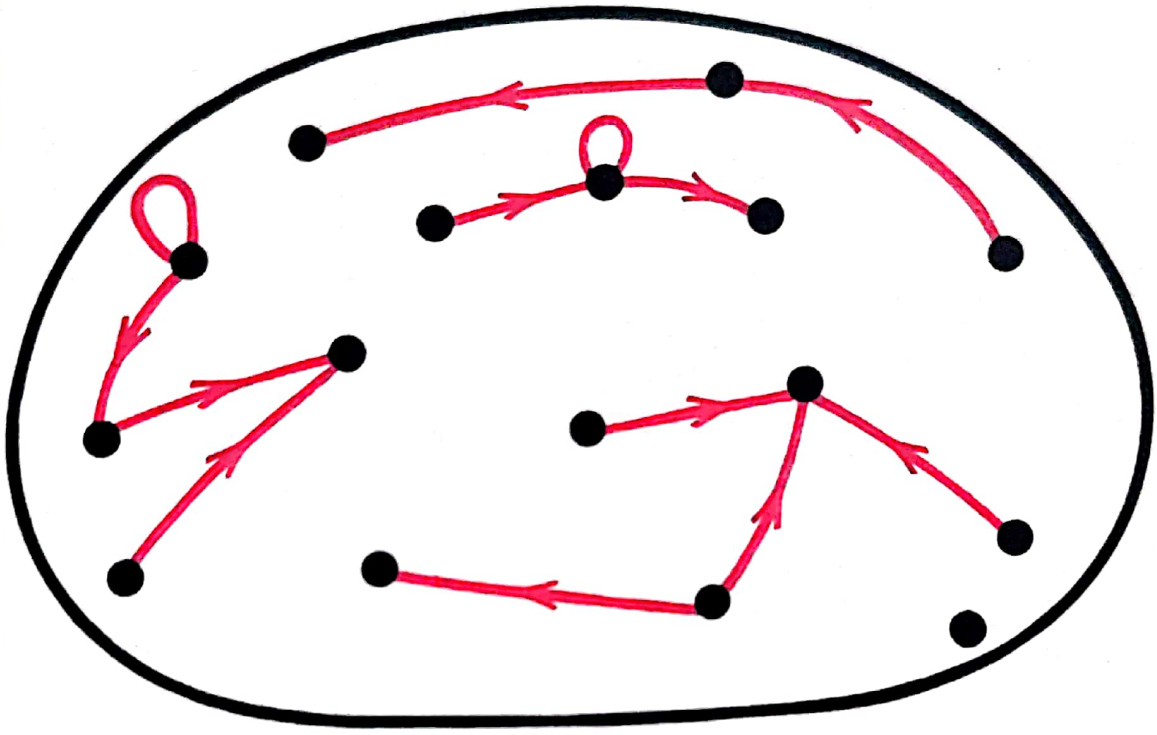
Exprimăm acest lucru spunînd că ordinea $\leqslant$ este **totală.**

În armată ordinea nu este totală !

Scanned with OKEN Scanner

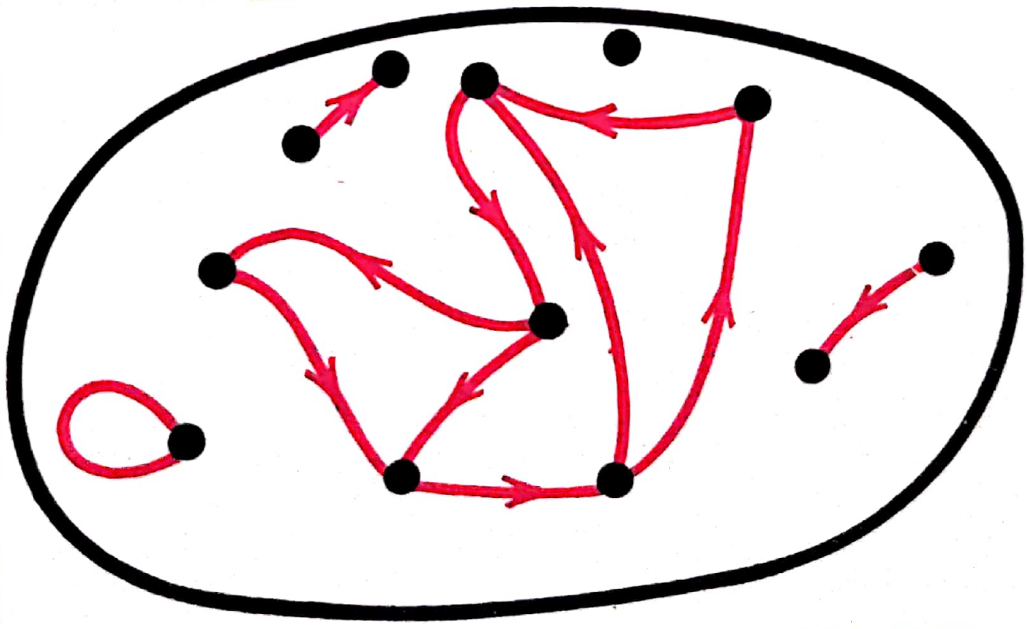
EXERCIŢII

1. Iată cîteva săgeţi din graficul unei ordini. Desenaţi toate săgeţile cu siguranţă omise.



GRAFICUL 75

2. Iată un grafic de ordine părăsit de elevi. Care-i părerea voastră despre el?

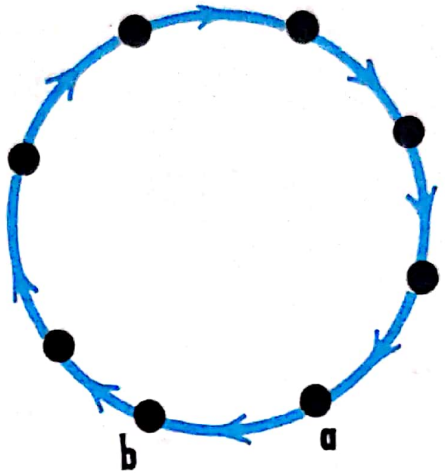


GRAFICUL 76

Scanned with OKEN Scanner

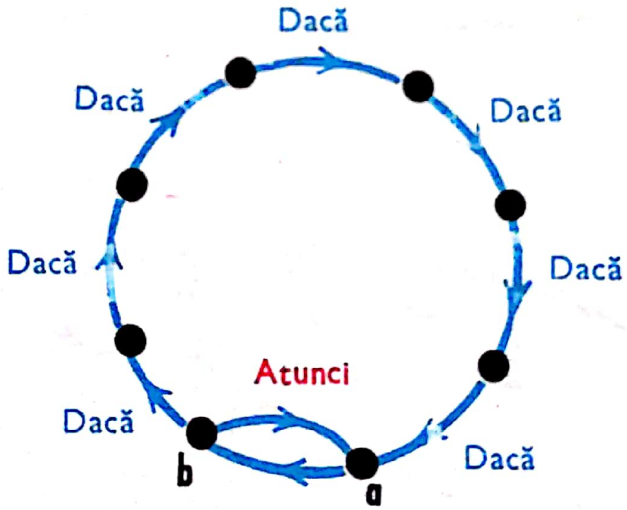
2 — DOUĂ PROPRIETĂȚI ALE ORDINELOR

LEMA 1 — *Graficul unei ordini nu conține nici un ciclu.*
Să presupunem că graficul de ordine R conține ciclul:



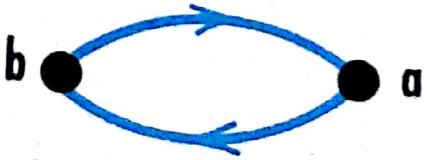
GRAFICUL 77

Să ne îndreptăm atenția asupra punctelor *a* și *b*.
Ca urmare a tranzitivității avem



GRAFICUL 78

Astfel am avea situația:



ceea ce exclude antisimetria.

Ceea ce trebuia demonstrat.

Scanned with OKEN Scanner

LEMA 2 — R *este o ordine* $\iff$ R^{-1} *este o ordine.*

Într-adevăr, știm că:

R este reflexiv $\iff$ R^{-1} este reflexiv.
R este antisimetric $\iff$ R^{-1} este antisimetric.
R este tranzitiv $\iff$ R^{-1} este tranzitiv.

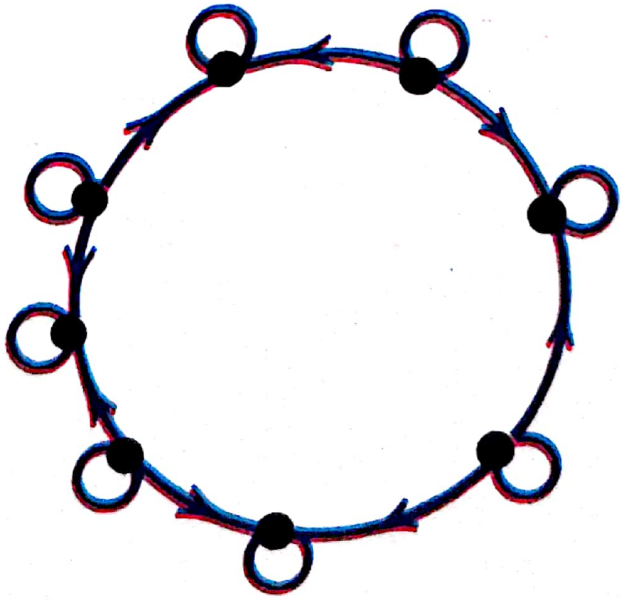
EXERCIȚII

1. Arătați care *dintre* relațiile definite de graficele 1—78 sînt ordine. Precizați care sînt ordinele totale și ordinele netotale.

2. Relația | definită în {0, 1, 2, . . .} este o ordine? Această ordine este totală?

3. Relația | definită în {0,1, 2, 12, 6, 168, 84} este o ordine totală?

4. Relația definită de graficul de mai jos este o ordine netotală.

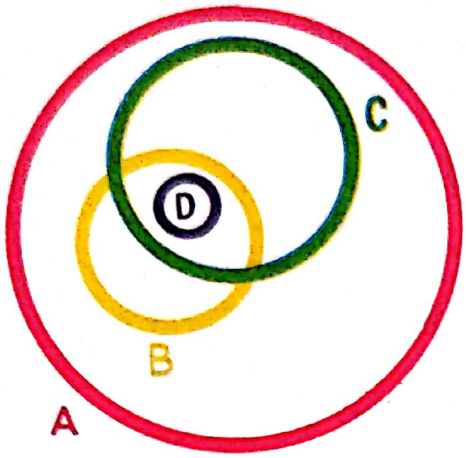


GRAFICUL 79

Scanned with OKEN Scanner

5. Iată două situaţii

O mulţime E de mulţimi



În această mulţime E, este definită relaţia $\subset$

O mulţime E de numere naturale

$A = 24$

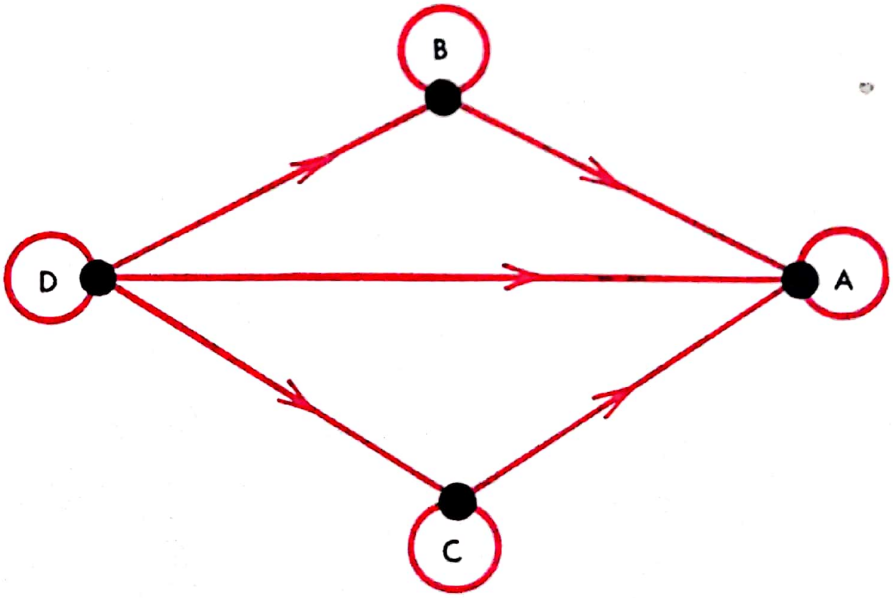
$B = 6$

$C = 8$

$D = 2$

În această mulţime E, este definită relaţia $|$

Din cele două situaţii precedente rezultă acelaşi grafic.



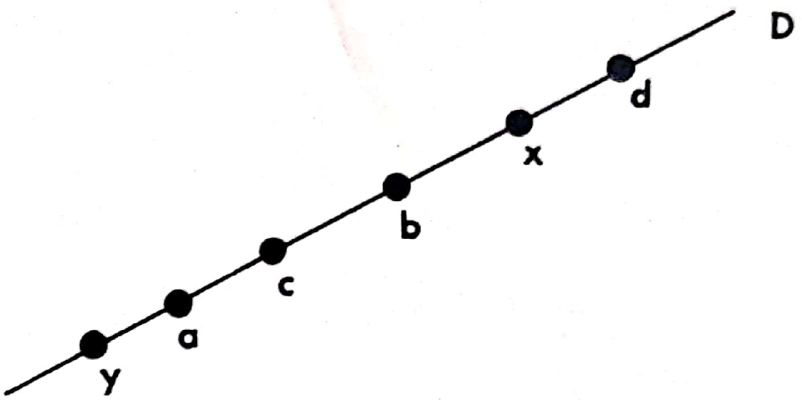
GRAFICUL 80

Relaţiile $\subset$ şi $|$ sînt ordine.
Nici o săgeată nu leagă punctele B şi C din grafic.
Aceste ordine nu sînt totale.

Scanned with OKEN Scanner

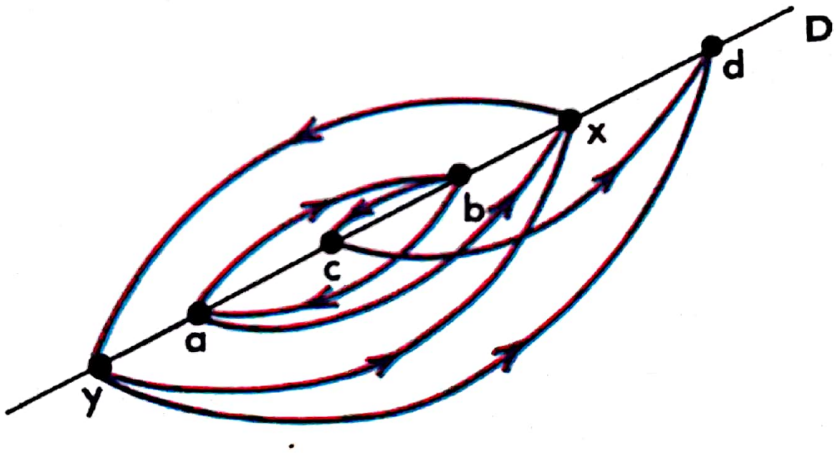
3 — DREAPTA ORIENTATĂ

— Priviți dreapta D pe care am notat *punctele distincte* a, b, c, d, x, y.



Însemnați cu săgeți perechile de puncte distincte

(a, b), (c, d), (x, y), (b, a), (a, x), (b, c), (y, d), (y, x)



GRAFICUL 81

— Săgețile care reprezintă pe (a, b) și (x, y) au **același sens?**

— Nu !

— Vom spune că perechile (a, b) și (x, y) nu au același sens.

Enumerați perechi care au același sens ca (a, b)

— (a, b), (a, x), (y, x), (y, d), (c, d).

— Și altele care au același sens ca (a, b) !

— (y, a), (y, c), (y, b), (a, c), . . .

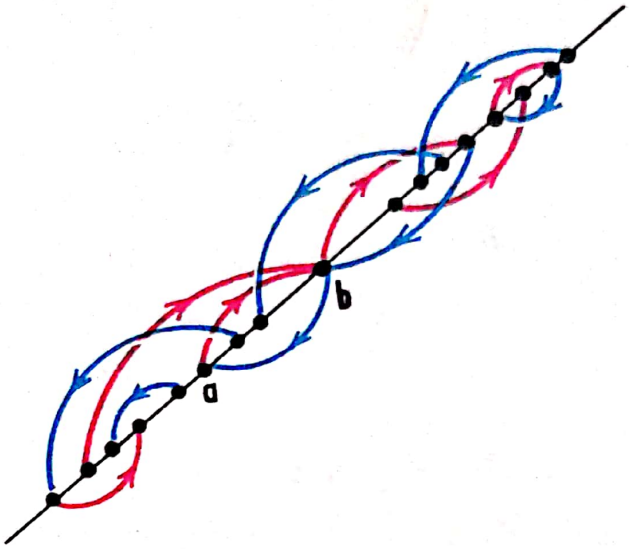
Enumerați perechile care au același sens ca (b, a)

— (x, y), (b, c), (b, a), (d, x), (d, b), (d, c), . . .

Scanned with OKEN Scanner

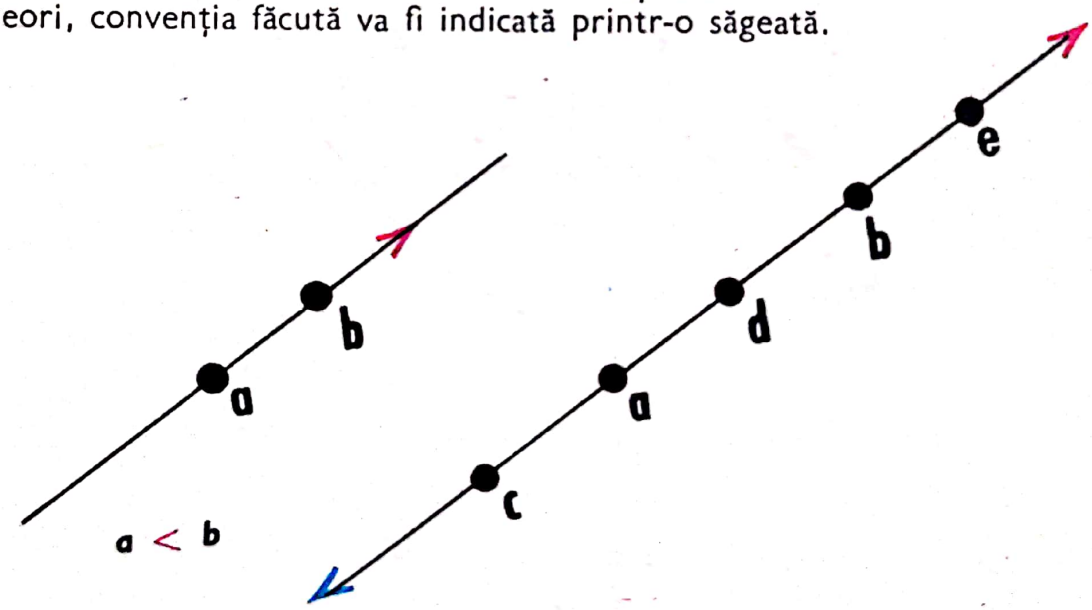
Orice pereche are același sens ca una și numai una singură dintre perechile (a, b) și (b, a).

— Desenați cu roșu cîteva perechi de același sens cu (a, b) și cu albastru cîteva perechi de același sens cu (b, a).



GRAFICUL 82

Există deci două moduri de a **orienta** dreapta D.
Deseori, convenția făcută va fi indicată printr-o săgeată.



CELE DOUĂ ORIENTĂRI ALE UNEI DREPTE

$a < c$
$d < a$ $\quad b < c$
$b < d$ $\quad c > d$
$e < b$ $\quad d > e$
$a > b$

$c < a$
$a < d$ $\quad b > c$
$d < b$ $\quad c < d$
$b < e$ $\quad d < e$
$a < b$

Scanned with OKEN Scanner

A orienta o dreaptă înseamnă a numi **pozitiv** unul din cele două sensuri. Celălalt este *numit* deci **negativ.**

Se va indica că (a, b) este de sens **pozitiv** scriind $a < b$,

$$\boxed{a < b}$$

ceea ce se citește «a precede pe b» sau «a este înaintea lui b», sau «a este mai mic decît b».

Dacă fiecare din literele x, y indică un punct al dreptei D, avem una și numai una singură din cele trei eventualități

$$x < y$$
$$x = y$$
$$y < x$$

Dacă **nu avem** $x < y$, vom avea $\boxed{x = y \text{ sau } y < x}$

ceea ce se va scrie mai scurt $\boxed{y \leqslant x}$

Să recapitulăm aceste convenții

$$\boxed{y \leqslant x} \iff \boxed{y < x \text{ sau } y = x}$$

De unde mai avem

$$\boxed{y < x} \iff \boxed{y \leqslant x \text{ și } y \neq x}$$

Adesea vom scrie $x \geqslant y$ în loc de $y \leqslant x$ și
$x > y$ în loc de $y < x$.

Veți constata că *relația* $\leqslant$ *este definită în D stabilind că* $\mathbf{a < b}$ *este o ordine totală. Dacă am fi hotărît* $\mathbf{b < a}$, *am fi obținut* **ordinea reciprocă.**

AXIOMA II 6 — ***Orice dreaptă este prevăzută cu două ordine totale reciproce. Spunem că orientăm o dreaptă cînd am stabilit că*** $\mathbf{a < b}$ ***pentru două puncte distincte.***

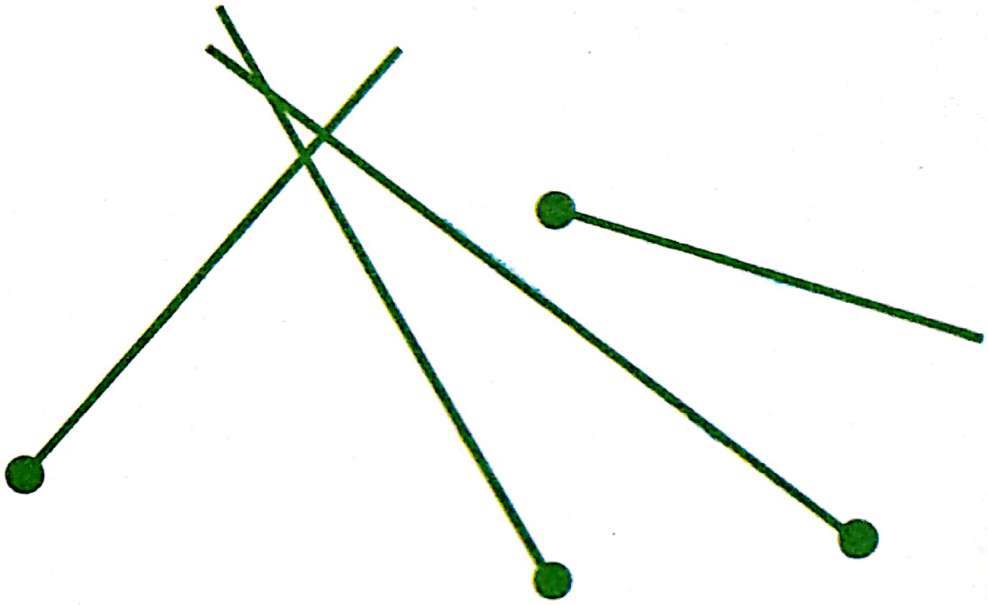
Scanned with OKEN Scanner

4 — SEMIDREPTE

Fie p un punct al unei drepte orientate D.
Numim *semidrepte închise, de origină* p, părțile

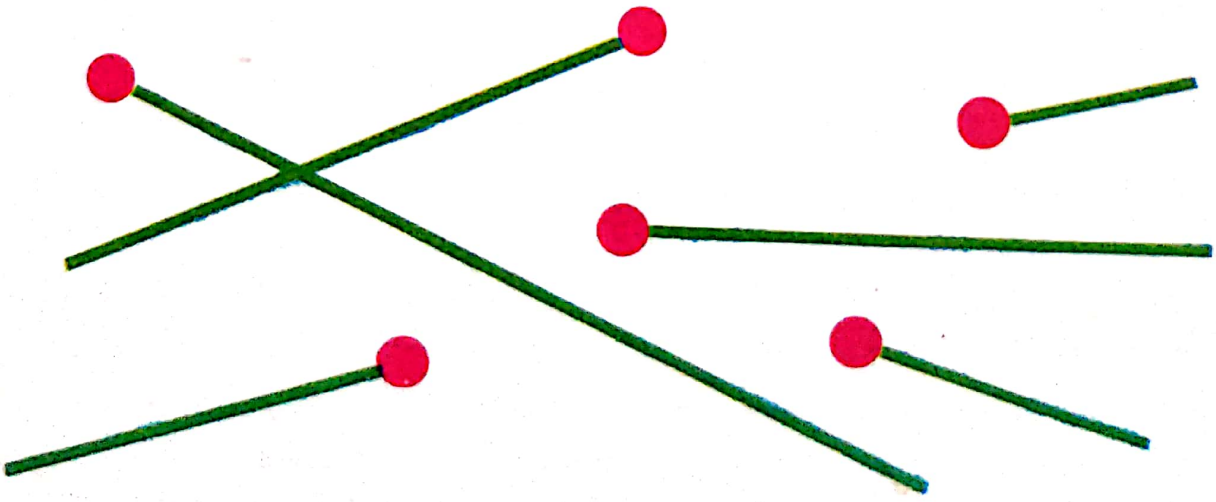
$$D_1 = \{x \in D \mid x \leqslant p\} \text{ și } D_2 = \{x \in D \mid x \geqslant p\}$$

Ținînd seama de convențiile noastre, reprezentați cîteva semidrepte închise.



SEMIDREPTE ÎNCHISE

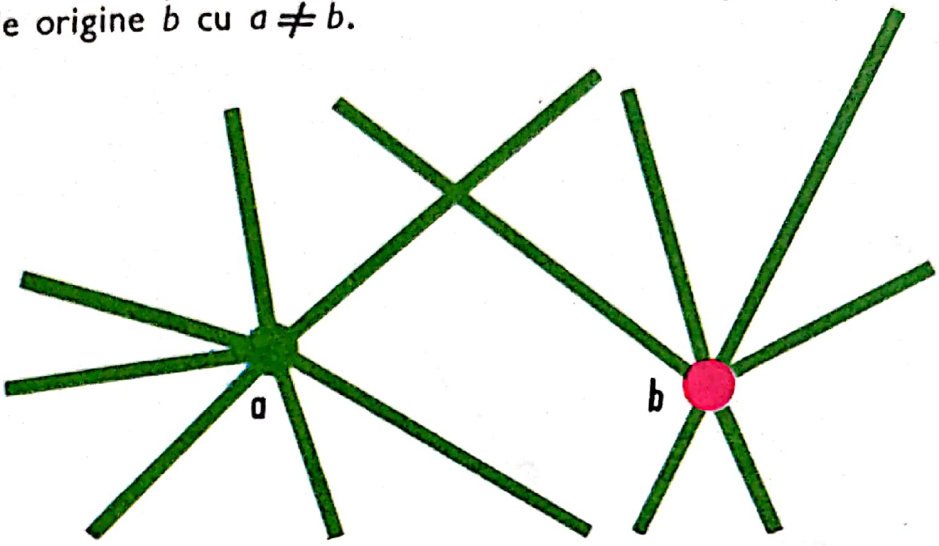
Desenul de mai jos sugerează definiția *semidreptelor deschise*



SEMIDREPTE DESCHISE

Scanned with OKEN Scanner

Desenați cîteva semidrepte închise de origine a și cîteva semidrepte deschise de origine b cu $a \neq b$.



SEMIDREPTE ÎNCHISE DE ORIGINE a

SEMIDREPTE DESCHISE DE ORIGINE b

— Luăm două puncte distincte a și b.
Definiți semidreapta închisă de origine a și care cuprinde pe b.

— Orientăm dreapta ab astfel că $a < b$.
Semidreapta cerută este deci $\{x \in a\,b \mid a \leqslant x\}$.

— Dacă a și b indică puncte distincte, semidreapta închisă de origine a și care cuprinde pe b va fi notată $[ab$ (sau și $ba])$.

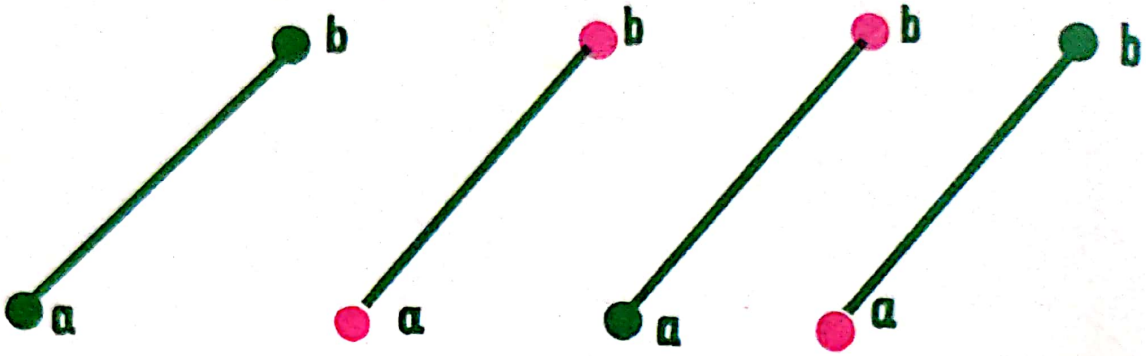
EXERCIȚII

1. Definiți de asemenea semidreapta deschisă de origine b și care cuprinde pe a.
   O vom nota ab [(sau și] ba).
2. Fie D_1 o semidreaptă închisă inclusă în $D \in \mathcal{D}$
   Fie D_2 cealaltă semidreaptă închisă inclusă în D și de aceeași origine a ca și D_1.
   Fie D_3 și D_4 semidreptele deschise de origine a incluse în D_1 și D_2 respectiv.
   Verificați și completați formulele
   1. $D_1 \cap D_2 = \{a\}$
   2. $D_1 \cup D_2 = D$
   3. $D_3 \cap D_4 = \varnothing$
   4. $D_3 \cup D_4 =$
   5. $D_1 \cap D_4 =$
   6. $D_1 \cup D_4 =$
   7. $\{D_1, D_4\}$ este o diviziune a lui D
   8. $\{D_2, D_3\}$ este o diviziune a lui D
   9. $D_3 \subset D_1$
   10. $D_4 \subset D_2$
   11. $D \setminus D_1 =$
   12. $D \setminus D_2 =$
   13. $D \setminus D_3 =$
   14. $D \setminus D_4 =$
3. Mulțimea semidreptelor închise, de origine a, nu este o diviziune a lui Π. De ce?
4. Mulțimea semidreptelor deschise, de origine a, nu este o diviziune a lui Π. De ce?
5. Fie $a \in \Pi$. Mulțimea constituită de $\{a\}$ și semidreptele deschise de origine a este o diviziune a lui Π. De ce?

Scanned with OKEN Scanner

5 — INTERVALE SAU SEGMENTE

Desenele de mai jos sugerează definiția **intervalelor sau segmentelor închise, deschise și semideschise.**



Cum să formulăm definiția intervalelor sau segmentelor de mai sus?
Să orientăm mai întîi dreapta ab, ceea ce se poate face în două moduri,

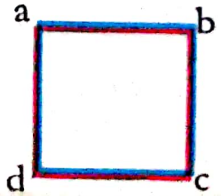
dacă $a < b$	dacă $b < a$
$[a\,b] = \{x \in a\,b \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	$[a\,b] = \{x \in a\,b \mid a \geqslant x \geqslant b\}$
$]a\,b[= \{x \in a\,b \mid a < x < b\}$	$]a\,b[= \{x \in a\,b \mid a > x > b\}$
$[a\,b[= \{x \in a\,b \mid a \leqslant x < b\}$	$[a\,b[= \{x \in a\,b \mid a \geqslant x > b\}$
$]a\,b] = \{x \in a\,b \mid a < x \leqslant b\}$	$]a\,b] = \{x \in a\,b \mid a > x \geqslant b\}$

EXERCIȚII

1. Segmentul $[ab]$ este intersecția semidreptei închise, de origină a, care cuprinde pe b și a semidreptei închise, de origină b, care cuprinde pe a. De unde $[ab] = [ab \cap ab]$. Scrieți formulele analoge pentru $[ab[$, $]ab]$, $]ab[$.

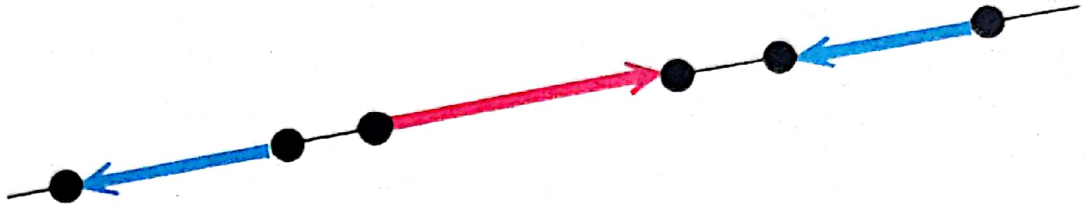
2. Definiți un segment paralel cu o dreaptă.
Ce mulțime este firesc s-o notăm cu $[aa]$?
Vom spune că segmentul închis $[aa]$ este paralel cu orice dreaptă.
Ați putea pleda în favoarea acestei definiții?

3. $\{[a\,b[, [b\,c[, [c\,d[, [d\,a[\}$
este o diviziune a perimetrului pătratului.

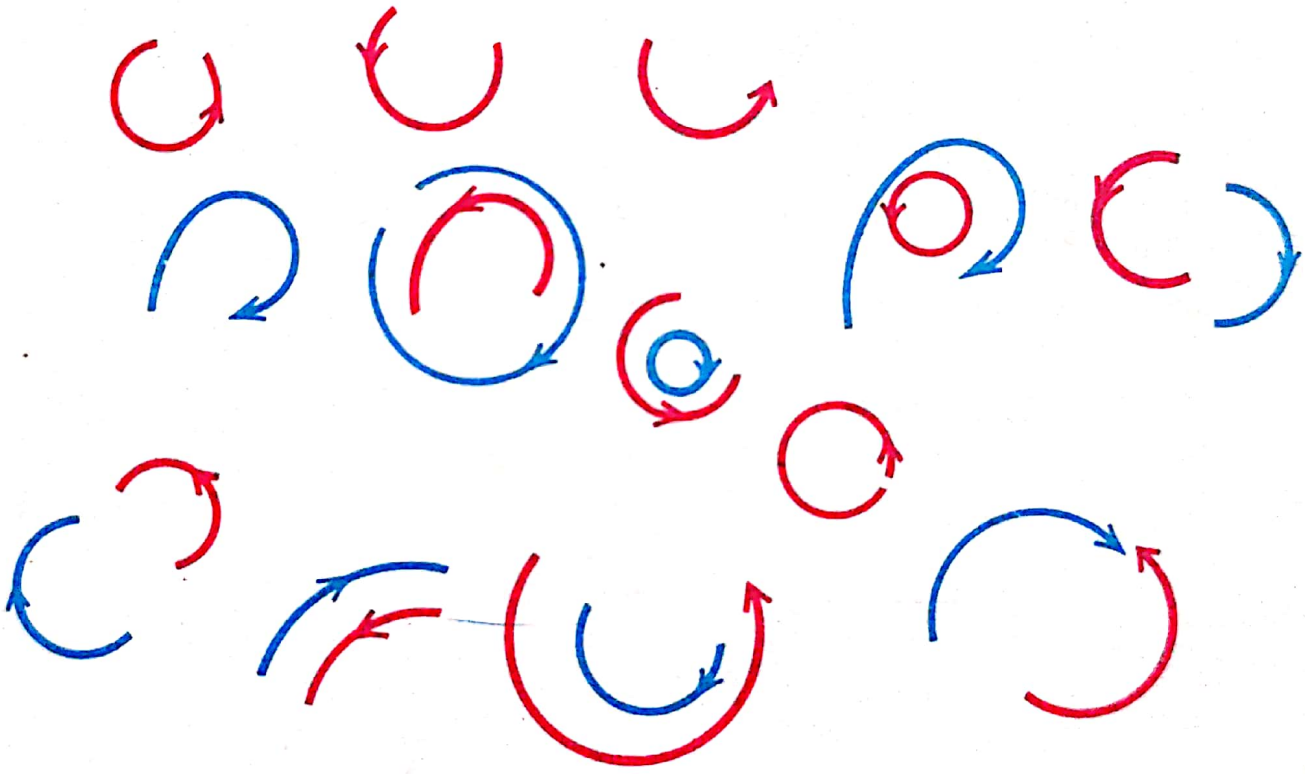


6 — ORIENTAREA PLANULUI

Am văzut că orice pereche de puncte distincte ale unei drepte definește un sens al acestei drepte.

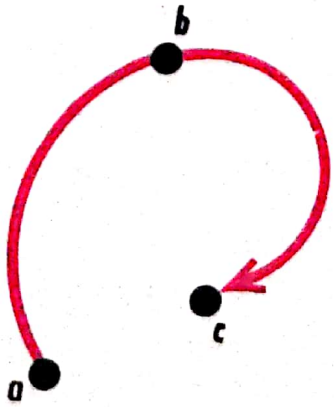


— Ați putea să indicați cu săgeți două **sensuri** ale planului?



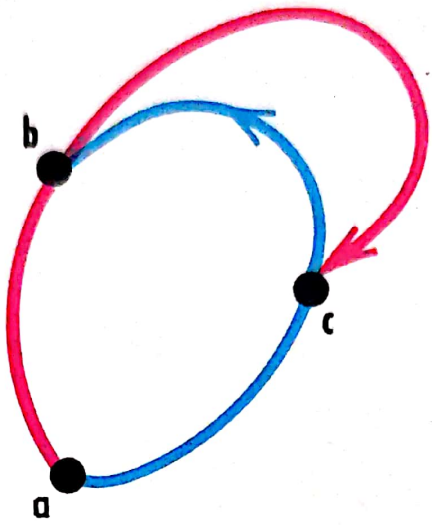
— Iată trei puncte *a*, *b*, *c*.

Desenați o săgeată care să treacă succesiv prin *a*, *b*, *c*.



Scanned with OKEN Scanner

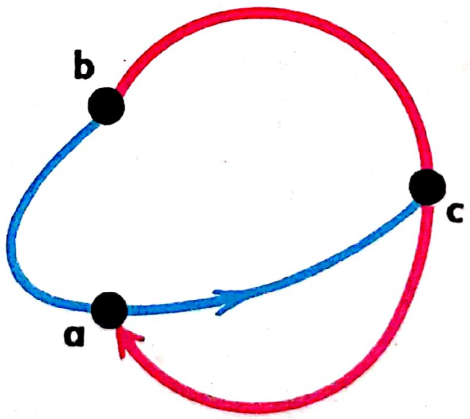
— **Tripletul** (a, b, c) definește unul din sensurile planului.
Tripletul (a, c, b) definește același sens?
— Nu !



— Care sînt tripletele formate cu ajutorul punctelor a, b, c care definesc același sens ca (a, b, c)?

Care sînt tripletele care definesc celălalt sens?

— (a, b, c), (b, c, a), (c, a, b) definesc unul din sensurile lui Π.
(c, b, a), (a, c, b), (b, a, c) definesc celălalt sens.



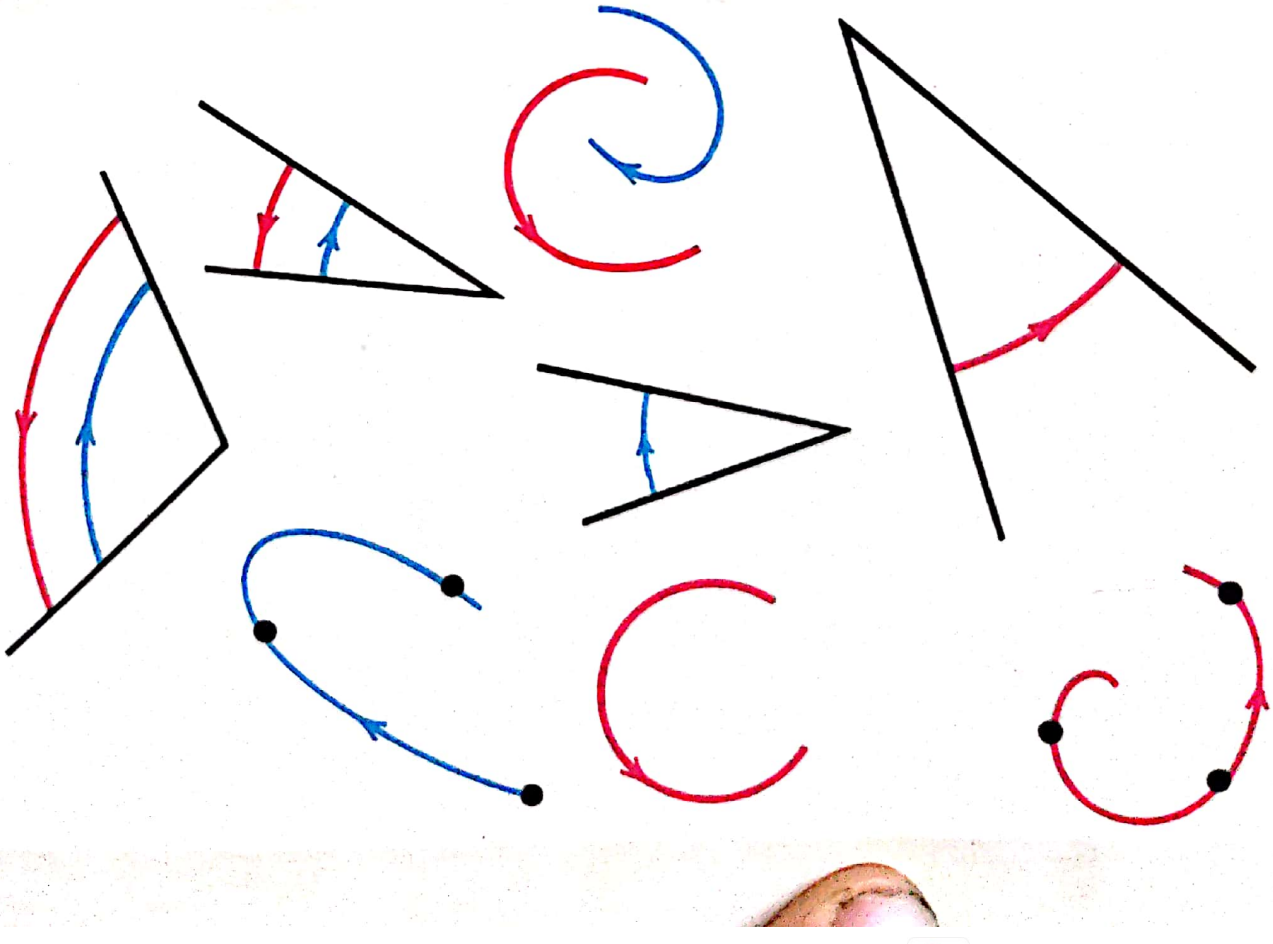
AXIOMA Π 7 — *Planul Π are două sensuri. Orice triplet de puncte nealiniate definește unul din sensurile planului. Două triplete de puncte care definesc același sens vor fi numite de același sens.*

Dacă a, b, c sînt trei puncte nealiniate, tripletele (a, b, c), (b, c, a) și (c, a, b) sînt de același sens. Tripletele (c, b, a), (a, c, b), (b, a, c) definesc sensul opus.

Scanned with OKEN Scanner

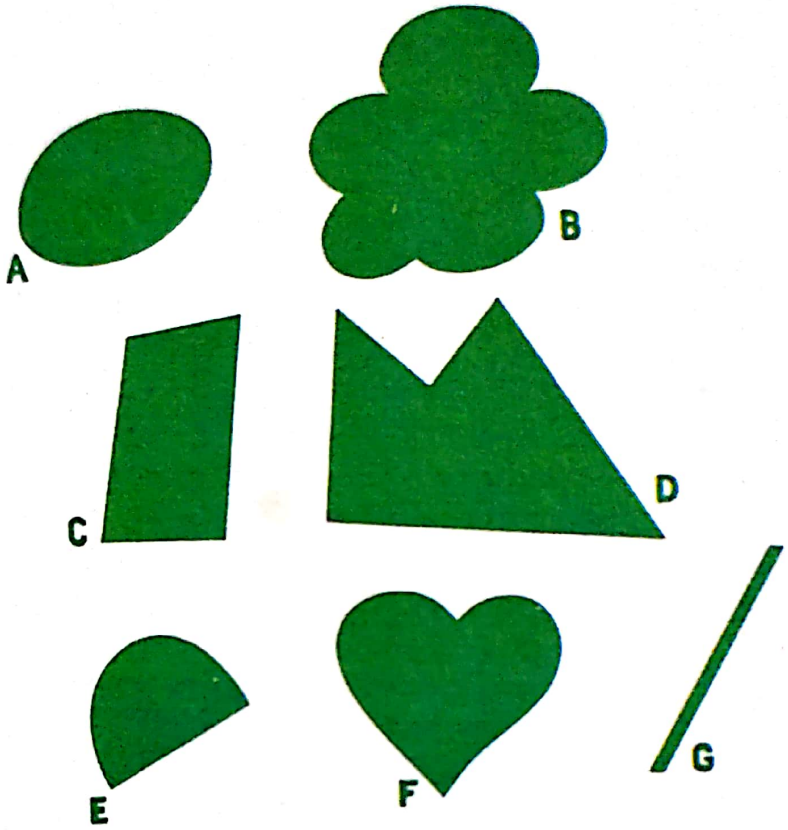
EXERCIŢII

1. A deşuruba un şurub, a pune înainte un ceas, definesc sensuri opuse. Acest lucru este adevărat pentru toate şuruburile?
2. În mişcarea lor, acele ceasului care arată orele, minutele şi secundele, definesc acelaşi sens?
3. Discul de circulaţie care impune sensul girator obişnuit defineşte acelaşi sens ca acele unui ceas?
4. Puneţi mîinile întinse pe masă.
   Tripletul (vîrful degetului mare de la mîna stîngă, vîrful degetului arătător de la mîna stîngă, vîrful inelarului de la mîna stîngă) şi tripletul (vîrful degetului mare de la mîna dreaptă, vîrful degetului arătător de la mîna dreaptă, vîrful inelarului de la mîna dreaptă) definesc acelaşi sens?
5. Aceeaşi întrebare pentru tripletele (vîrful degetului arătător de la mîna dreaptă, vîrful degetului mic de la mîna dreaptă, vîrful degetului mijlociu de la mîna dreaptă) şi (vîrful degetului mare de la mîna stîngă, vîrful degetului mijlociu de la mîna stîngă, vîrful degetului inelar de la mîna stîngă).
6. Acest înotător a adoptat mişcarea „bras". În ampla mişcare a braţelor, mîinile sale descriu acelaşi sens?
7. Iată două semidrepte deschise A şi B de origine comună o şi neincluse în aceeaşi dreaptă.
   Fie $a_1, a_2 \in A$ şi $b_1, b_2 \in B$.
   Veţi observa că tripletele (o, a_1, b_1) şi (o, a_2, b_2) sînt de acelaşi sens şi că sînt de sens opus tripletele (o, b_1, a_1) şi (o, b_2, a_2). Acest lucru ne permite să vorbim de sensul perechii (A, B) şi să afirmăm că perechile (A, B) şi (B, A) sînt de sensuri opuse.



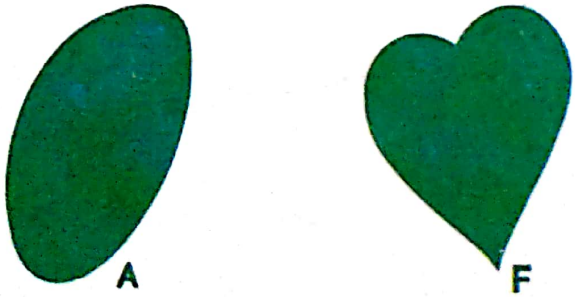
7 — CONVEXITATE

Desenele de mai jos reprezintă mulțimi de puncte din plan.
Mulțimile A, C, E, G sînt numite **convexe.**
Mulțimile B, D, F sînt numite **neconvexe.**



MULȚIMI CONVEXE, **A, C, E, G.**
MULȚIMI NECONVEXE, **B, D, F.**

— Cum să **definim** *mulțimile* **convexe?**
— Comparați mulțimile A și F.



— Dacă mergem drept de la un punct al lui A spre alt punct al lui A, rămînem totdeauna în A.

— Dacă mergem dintr-un punct al lui F spre alt punct al lui F, **uneori** ieșim din F.

Scanned with OKEN Scanner

— Nu mai vorbiți. Faceți un desen care să arate ceea ce ați spus.

— Ce știm despre punctele a, b, c, d, x, y, z, t?

— $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$, $d \in A$, $x \in F$, $y \in F$, $z \in F$, $t \in F$.

— Comparați $[a\,b]$ și A $[x\,y]$ și F
$[c\,d]$ și A $[z\,t]$ și F

$[a\,b] \subset A$, $[c\,d] \subset A$, $[x\,y] \not\subset F$, $[z\,t] \subset F$

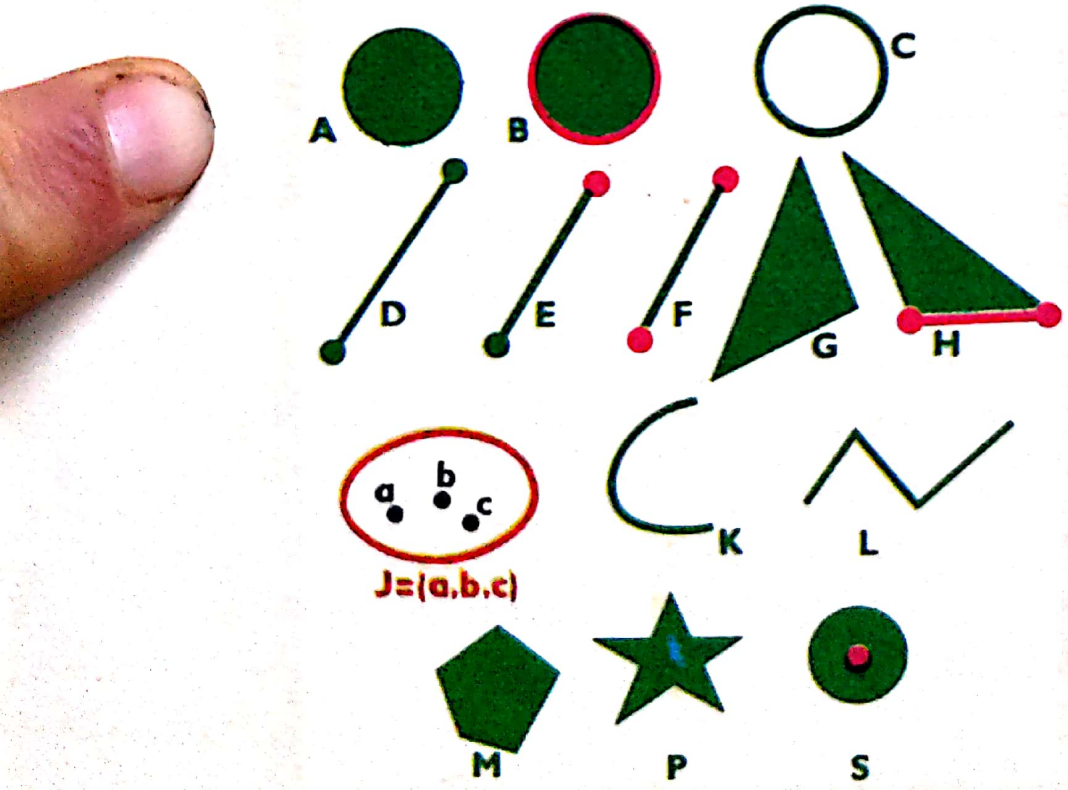
— Acum sîntem în măsură să formulăm *definiția mulțimilor convexe.*

DEFINIȚIA 2 — ***O parte C a lui Π este convexă***

Pentru orice $x, y \in C$: $[x\,y] \subset C$.

EXERCIȚII

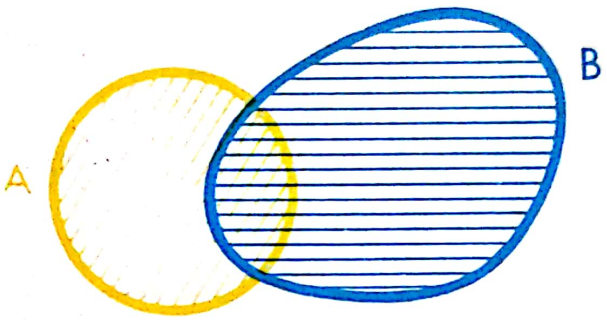
1. Care dintre mulțimile de mai jos sînt convexe?



Scanned with OKEN Scanner

2. Prezentați 10 mulțimi convexe și 10 mulțimi neconvexe, foarte diferite.
3. Orice dreaptă este convexă.
4. Mulțimile cu un singur element sînt convexe?
5. Perechea $\{a, b\}$ (cu $a \neq b$) este convexă?
6. Mulțimea vidă este convexă.

— Reprezentați două mulțimi convexe A și B cu $A \cap B \neq \varnothing$



DOUĂ CONVEXE NEDISJUNCTE **A, B**

A este mulțimea hașurată ||| inclusiv marginea
B este mulțimea hașurată ≡ inclusiv marginea

— Ce părere aveți despre $A \cap B$?
— $A \cap B$ este convexă !

LEMA 3 — *Intersecția a două convexe este convexă.*

A, B convexe $\Rightarrow$ $A \cap B$ convexă.

DEMONSTRAȚIE:

Trebuie să dovedim că

$$x, y \in A \cap B \Rightarrow [x\,y] \subset A \cap B$$

Fie $x, y \in A \cap B$

Deci $x, y \in A$ și $x, y \in B$

Deoarece A și B sînt convexe: $[x\,y] \subset A$ și $[x\,y] \subset B$

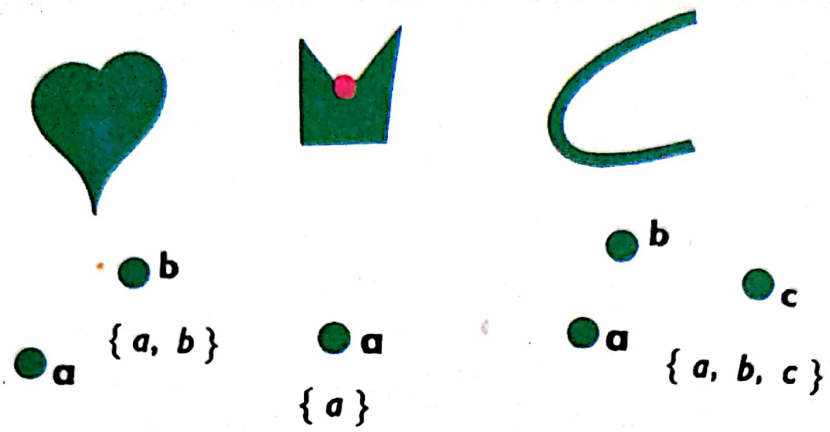
Deci $[x\,y] \subset A \cap B$

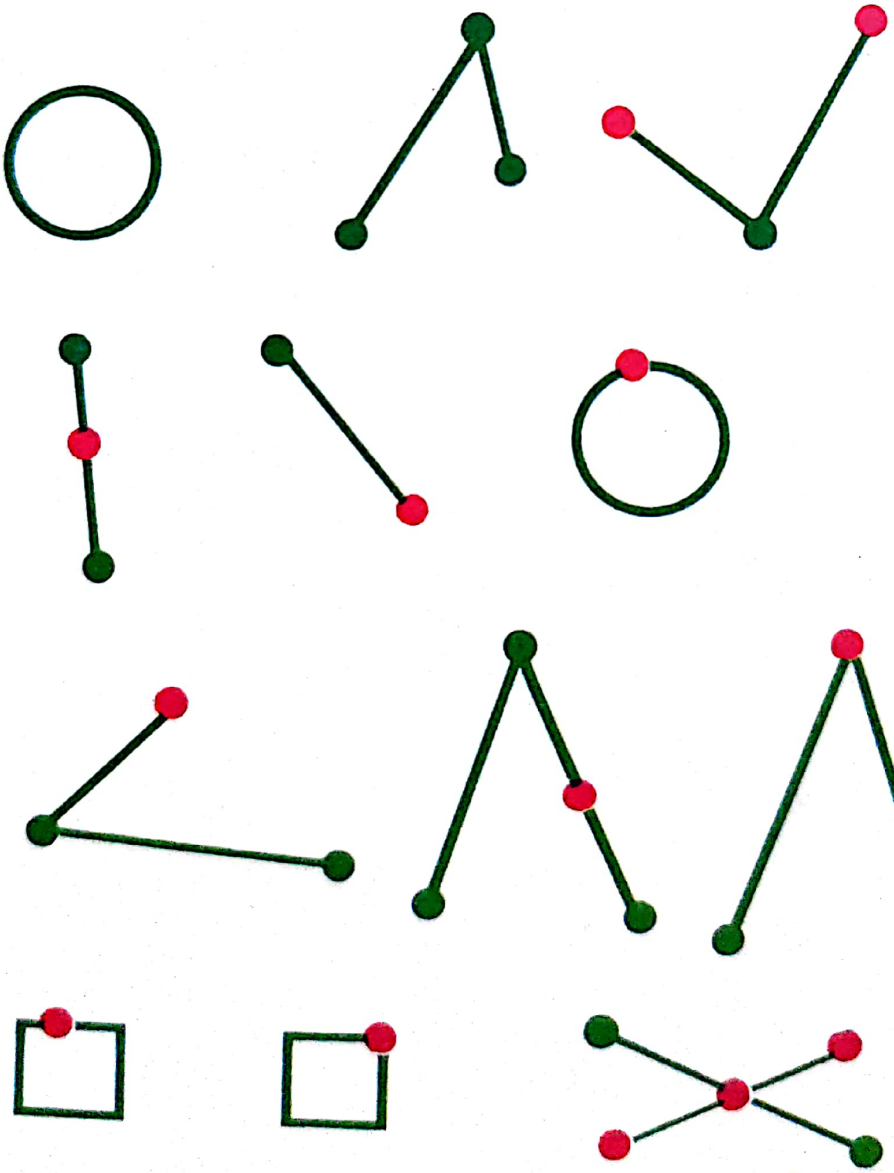
Ceea ce trebuia demonstrat.

Scanned with OKEN Scanner

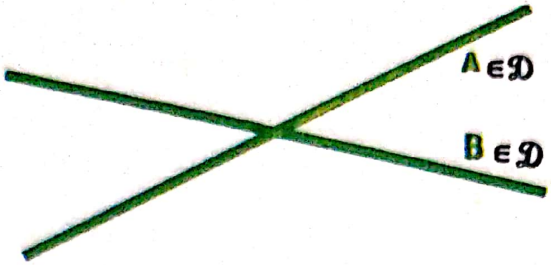
EXERCIȚII

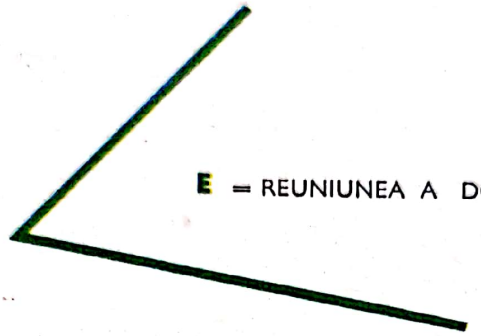
1. *Intersecția a* 3, *a* 4, *a* 5 *mulțimi . . . convexe este convexă.*
2. Care este cea mai mică mulțime convexă care conține următoarele mulțimi:



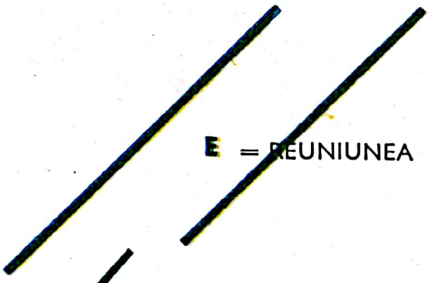


Scanned with OKEN Scanner

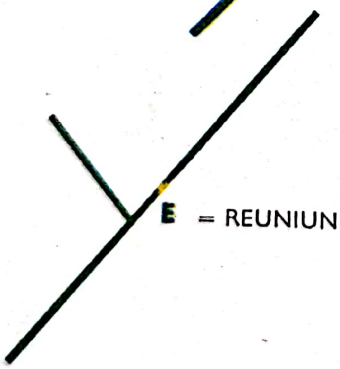




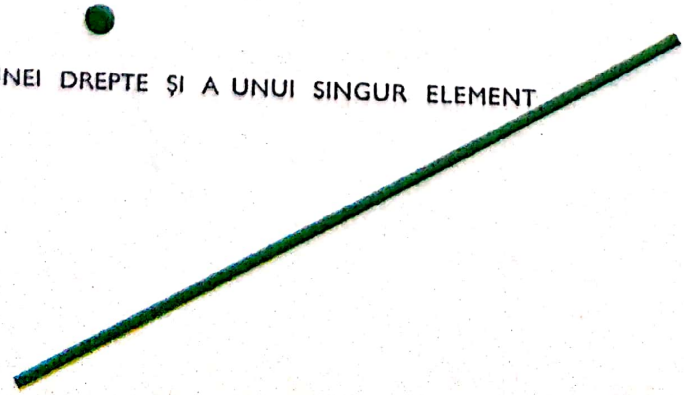
E = REUNIUNEA A DOUĂ SEMIDREPTE.



E = REUNIUNEA A DOUĂ PARALELE DISTINCT



E = REUNIUNEA UNEI DREPTE ȘI A UNEI SEMIDREPTE.



E = REUNIUNEA UNEI DREPTE ȘI A UNUI SINGUR ELEMENT

Scanned with OKEN Scanner

12

Funcţii

1 — DEFINIŢIA FUNCŢIILOR

— Priviţi graficul 16 al relaţiei P . . . *are ca tată* . . . definită într-o mulţime E de persoane.

Dintr-un punct al acestui grafic, poate pleca mai mult de o săgeată?

— Nu, deoarece nimeni nu poate avea doi taţi !

— Din anumite puncte nu pleacă nici o săgeată. Ce înseamnă acest lucru?

— Aceasta arată că tatăl persoanei reprezentate de un astfel de punct nu este un element al mulţimii E.

— Cunoaşteţi alte exemple de relaţii care au proprietatea:

în orice punct al graficului pleacă cel mult o săgeată.

— Relaţiile . . . *are ca mamă* . . ., . . . *are ca bunic din partea tatălui* . . ., *ciclurile*, relaţia $x \to x + 5$ în mulţimea numerelor naturale, . . .

DEFINIŢIA 1 — ***O relaţie este numită funcţie dacă şi numai dacă din orice punct al graficului ei pleacă cel mult o săgeată.***

EXERCIŢII

1. Care dintre relaţiile definite de graficele 1—80 sînt funcţii?

2. Relaţia P^{-1}, reciprocă a relaţiei P . . . *are ca tată* . . ., definită în omenire, nu este o funcţie. De ce?

3. O relaţie R este o funcţie dacă şi numai **dacă** orice obiect x, imaginea lui R $\{x\}$ este o mulţime cu un singur element sau o mulţime vidă.

4. Relaţia reciprocă a unei funcţii nu este totdeauna o funcţie. Ce exemplu dat mai sus dovedeşte această afirmaţie?

Scanned with OKEN Scanner

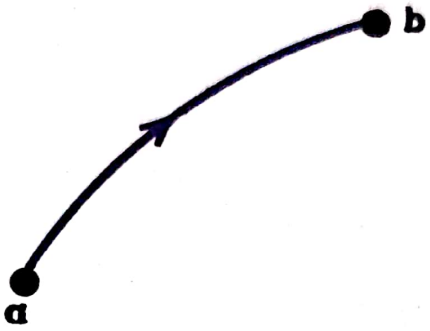
2 — VALOAREA UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT

Funcțiile sînt adesea reprezentate prin minuscule ca f, g, r, s, t . . .

Să presupunem că f arată o funcție.

f este deci o mulțime de perechi.

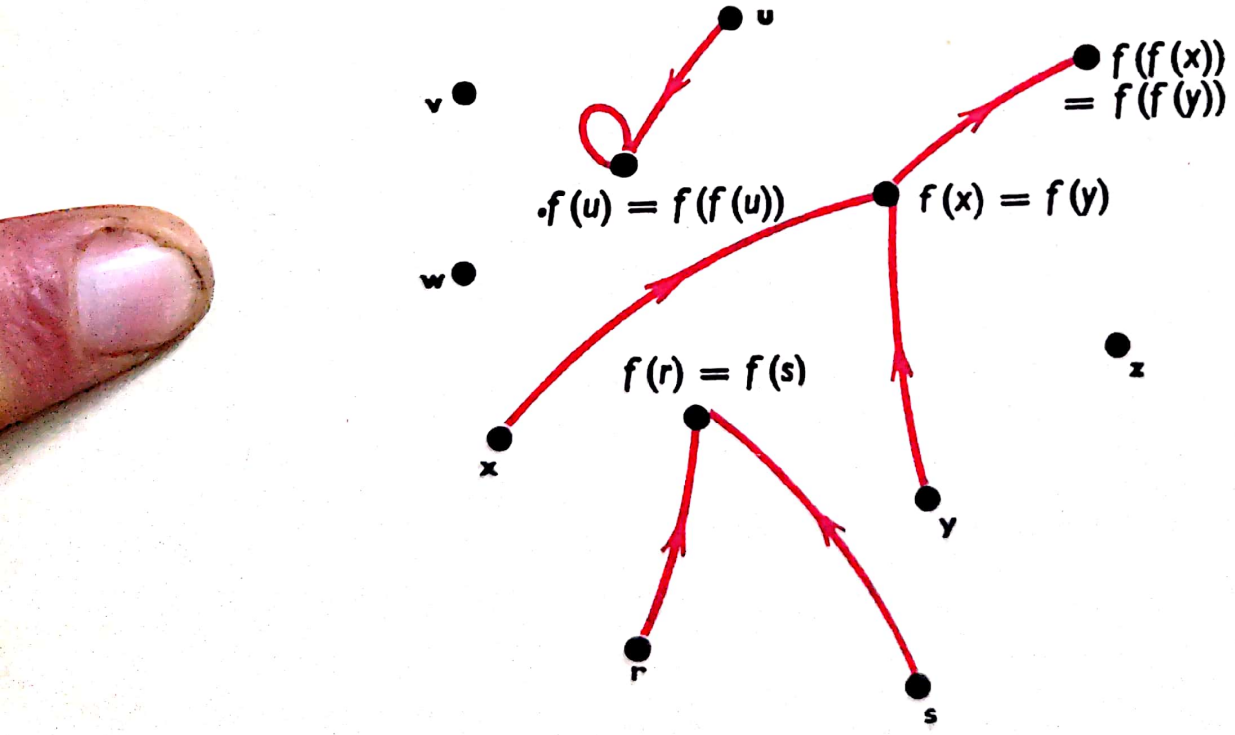
Să amintim că a este originea, iar b extremitatea perechii (a, b).



Dacă **x** *este originea unei perechi a lui* **f**, *spunem că funcția* **f este definită în x** *și notăm cu* **f (x)** *extremitatea perechii de origine* **x.**

Obiectul **f (x)** *este numit* **valoarea lui f în x.**

Mai spunem de asemenea că **f (x)** *este* ***imaginea lui x,*** *sau că funcția* **f *aplică* x** *pe* **f (x).**



FUNCȚIA f este definită în r, s, u, x, y, $f(x) = f(y)$, $f(u) = f(f(u))$.
Ea nu este definită în v, w, z, $f(r) = f(s)$, $f(f(x)) = f(f(y))$.

GRAFICUL 83

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

1. Fie f funcția ... *are drept capitală* ...

Ce înseamnă f (Franța), f (Anglia), f (Uniunea Sovietică), f (Peru)?
La ce orașe se aplică această funcție în următoarele țări: Columbia, Belgia, Venezuela?
Care este țara reprezentată de Viena prin f?

2. Să notăm cu f funcția $x \to x + 5$.

Calculați f (2), f (17).
Cum se reprezintă zero prin f?
În ce număr aplică f numărul 7?
Care este numărul a cărui reprezentare prin f este 8?
Vi se semnalează că $f(a) = 87$. Calculați pe a.
Dacă y indică un număr natural, calculați $f(2y)$ și $f(y + 3)$.

3. Să notăm cu g funcția ... *are ca dublu* ...

Cum se reprezintă 8 prin g?
Ce număr admite pe 18 ca reprezentare?
Dacă $g(u) = 100$, calculați pe u.
În ce număr aplică funcția g pe zero?
Vi se semnalează că numărul x este astfel încît $g(x) = x$.
Ce număr este x?

4. Relația f ... *este situată în (țara)* ... este o funcție definită în orice oraș.
Calculați:

f (Paris), f (Vladivostok), f (Caracas), f (Montevideo), f (Anvers), f (Marsilia), f (Arlon), f (Utrecht), f (Hull), f (Milan), f (Stuttgart), f (Odense).

Scanned with OKEN Scanner

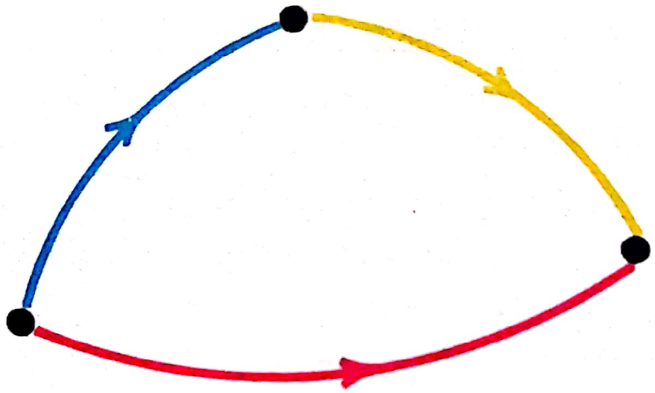
3 — COMPUNEREA FUNCȚIILOR

TEOREMA 1 — ***Compusa a două funcții este o funcție.***

Cu alte cuvinte: dacă **f** și **g** sînt funcții, atunci **g o f** *este o funcție.*

Să ne închipuim graficul f desenat cu albastru, graficul g cu galben și graficul $g \circ f$ cu roșu.

Există o săgeată roșie ori de cîte ori un grafic galben urmează după unul albastru, așa cum se arată în această schemă (în care, în mod excepțional, cele trei puncte indică obiecte distincte sau nu).

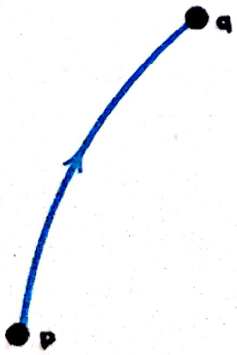


Dacă dintr-un punct p nu pleacă nici o săgeată albastră, **atunci** nici o săgeată roșie nu pleacă din p.

Dacă nici o săgeată albastră nu pleacă din p

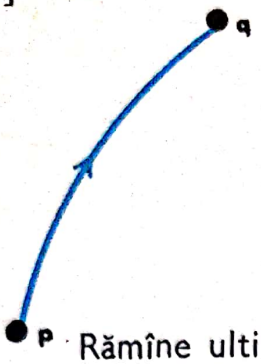
Atunci nici o săgeată roșie nu pleacă din p.

Dacă din punctul p pleacă o săgeată albastră, știm că ea este singura săgeată albastră care pleacă din p. Să notăm cu q extremitatea ei și să examinăm situația din q.



Singura săgeată albastră care pleacă din p.

Dacă din punctul q nu pleacă nici o săgeată galbenă,
Atunci nici o săgeată roșie nu va pleca din p.



nici o săgeată galbenă nu pleacă din q.

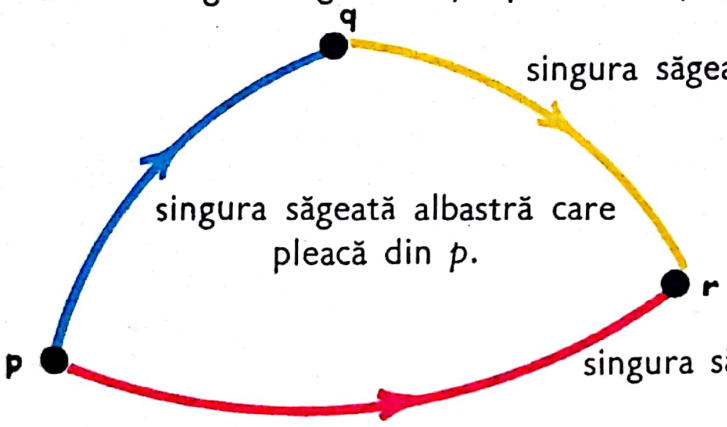
singura săgeată albastră care pleacă din p.

nici o săgeată roșie nu pleacă din p.

Rămîne ultima eventualitate.

Dacă { o singură săgeată albastră pleacă din p. Ea ajunge în q.
o singură săgeată galbenă pleacă din q. Ea ajunge în r.

Deci o singură săgeată roșie pleacă din p. Ea ajunge în r.



singura săgeată galbenă care pleacă din q.

singura săgeată albastră care pleacă din p.

singura săgeată roșie care pleacă din p.

Să rezumăm

Dacă	Atunci
Din p nu pleacă nici o săgeată albastră	Din p nu pleacă nici o săgeată roșie.
Din p pleacă o săgeată albastră și numai una singură. Ea ajunge în q. Din q nu pleacă nici o săgeată galbenă.	Din p nu pleacă nici o săgeată roșie.
Din p pleacă o săgeată albastră și numai una singură. Ea ajunge în q. Din q pleacă o săgeată galbenă și numai una singură. Ea ajunge în r.	Din p pleacă o săgeată roșie și numai una singură. Ea ajunge în r.

Concluzie: Din orice punct p pleacă cel mult o săgeată roșie.
Astfel compusa $g \circ f$ este o funcție.

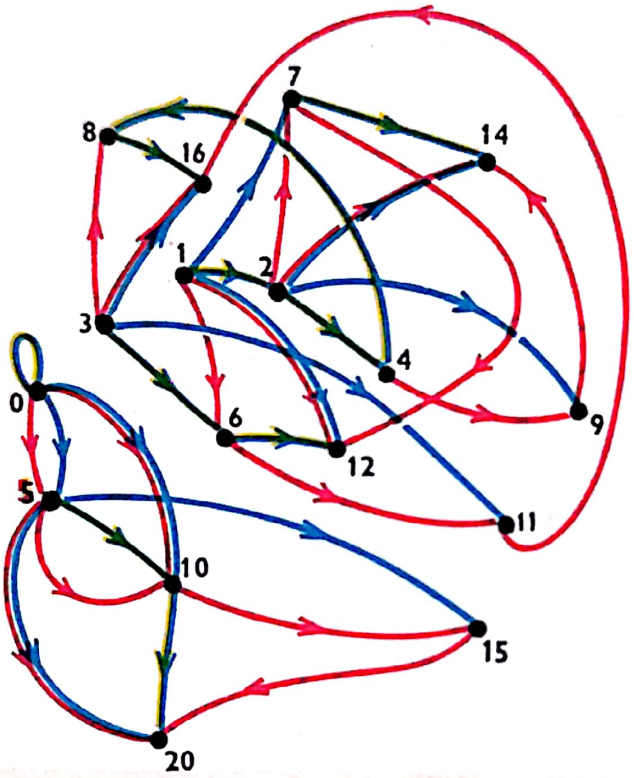
Ceea ce trebuia să fie demonstrat.

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

1. În textul de la pagina 185.
$$q = f(p),\quad r = g(q),\quad r = g(f(p)),\quad r = (g \circ f)(p)$$

2. Fie f funcția ... *are ca dublu* ... pe care o notăm tot $f: x \to 2x$.
Fie g funcția definită de $g: y \to y + 5$.
Calculați $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$, $f(8)$, $f(10)$, $g(4)$, $g(6)$, $g(10)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(5)$, $(g \circ f)(2)$, $(g \circ f)(3)$, $(g \circ f)(5)$, $(f \circ g)(2)$, $(f \circ g)(3)$, $(f \circ g)(5)$.



$f: x \to 2x$
$g: y \to y + 5$
$g \circ f$
$f \circ g$.

GRAFICUL 84

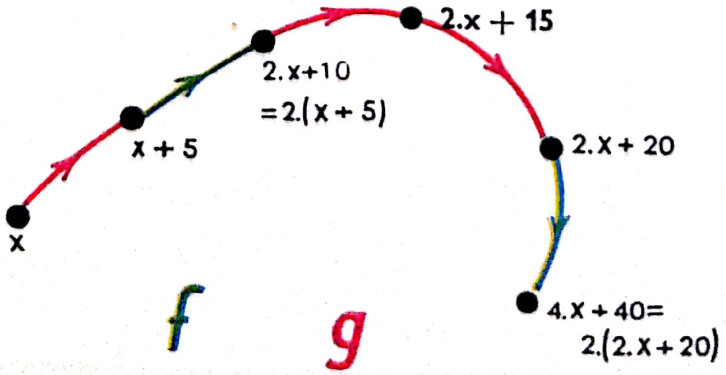
Avem
$$g \circ f: x \to 2 \cdot x + 5$$
$$f \circ g: x \to (x + 5) \cdot 2 = 2 \cdot x + 10$$

Exprimați și funcțiile:

$f \circ f$: $x \to \ldots$
$f \circ f \circ f$: $x \to \ldots$

$g \circ g$: $x \to \ldots$
$f \circ g \circ g \circ g \circ f \circ g$: $x \to \ldots$

Vă poate ajuta această schemă?



Calculați și
$$g \circ f \circ f \circ g \circ f: x \to \ldots$$

3. Iată o mulțime de persoane pe care le veți reprezenta prin puncte negre. Fiecărei persoane i se cere să arate pe tatăl ei, dacă se află în mulțime. Se obține astfel graficul relației P: . . . *are ca tată* . . . pe care-l veți reprezenta prin săgeți verzi.
În această societate, anumite persoane au venit cu mai mulți din copiii lor. Relația P^{-1} este atunci o funcție? Explicați acest lucru.
Examinați relația compusă $P \circ P^{-1}$ pe care o veți reprezenta cu ajutorul săgeților negre.
Descrieți această relație. Este ea o funcție? De ce?
Se cere ca toți oamenii care sînt însoțiți de cel puțin unul din copiii lor să se prezinte. Acest lucru definește o relație R. Ce credeți despre R și $P \circ P^{-1}$?
Examinați relația compusă $P^{-1} \circ P$ pe care o veți reprezenta prin săgeți albastre.

4. — Gîndiți-vă la un număr. Înmulțiți-l cu 2. Adăugați 5.
Cît aveți? — 27.
— V-ați gîndit la 11! — Într-adevăr!
Cum am procedat?

5. Fie funcțiile

$$f: x \to x \cdot x = x^2 \quad | \quad h: x \to 2 \cdot x = 2x \quad | \quad g: x \to x + 5$$

Se cere să se scrie formule analoge pentru

$g \circ f: x \to x^2 + 5$	$f \circ h:$	$h \circ g \circ f:$
$f \circ g: x \to (x+5)^2$	$h \circ g:$	$f \circ g \circ h:$
$h \circ f: x \to \ldots$	$g \circ h:$	$h \circ f \circ g \circ h \circ f \circ g:$

Se cere să se calculeze valoarea acestor funcții în 0, 1, 2, 3.

6. Dacă funcția f nu este definită în x, funcția $g \circ f$ nu este definită în x.

7. Dacă funcția f este definită în x și dacă funcția g nu este definită în $f(x)$. Atunci funcția $g \circ f$ nu este definită în x.

8. Fiecare din literele f, g indică o funcție.
Funcția $g \circ f$ este definită în x dacă și numai dacă f este definită în x și g este definită în $f(x)$.
Dacă este așa, **atunci** $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

9. Calculați (M o P) (Baudouin[1]).

---

[1] Regele Belgiei (n. t.)

Scanned with OKEN Scanner

4 — APLICAȚII

Ne-am plimbat prin acest parc de automobile și ne-am distrat ghicind marca fiecărei mașini. În acest mod am definit o funcție f.

Mulțimea P a mașinilor din acest parc este mulțimea obiectelor în care funcția este definită.

Extremitățile perechilor lui f aparțin toate mulțimii M a mărcilor de mașini.

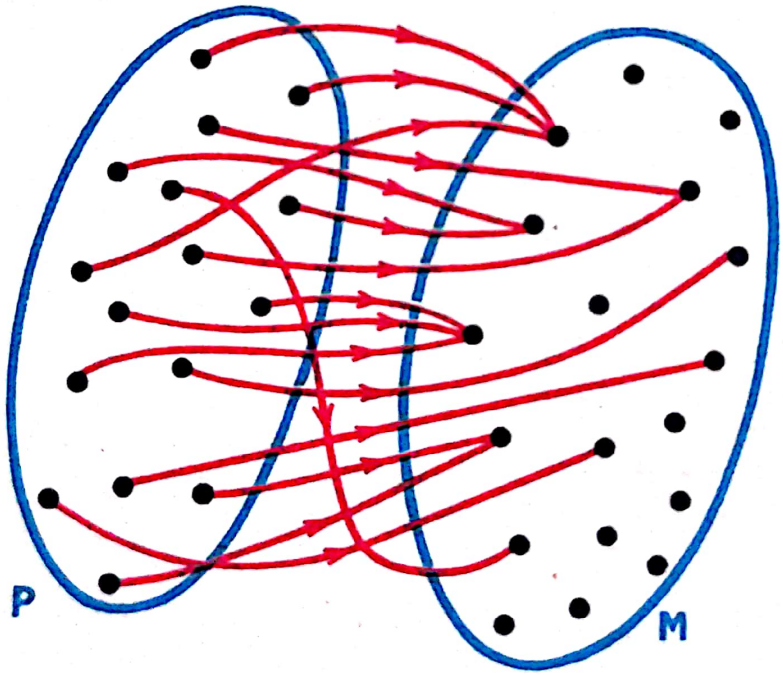
Descriem această situație printr-una din expresiile **sinonime:**

f este o funcție de P în M

sau f este o **aplicație** a lui P *în* M,

ceea ce se notează: $f: P \to M$

Această situație poate fi reprezentată prin următorul grafic



$f: P \to M$: . . . *are ca marcă* . . .

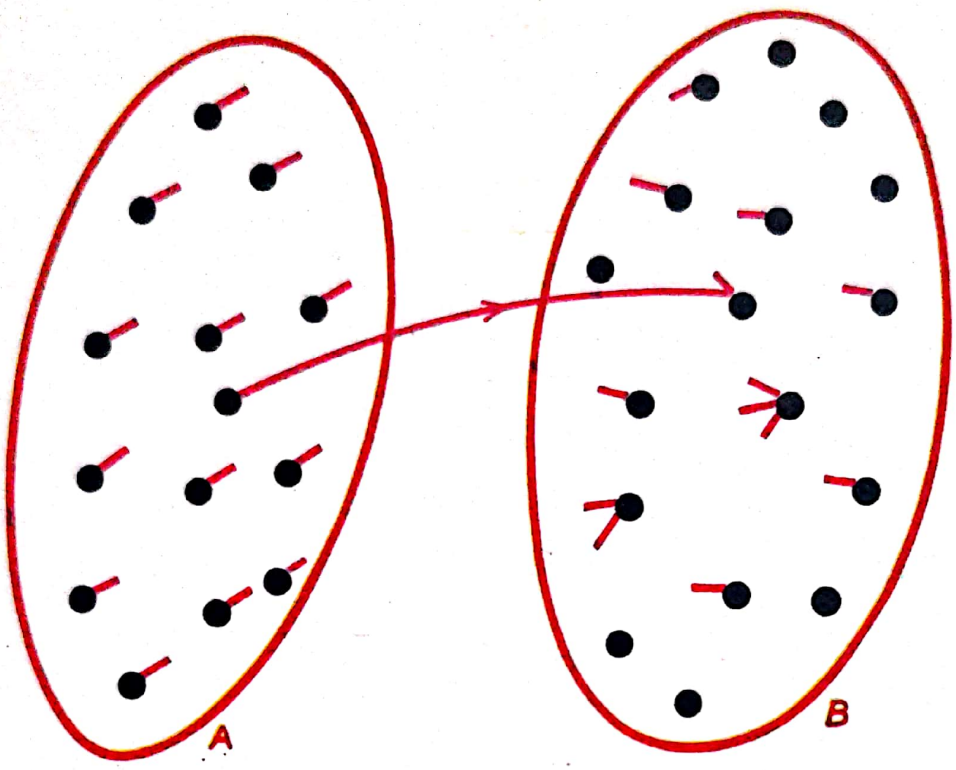
GRAFICUL 85

În mod general

$f: A \to B \iff$
- f este o funcție.
- A este mulțimea originilor perechilor lui f.
- B conține mulțimea extremităților perechilor lui f.

Scanned with OKEN Scanner

Reprezentăm această situație prin schema:



$f: A \to B$

Toate săgețile lui f pleacă din A și ajung în B

Din orice punct al lui A pleacă o săgeată a lui f și numai una singură.

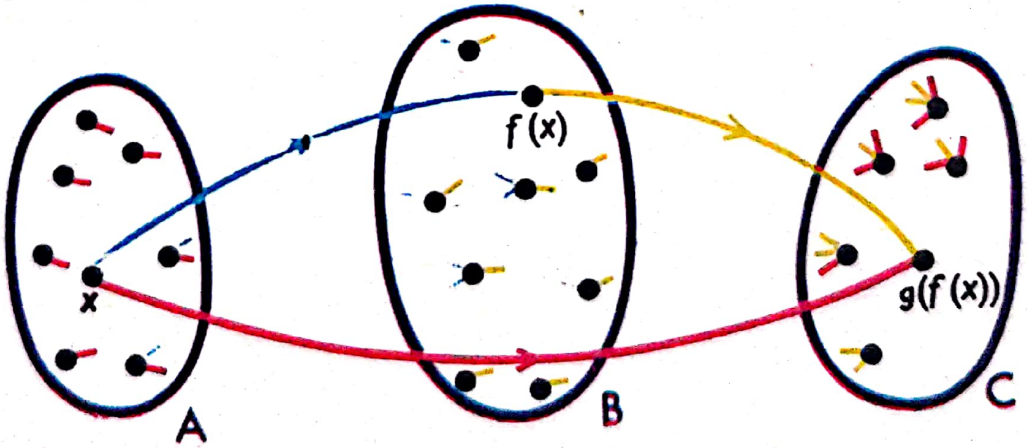
GRAFICUL 86

Dacă $a \in A$ și $f: A \to B$, funcția f este definită în a și spunem că ea aplică a pe $f(a) \in B$.

Pentru orice parte P din A, mulțimea fP a extremităților săgeților lui f care pleacă din P este numită **imaginea lui *P* prin *f*.**

$$fP = \{f(p) \mid p \in P\}$$

Compuneți aplicațiile $f: A \to B$ și $g: B \to C$



Avem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ f g g o f

TEOREMA 2 — *Compusa $g \circ f$ a aplicațiilor $f: A \to B$ și $g: B \to C$ este aplicația $g \circ f: A \to C$.*

EXERCIȚII

1. Prețurile dintr-un magazin definesc o funcție p: A → P a mulțimii cumpărăturilor pe mulțimea prețurilor. Pentru orice cumpărătură $a \in A$, $p(a)$ arată prețul cumpărăturii a.

2. Funcția $x \to x + 5$ considerată mai sus este o aplicație f: $\omega \to \omega$.
Calculați $f\{0, 2, 5, 7, 9, 85, 78, 17, 1\}$
Relația f^{-1} este o funcție.
Această funcție nu este definită în toate punctele lui ω.
f^{-1} nu este o aplicație $\omega \to \omega$.
f este o aplicație f: $\omega \to \{5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$
f^{-1} este o aplicație f^{-1} : $\{5, 6, 7, 8, \ldots\} \to \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

3. Fie f: $\omega \to \omega$: $x \to 7x$.
Calculați $f(2)$, $f\{3\}$, $f\{3, 4\}$, $f\,\omega$, $f\,2\omega$.
(Răspunsuri: $f(2) = 14$, $f\{3\} = \{21\}$, $f\,\omega = 7\,\omega, \ldots$).
Relația f^{-1} este o funcție care nu este definită în orice punct al lui ω.
Nu este o **aplicație** $\omega \to \omega$.
f^{-1} este o aplicație f^{-1} : $7\,\omega \to \omega$.

4. Relația f: . . . *are drept capitală* . . . este o aplicație f: P → V a mulțimii țărilor în mulțimea orașelor.
Imaginea fP este mulțimea capitalelor.
f^{-1} este o funcție care nu este definită în orice oraș, ci în orice capitală.
f^{-1} nu este o aplicație V → P.
f^{-1} este o aplicație fP → P.

5. Fie f: $\omega \to \omega$: $x \to 6x + 7$.
Calculați $f(o)$, $f\{3\}$, $f\{2, 5, 7\}$, $f\,\omega$.
(Răspunsuri: $f(o) = 7$, $f\{3\} = \{25\}, \ldots$).

6. Fie D mulțimea echipelor de fotbal care joacă în aceeași categorie. Campionatul se joacă prin meciuri tur și retur.
Dacă D cuprinde n echipe, cîte meciuri vor fi jucate în cursul campionatului?

Scanned with OKEN Scanner

Dacă x, y indică echipe distincte, vom nota $f(x,y)$ rezultatul meciului $x - y$ jucat pe terenul lui x. Deci $f(x,y) \in \omega \times \omega$.
Relația f este o funcție. Este ea definită în orice punct $D \times D$?
Să notăm cu M mulțimea meciurilor și cu Δ_D mulțimea perechilor identice de elemente ale lui D. Întrucît orice meci poate fi reprezentat printr-o pereche de echipe distincte, vom putea scrie:

$$M = (D \times D) \setminus \Delta_D$$

f este o aplicație $M \to \omega \times \omega$.
În general, relația f^{-1} nu este o funcție. Explicați răspunsul vostru.
Credeți că a fost un singur campionat în care f^{-1} a fost o funcție? Justificați răspunsul vostru.
Situația ar fi fost aceeași pentru un campionat de baschetbal?

7. Fie h: $\omega \to \omega$: $t \to t + 1$.
$2\,\omega$ este mulțimea numerelor naturale pare, iar $h\,2\,\omega$ este mulțimea numerelor naturale impare.

8. Fie $\mathbb{S}$ mulțimea semidreptelor închise:
Pentru orice $S \in \mathbb{S}$ să indicăm prin $g(S)$ originea lui S.
Am definit astfel o funcție g: $\mathbb{S} \to \Pi$.
Relația g^{-1} nu este o funcție.

9. **Dacă** f: A $\to$ B, **atunci** $f^{-1} \circ f$ este relația... *are aceeași imagine prin f ca...*
Această relație este o echivalență definită în A.

Scanned with OKEN Scanner

5 — APLICAȚII BIUNIVOCE

Am văzut numeroase aplicații $f: A \to B$ în care f^{-1} nu este o aplicație $B \to A$.

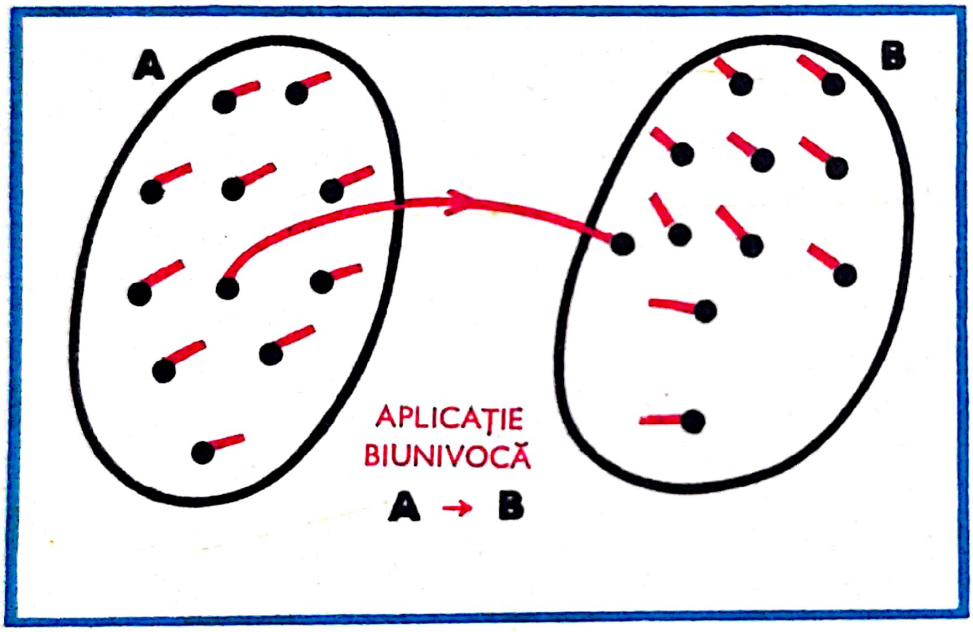
Dați mai multe exemple de situații de acest fel.

Am întîlnit cîteva exemple de aplicații $f: A \to B$ în care f^{-1} este o aplicație $f^{-1}: B \to A$.

DEFINIȚIA 2 — *Numim aplicație* **biunivocă,** *orice aplicație* $f: A \to B$ *în care* f^{-1} *este o aplicație* $f^{-1}: B \to A$.

Dați 10 exemple de aplicații biunivoce.

Schema de mai jos rezumă definiția aplicației biunivoce.



DEFINIȚIA 2 — *Relația f este o aplicație* **biunivocă** $f: A \to B$ *dacă și numai dacă*

1. *Toate săgețile lui f pleacă din A și ajung în B.*
2. *Din orice punct al lui A pleacă o săgeată a lui f și numai una singură.*
3. *În orice punct al lui B ajunge o săgeată a lui f și numai una singură.*

Întrucît condițiile 1 și 2 înseamnă că $f: A \to B$ mai putem enunța:

DEFINIȚIA 2 — *Aplicația* $f: A \to B$ *este* **biunivocă,** *dacă și numai dacă în orice punct al lui B ajunge o săgeată a lui f și numai una singură.*

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 2 ne permite să scriem

f este o aplicație **biunivocă** $A \to B$	$\Leftrightarrow$	$f: A \to B$ și $f^{-1}: B \to A$	$\Leftrightarrow$	f^{-1} este o aplicație **biunivocă** $B \to A$

Este foarte ușor să vedem acum că și compusa a două aplicații biunivoce este o aplicație biunivocă.

TEOREMA 3 — Compusa aplicațiilor biunivoce $f: A \to B$ și $g: B \to C$ este aplicația biunivocă $gof: A \to C$.

DEMONSTRAȚIE:

Compusa gof este o aplicație $gof: A \to C$ (teorema 2).

Știm că $(gof)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Deoarece f și g sînt aplicații biunivoce

$$f^{-1}: B \to A, \quad g^{-1}: C \to B,$$

iar prin teorema 2

$$f^{-1} \circ g^{-1}: C \to A$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

EXERCIȚII

1. C arată mulțimea elevelor din clasa noastră.
N arată mulțimea numelor de familie ale elevelor din clasa noastră.
Dacă în clasa noastră nu există două eleve care să aibă același nume, funcția f care reprezintă pe fiecare elevă prin numele său de familie este o aplicație biunivocă

$$f: C \to N.$$

Dacă tu ești t, ce-nseamnă $f(t)$?
Ori de cîte ori desemnăm o elevă, ea poate enunța numele ei de familie

$$f: C \to N.$$

Ori de cîte ori strigăm unul din numele din C, se ridică o elevă și numai una singură

$$f^{-1}: N \to C.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Relația f: «... *are ca soție* ...» este o aplicație biunivocă f: H → F a mulțimii H a europenilor căsătoriți în raport cu mulțimea F a soțiilor lor.

De ce am ales mulțimea europenilor căsătoriți și nu mulțimea tuturor oamenilor căsătoriți care trăiesc pe planetă?

f^{-1} este o aplicație biunivocă F → H

3. Relația d: ... *are ca dublu* ... este o aplicație biunivocă $\omega \to 2\omega$ a mulțimii numerelor întregi naturale în raport cu mulțimea numerelor naturale pare.

4. Relația t: ... *are ca triplu* ... este o aplicație t: $\omega \to \omega$
Aceasta nu este o aplicație biunivocă $\omega \to \omega$. De ce?
Este o aplicație biunivocă t: $\omega \to 3\omega$.

Avem

$$t\colon \omega \to 3\omega\colon x \to 3x.$$

Completați

$$t^{-1}\colon 3\omega \to \omega\colon \ldots \to \ldots$$

5. Relația ... *are ca nas* ... este o aplicație biunivocă P → N a mulțimii P a acestor persoane în raport cu mulțimea N a nasurilor lor.

6. Aplicațiile

$$f\colon \omega \to 2\omega : x \to 2x$$
$$g\colon 2\omega \to 6\omega : x \to 3x$$

sînt aplicații biunivoce.
Compusa $g \circ f$ este aplicația biunivocă

$$g \circ f\colon \omega \to 6\omega\colon x \to 6x$$

7. Funcția identică a mulțimii E

$$1_E : E \to E\colon x \to x$$

este o aplicație biunivocă.

8. Dacă f indică o aplicație biunivocă f: A → B,

avem $1_B \circ f = f = f \circ 1_A$.

Scanned with OKEN Scanner

6 — APLICAȚIA UNEI MULȚIMI ÎN O ALTĂ MULȚIME ȘI PE O ALTĂ MULȚIME

DEFINIȚIA 2 —

Aplicația $f: A \to B$ este o aplicație biunivocă $\Longleftrightarrow$ Aplicația $f: A \to B$ este astfel încît în orice punct al lui B ajunge o săgeată a lui f și **numai una singură**

Să scindăm locuțiunea

una și numai una singură

în

cel puțin una și **cel mult una**

ceea ce ne duce la definiția

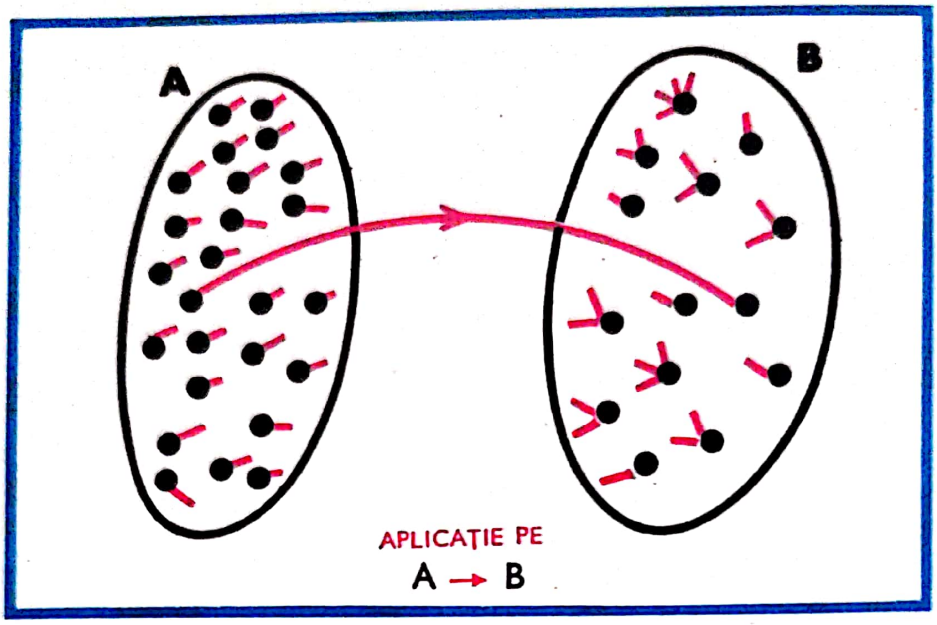
DEFINIȚIA 3 — *Aplicația $f: A \to B$ este o* ***aplicație*** *a mulțimii A* ***pe*** *mulțimea B, dacă și numai dacă în orice punct al lui B ajunge* **cel puțin** *o săgeată a lui f.*

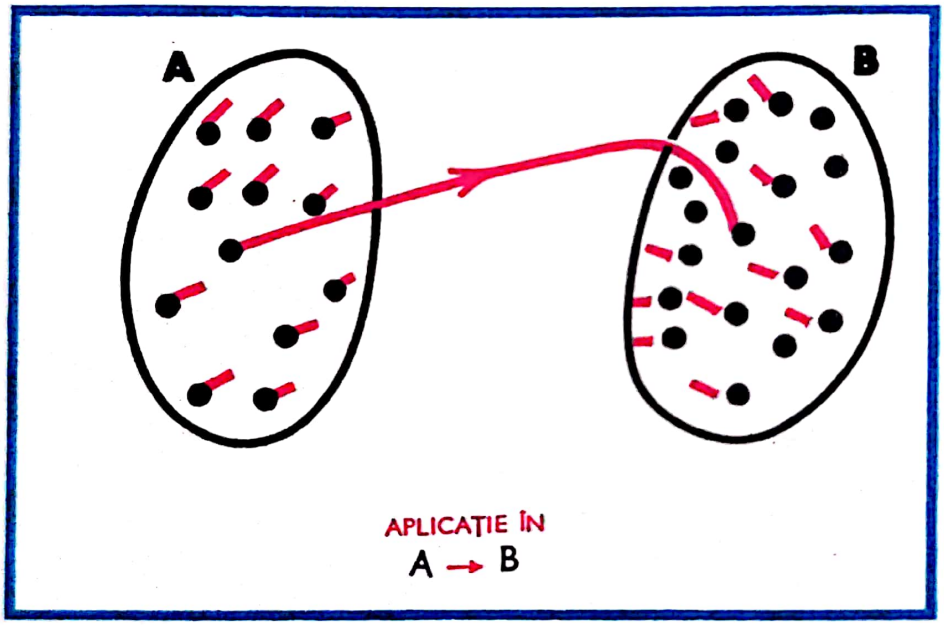
DEFINIȚIA 4 — *Aplicația $f: A \to B$ este o* ***aplicație*** *a mulțimii A* ***în*** *mulțimea B, dacă și numai dacă în orice punct al lui B ajunge* **cel mult** *o săgeată a lui f.*

DEFINIȚIA 5 — *Aplicația $f: A \to B$ este* ***biunivocă,*** *dacă și numai dacă ea este totodată o* ***aplicație*** *a mulțimii A,* ***în*** *și* ***pe*** *mulțimea B.*

Scanned with OKEN Scanner

Iată schemele acestor *definiții*





Din examinarea acestor scheme se vede imediat că definițiile 3 și 4 pot fi reformulate precum urmează:

DEFINIȚIA 3 — *Numim* **aplicație** *a mulțimii A* **pe** *mulțimea B orice aplicație* $f: A \to B$, *astfel încît* $fA = B$.

DEFINIȚIA 4 — *Numim* **aplicație** *a mulțimii A* **în** *mulțimea B, orice aplicație* $f: A \to B$, *astfel încît pentru orice* $x, y \in A$: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Scanned with OKEN Scanner

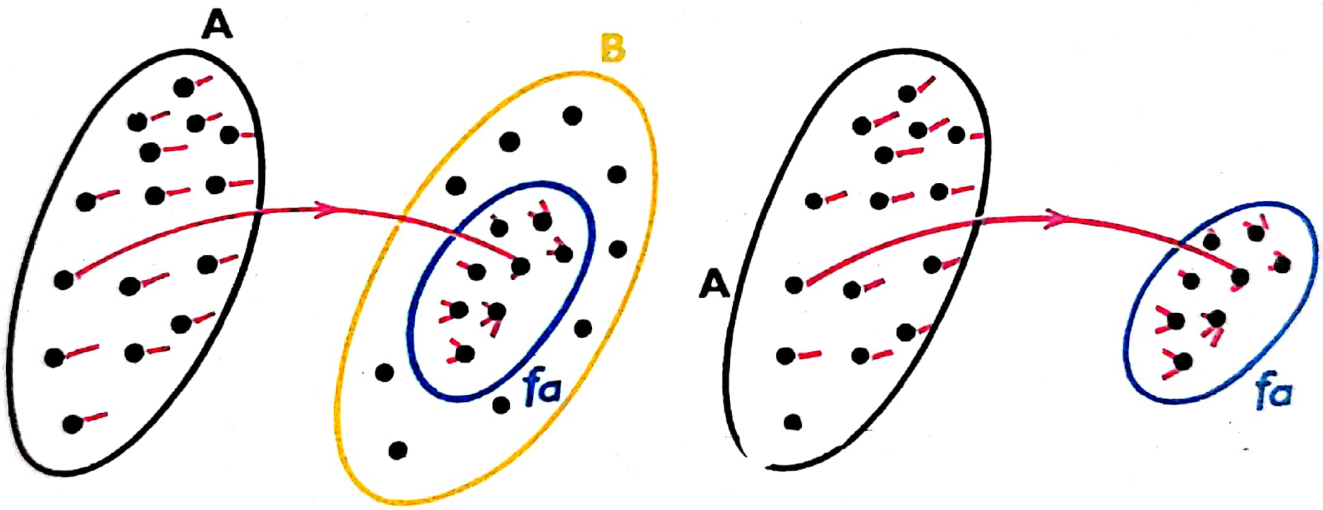
EXERCIȚII

1. Cînd jucăm tabinet și distribuim cele 52 de cărți la 4 jucători, definim o aplicație a mulțimii C a cărților pe mulțimea J a jucătorilor (d: C → J).

2. Relația « . . . *are drept pătrat* . . . » este o aplicație a mulțimii ω în mulțimea ω. Este o aplicație biunivocă a lui ω în raport cu mulțimea pătratelor perfecte.

3. Un biet copil plînge cu sughițuri pe marginea unui trotuar. Prindem aceste cuvinte ale lui: « . . . *distribuția* . . . hî . . . *bomboane* . . . hî . . . *n-a fost o aplicație a unei mulțimi pe altă mulțime*».
Dați-i acestui copil o bomboană și explicați-i bunicii lui ce vrea el să spună.

4. Orice aplicație A → B este o aplicație a mulțimii A pe mulțimea fA (A → fA).



f : FUNCȚIE : A → B APLICAȚIE PE : A → fA

GRAFICUL 87

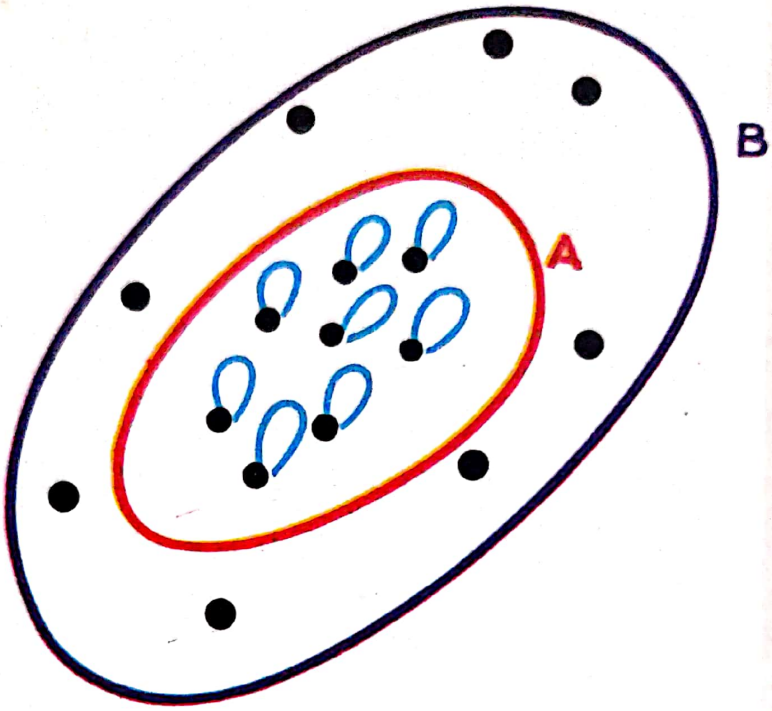
5. Fie C mulțimea elevilor din clasa voastră.
Fie P mulțimea prenumelor elevilor din școala voastră.
Aplicația

$$p\colon C \to P\colon x \to p(x),$$

unde $p(x)$ înseamnă prenumele elevului x, este ea o aplicație a mulțimii C în mulțimea P?
Nu cred că ea este aplicația mulțimii C pe P.
Nu cred, deci, că poate fi o aplicație biunivocă. De ce?

Scanned with OKEN Scanner

6. Dacă $A \subset B$, funcția identică $A \to B$: $a \to a$ este o aplicație a mulțimii A în mulțimea B.

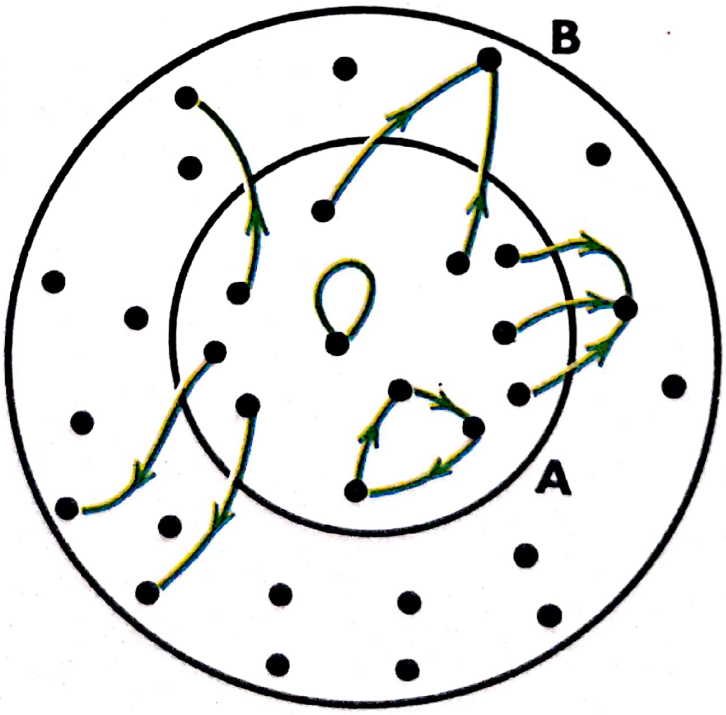


APLICAȚIA IDENTICĂ $A \to B$

GRAFICUL 88

7. Orice aplicație a mulțimii A în mulțimea B $A \to B$ este o aplicație biunivocă $A \to fA$.
8. Desenați graficul unei funcții $A \to B$ care nu este nici aplicația mulțimii A în B, nici aplicația mulțimii A pe B, în următoarele 3 cazuri:

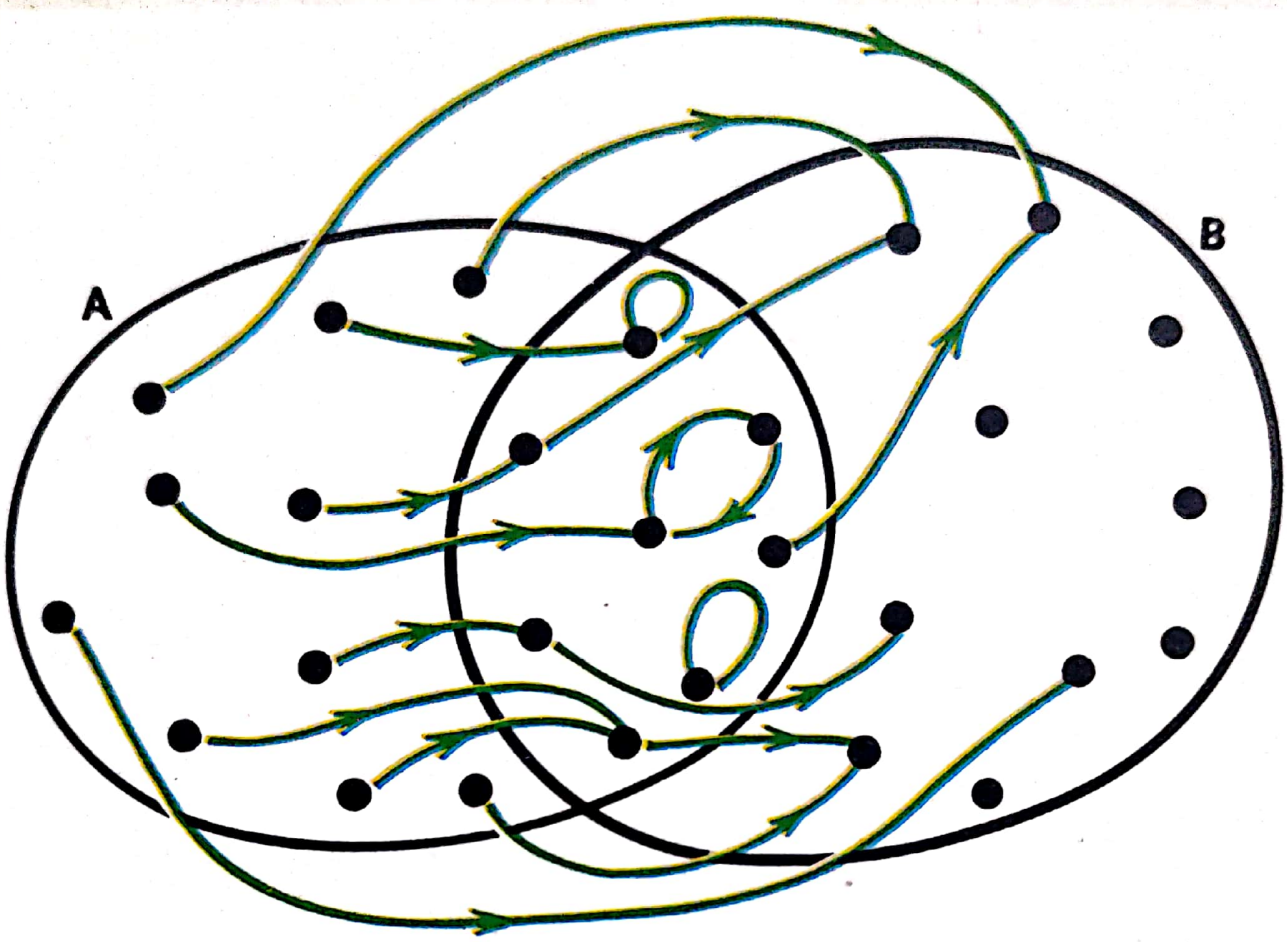
1) $A \subset B$



GRAFICUL 89

Scanned with OKEN Scanner

2) $A \cap B \neq \varnothing$, $A \not\subset B$, $B \not\subset A$



GRAFICUL 90

3) $A \supset B$

9. Funcția care aplică orice semidreaptă închisă pe originea sa este o aplicație *pe*, dar nu *în*: $S \to \Pi$ a mulțimii S a semidreptelor închise *pe* Π.

10. Fie C un cerc cu raza nenulă și cu centrul o. Pentru orice $x \in C$, să punem $f(x) = xo$.
Am definit astfel aplicația

$$f: C \to \mathfrak{D}_0: x \to xo$$

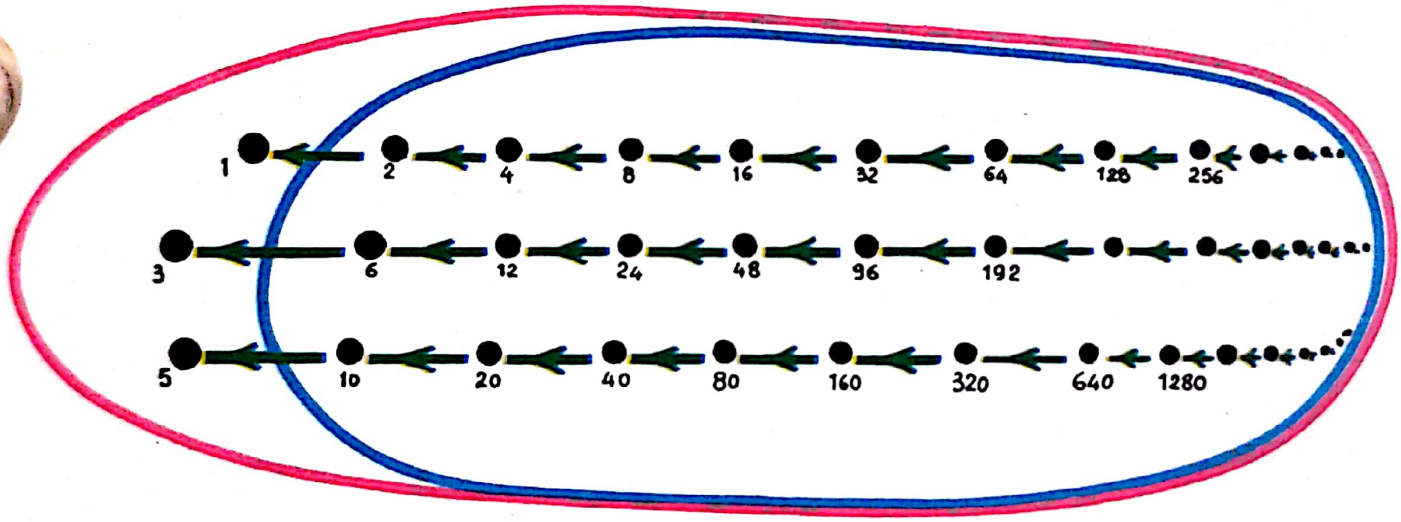
a lui C pe mulțimea $\mathfrak{D}_0$ a dreptelor din Π care cuprind pe o.
Aplicația f este *pe*, dar nu *în*.

Scanned with OKEN Scanner

11. Fie A mulțimea cumpărăturilor care pot fi făcute în acest magazin. Notînd cu $p(a)$ prețul cumpărăturii $a \in A$, am definit o funcție $p: A \to P$ care aplică mulțimea A pe mulțimea P a prețurilor.
Această aplicație nu este desigur o aplicație a mulțimii A *în* mulțimea P.

12. Paștile este o sărbătoare mobilă, adică nu are loc în fiecare an la aceeași dată.
Această situație definește o funcție care aplică mulțimea A a anilor la mulțimea D a datelor din an.
Această funcție nu este nici o aplicație a mulțimii A *pe* mulțimea D, nici o aplicație a mulțimii A *în* D.

13. Funcția $2\omega \to \omega: 2x \to x$ este o aplicație *pe* $2\omega \to \omega$ cu $2\omega \subset \omega$.



$2\omega \to \omega : 2x \to x$

GRAFICUL 91

14. Fie M mulțimea meciurilor de fotbal jucate anul trecut, la categoria I. Funcția $f: M \to \omega \times \omega$ care aplică orice meci la scorul lui, nu este nici aplicație *în*, nici aplicație *pe*.

15. Fie M mulțimea meciurilor de baschetbal jucate săptămîna aceasta, la prima categorie. Sînt aproape sigur că funcția scor $f: M \to \omega \times \omega$ este o aplicație *în*. De ce?

Scanned with OKEN Scanner

16. Pentru orice $n \in \omega$, să notăm cu $u(n)$ cifra unităților lui n scris în sistemul zecimal.
Funcția $u: \omega \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ este o aplicație *pe* și nu o aplicație *în*.

$$u^{-1}\, u\, \{3\} = \{3,\ 13,\ 23, \ldots, 103,\ 113, \ldots\} = 10\,\omega + 3.$$

17. Să notăm cu A mulțimea perechilor și a mulțimilor cu un singur element de numere naturale:

$$A = \{\{x, y\} \mid x, y \in \omega\}$$

Pentru orice element $\{x, y\} \in A$, să punem $s(\{x, y\}) = x + y$.
Funcția s: A $\to \omega$ astfel definită este o aplicație *pe*, dar nu este o aplicație *în*.
Avem $s^{-1}\, s\, \{\{3, 5\}\} = \{\{0, 8\}, \{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{4\}\}$
Calculați la fel $s^{-1}\, s\, \{\{3, 13\}\}$
Mi-ați putea spune cîte elemente are mulțimea $s^{-1}\, s\, (\{50, 51\})$?

18. Pentru orice $n \in \omega$, să numim $d(n)$ numărul zecilor din n. Avem deci $d(17) = 1$, $d(1962) = 196$, $d(8) = 0$.
Funcția d: $\omega \to \omega$ este o aplicație *pe*, dar nu este o aplicație *în*.
Avem $d^{-1}\, d\, \{18\} = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$
Calculați $d^{-1}\, d\, \{117\}$.
Cîte elemente cuprinde

$$d^{-1}\, d\, \{189.\ 887.\ 639.\ 583.\ 112.\ 223.\ 487\}?$$

Vi se semnalează că

$$x, y \in \omega \quad ; \quad x \leqslant y; \quad d(x) = d(y)$$

Ce puteți spune despre $y - x$?

19. Să luăm $B = \{\{2x, 2y\} \mid x, y \in \omega\}$ și $p(\{2x, 2y\}) = 2x \times 2y = 4xy$.
Aplicația p: B $\to \omega$ astfel definită nu este nici o aplicație *în*, nici o aplicație *pe*.
Calculați pB, $p^{-1}\, p\, \{\{2, 4\}\}$, $p^{-1}\, p\, \{\{6,\ 18\}\}$,

$$pp^{-1}\, \{\{898,\ 1786\}\},\ p^{-1}\, p\, \{\{6\}\}$$

Scanned with OKEN Scanner

7 — COMPUNEREA APLICAȚIILOR

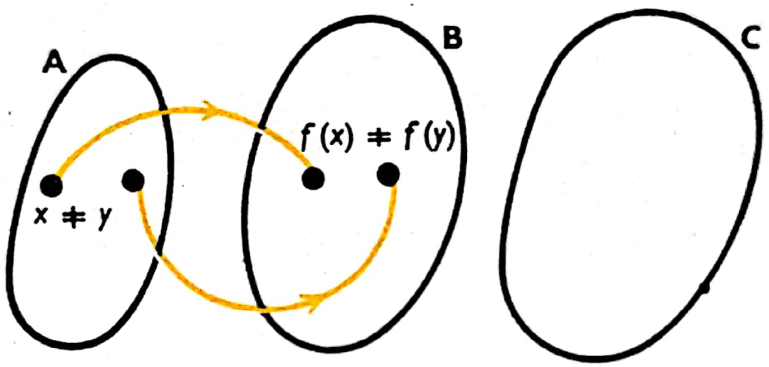
TEOREMA 4 — Compusa gof a aplicației mulțimii A *în* mulțimea B $f: A \to B$ cu aplicația mulțimii B *în* mulțimea C $g: B \to C$, este o aplicație a mulțimii A *în* mulțimea C.

DEMONSTRAȚIE:

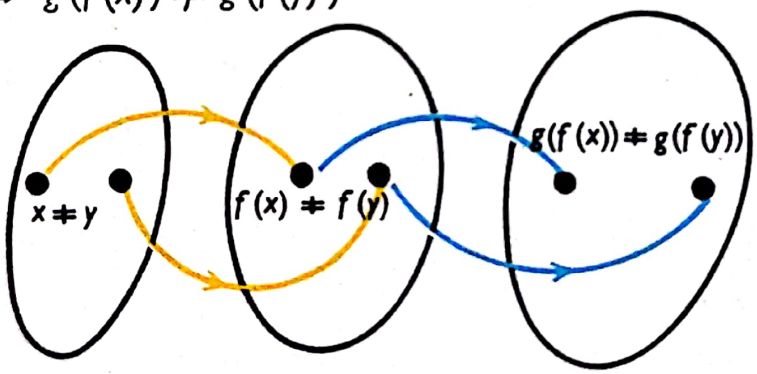
Trebuie să dovedim că pentru orice $x, y \in A$:

$$x \neq y \Rightarrow (gof)(x) \neq (gof)(y)$$

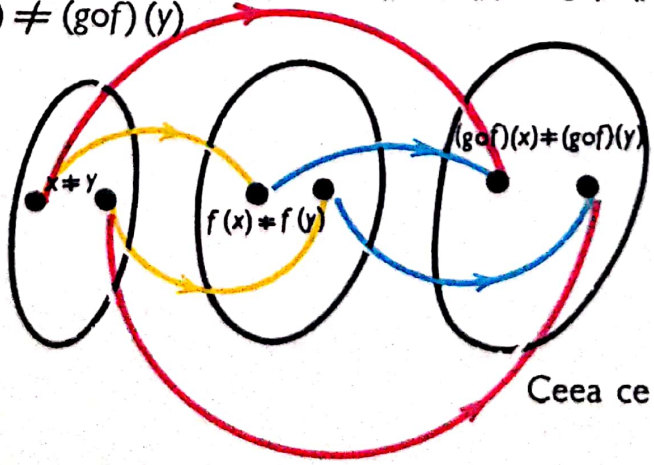
Deoarece f este o aplicație a mulțimii A *în* mulțimea B avem: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.



Deoarece g este o aplicație a mulțimii B *în* mulțimea C avem:
$f(x) \neq f(y) \Rightarrow g(f(x)) \neq g(f(y))$



Deoarece $(gof)(x) = g(f(x))$ și $(gof)(y) = g(f(y))$ am demonstrat că $x \neq y \Rightarrow (gof)(x) \neq (gof)(y)$



Ceea ce trebuia să demonstrăm.

TEOREMA 5 — Compusa *gof* a aplicației mulțimii A *pe* mulțimea B $f: A \to B$ cu aplicația mulțimii B *pe* mulțimea C, $g: B \to C$ este o aplicație a mulțimii A *pe* mulțimea C $gof: A \to C$.

$$f: A \xrightarrow{\text{pe}} B \text{ și } g: B \xrightarrow{\text{pe}} C \Rightarrow gof: A \xrightarrow{\text{pe}} C$$

Prin teorema 2, știm că compusa *gof* a aplicațiilor *f* și *g* este o aplicație $A \to C$. Rămîne să dovedim că *gof* este aplicația mulțimii A *pe* C, adică $(gof)\,A = C$. Aceasta se vede din următorul calcul:

$(gof)\,A = gfA$
$= gB$ (fiindcă $fA = B$, deoarece $f: A \to B$ este aplicația mulțimii A pe mulțimea B)
$= C$ (fiindcă $gB = C$, deoarece $g: B \to C$ este aplicația mulțimii B pe mulțimea C.)

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

EXERCIȚII

1. Ce puteți spune despre compusa

$$g \circ f: \omega \to \omega: x \to 3x + 7?$$

ale aplicațiilor *în*

$$f: \omega \to \omega: x \to 3x?$$
$$g: \omega \to \omega: x \to x + 7?$$

Calculați compusele

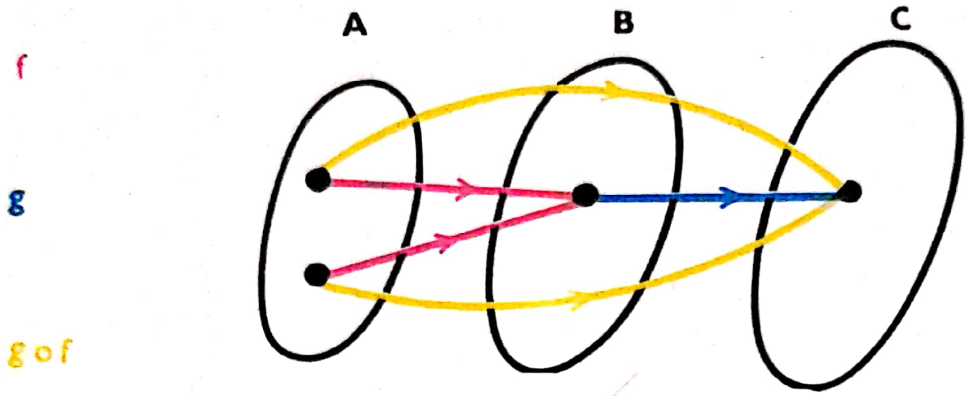
$$g \circ f \circ f \circ g \circ f$$
$$f \circ g \circ g \circ f \circ g$$

Ce puteți spune despre acestea?

2. Funcțiile următoare aplică mulțimea ω *în* mulțimea ω:

$$\omega \to \omega: x \to 7x - 3$$
$$\omega \to \omega: x \to 7(x - 3)$$

3. Dacă f este o funcție care nu aplică mulțimea A *în* B $A \to B$ și g: $B \to C$, atunci $g \circ f$ este o funcție care nu aplică mulțimea A *în* C $A \to C$.

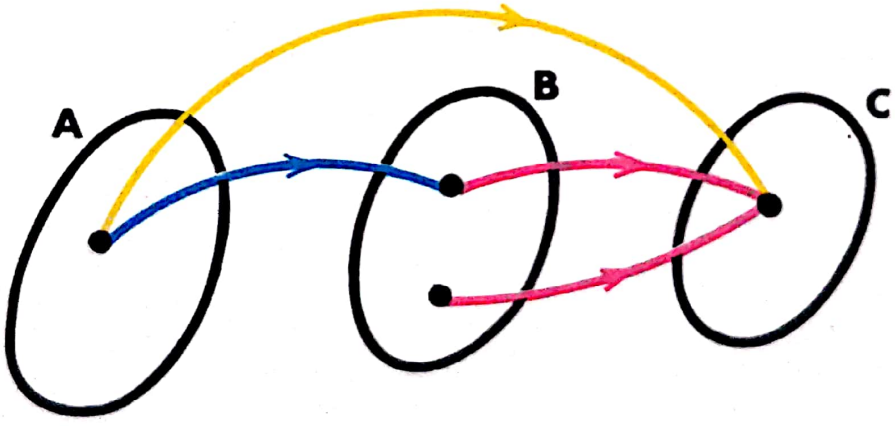


f NU APLICĂ ÎN ⇒ g o f NU APLICĂ ÎN

GRAFICUL 92

4. Dacă f: $A \to B$ și dacă g este o funcție care nu aplică mulțimea B *pe* mulțimea C, $B \to C$, atunci $g \circ f$ este o funcție care nu aplică mulțimea A *pe* C, $A \to C$.

5. Construiți trei mulțimi A, B, C, o funcție f care să nu aplice mulțimea φ A *pe* B, $A \to B$, o funcție g care să nu aplice mulțimea B *în* C, $B \to C$, astfel ca $g \circ f$ să fie o aplicație biunivocă $A \to C$.



f : A → B NU APLICĂ *PE* g : B → C NU APLICĂ *ÎN*

g o f : A → C APLICAȚIE BIUNIVOCĂ

GRAFICUL 93

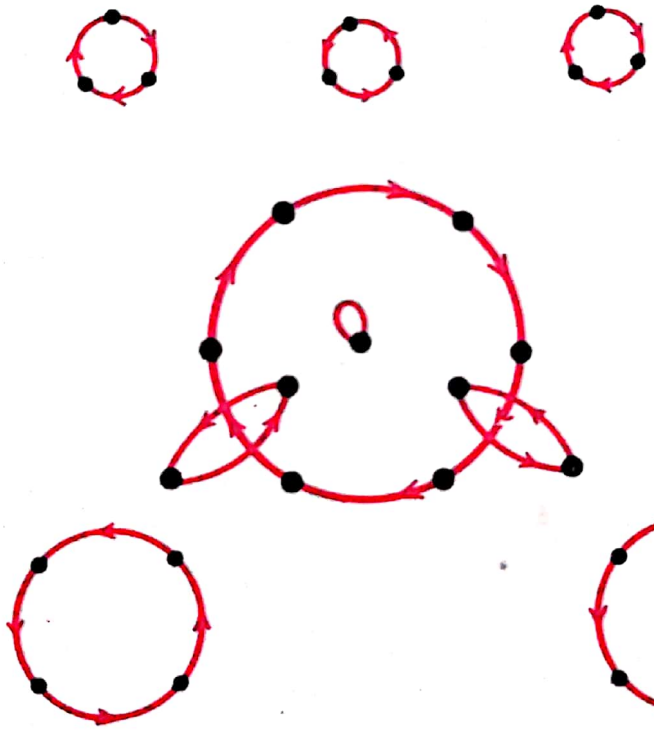
Scanned with OKEN Scanner

13

Permutări

1 — PERMUTĂRI

Iată un instantaneu dintr-un balet. Fiecare dansatoare a luat cu mîna dreaptă mîna stîngă a unei dansatoare. Astfel este definită o relație schematizată de graficul de mai jos



MIC BALET
GRAFICUL 94

— Prima balerină are mîinile unite deasupra capului. Unde este ea?

Anumite dansatoare formează hore. Spuneți-mi care sînt dansatoarele care stau cu fața spre interiorul horei.

— Este evident că în graficul 94, din orice punct pleacă o săgeată și numai una singură și în orice punct ajunge o săgeată și numai una singură.

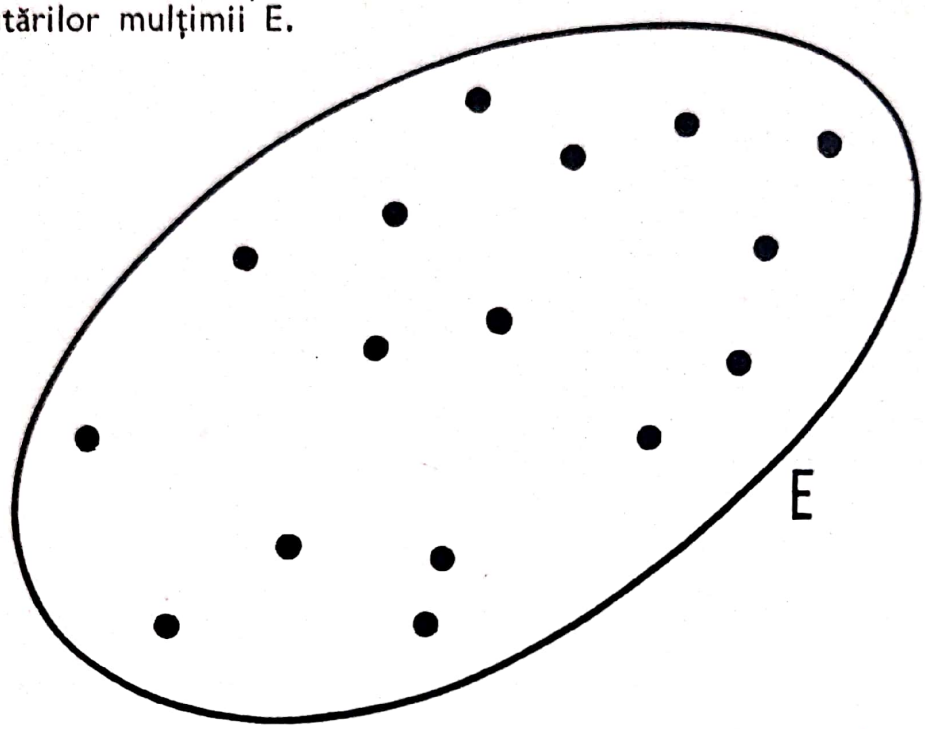
Se numește **permutare** orice relație definită de un astfel de grafic.

DEFINIȚIA 1 — *Se numește* ***permutare a mulțimii E*** *orice aplicație biunivocă* $E \to E$.

Scanned with OKEN Scanner

2 — GRUPUL PERMUTĂRILOR UNEI MULȚIMI

Vom nota cu $\mathfrak{S}E$ mulțimea tuturor permutărilor mulțimii E.

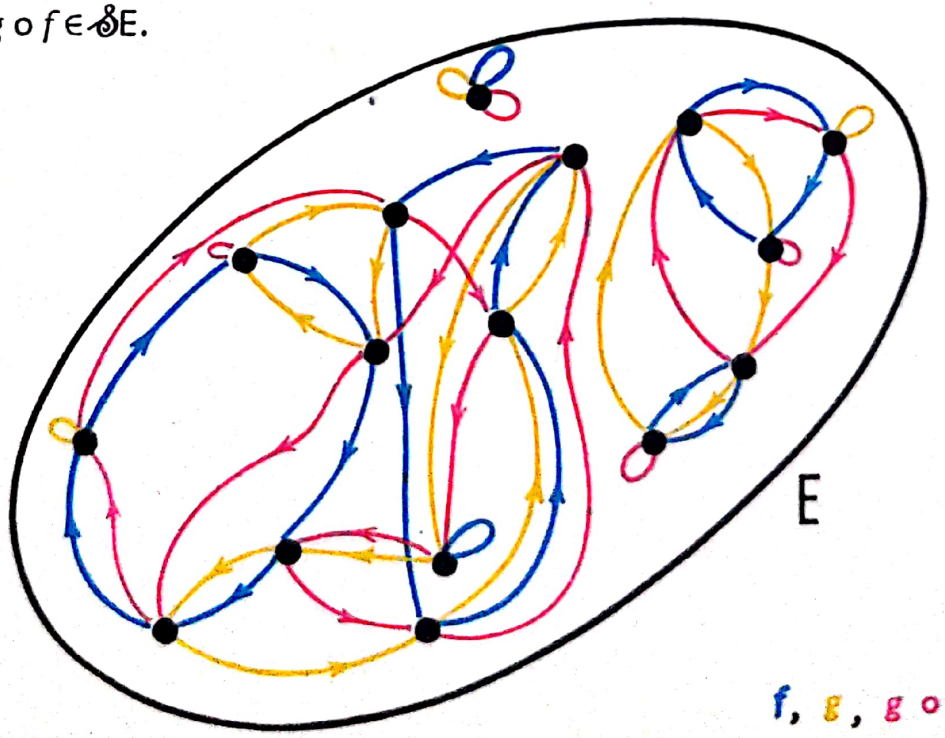


LEMA 1 — *Compusa* **g o f** *a permutărilor* **f** *și* **g** *ale lui E este o permutare a lui* **E.**

DEMONSTRAȚIE: Prin definiție, permutările *f*, *g* și E sînt aplicații biunivoce $f: E \to E$ și $g: E \to E$.

Deci, (cap. 12, teorema 3, p. 193) $g \circ f$ este o aplicație biunivocă $E \to E$, adică o permutare a lui E.

Deci $g \circ f \in \mathfrak{S}E$.



GRAFICUL 95

LEMA 2 — *Compunerea permutărilor este asociativă.*

> *Pentru orice* $f, g, h \in \mathfrak{S}E$: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Această lemă rezultă din asociativitatea compunerii relațiilor.

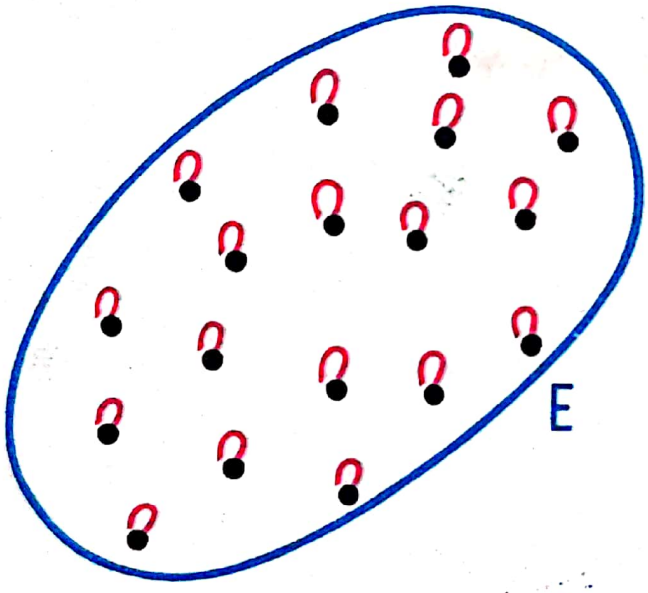
LEMA 3 — *Transformarea identică a lui E.*

$$1_E : E \to E : x \to x \text{ este o permutare a lui } E.$$

Mai mult, pentru orice $f \in \mathfrak{S}E$ *avem* $1_E \circ f = f \circ 1_E = f$, *ceea ce exprimăm spunînd că* 1_E *este* **neutru** *pentru compunere.*

Obținem un grafic al lui 1_E punînd oricărui punct reprezentativ a lui E o buclă.

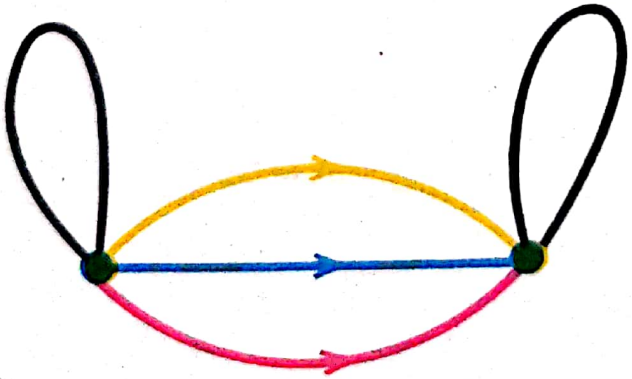
Deci se verifică perfect că din orice punct al lui E pleacă o săgeată (buclă !) și numai una singură și ajunge o săgeată (buclă !) și numai una singură.



PERMUTAREA IDENTICĂ

GRAFICUL 96

A doua parte a lemei rezultă din schema de mai jos.

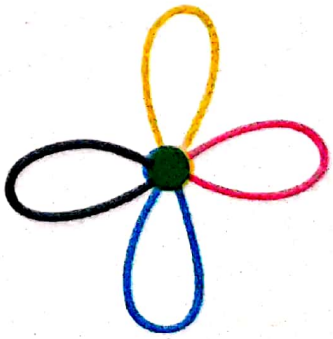


1_E

f

$1_E \circ f$

$f \circ 1_E$



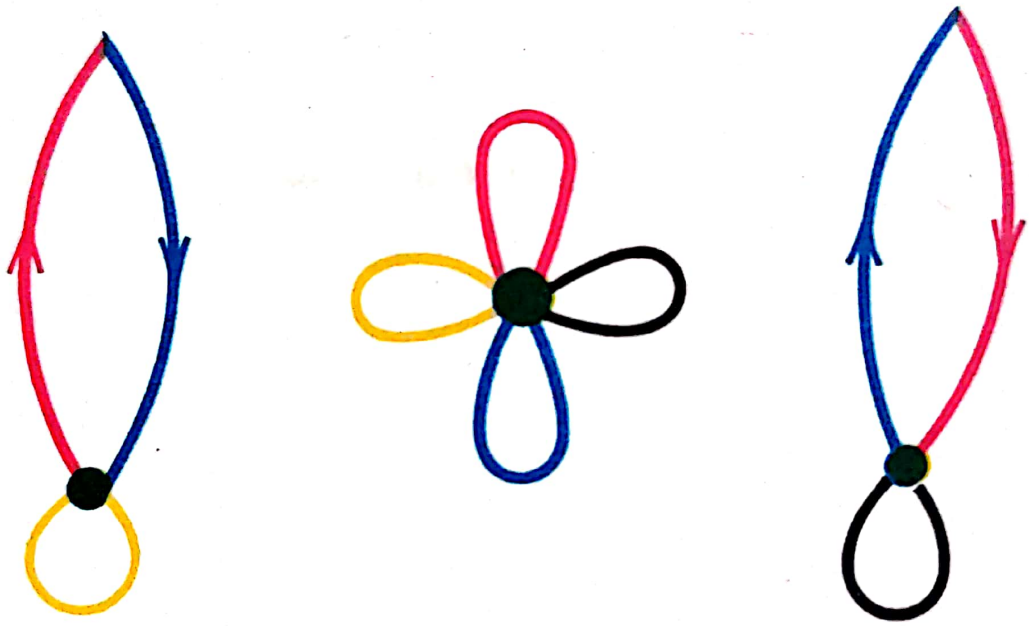
$$1_E \circ f = f \circ 1_E = f$$

Orice permutare f a lui E este o aplicație biunivocă $f: E \to E$.
Reciproca ei este deci o aplicație biunivocă $f^{-1}: E \to E$ și $f^{-1} \in \mathfrak{S}E$.
Deci $f \circ f^{-1}$, $f^{-1} \circ f \in \mathfrak{S}E$.
Se poate preciza că

LEMA 4 — $f^{-1} \circ f = 1_E = f \circ f^{-1}$

Această lemă decurge din trei scheme:

f f^{-1} $f \circ f^{-1}$ $f^{-1} \circ f$



$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_E$$

Lemele 1—4 ne arată că

1. Dacă $f, g \in \mathfrak{S}E$ $\quad f \circ g \in \mathfrak{S}E$
2. Dacă $f, g, h \in \mathfrak{S}E$ $\quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
3. $1_E \in \mathfrak{S}E$ și pentru orice $f \in \mathfrak{S}E$: $1_E \circ f = f = f \circ 1_E$
4. Pentru orice $f \in \mathfrak{S}E$: $f^{-1} \in \mathfrak{S}E$ și $f \circ f^{-1} = 1_E = f^{-1} \circ f$

Exprimăm pe scurt mulțimea acestor leme prin

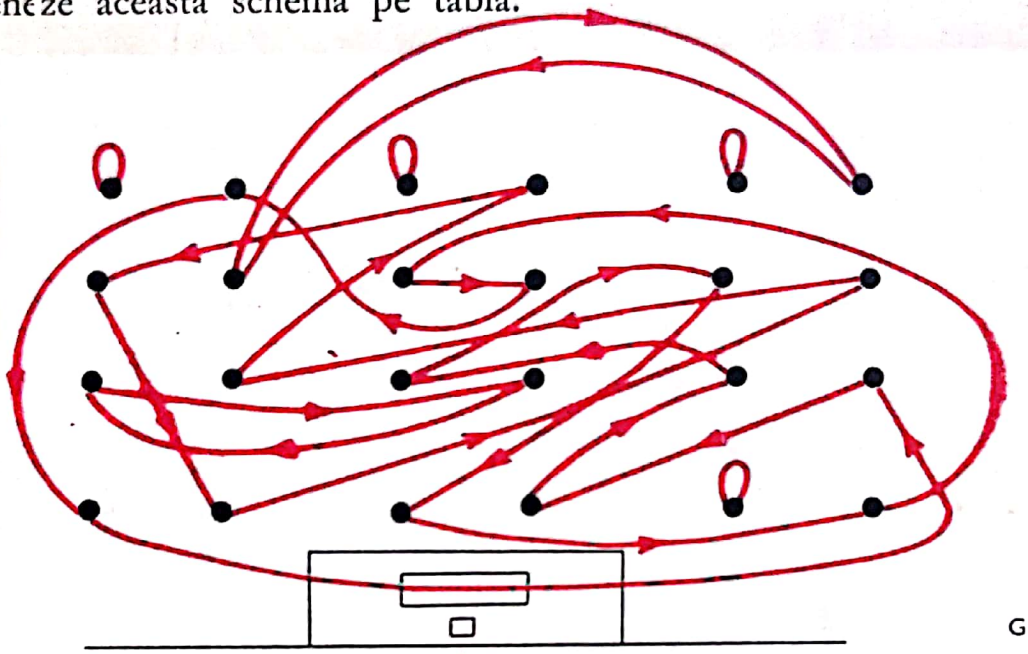
TEOREMA – $\mathfrak{S}E$, o este un grup *(pe care-l numim* **grup simetric al lui E.)**

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

1. Relațiile definite de graficele 17, 18, 19, 20, 21 sînt permutări.

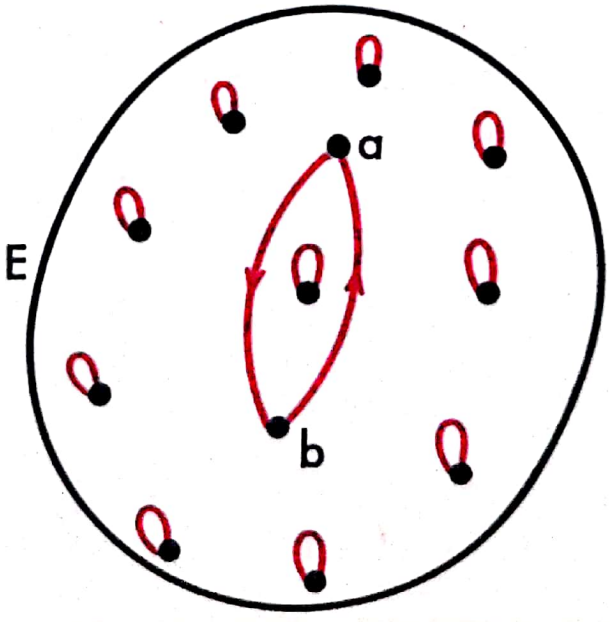
2. În clasa noastră, profesorul titular a hotărît să ne schimbăm locurile pentru examen. El a vrut ca totul să se petreacă în ordine și liniște și s-a limitat să deseneze această schemă pe tablă.



GRAFICUL 97

Această schimbare a locurilor definește deci o *permutare*.
Ce eleve nu și-au schimbat locurile?

3. Fie $a, b \in E$ și $a \neq b$.
Vom nota cu (a, b) permutarea lui E definită de următorul grafic



(a, b)

GRAFICUL 98

Deci avem

$(a, b) = (b, a) = (a, b)^{-1} = (b, a)^{-1}$

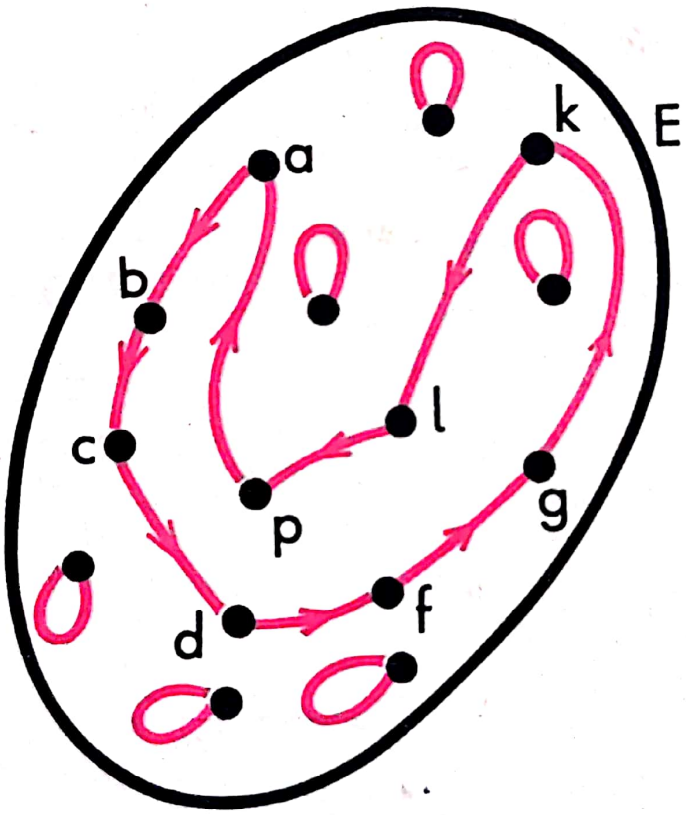
$(a, b) \circ (a, b) = 1_E$

$(a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) = (a, b)$

$(a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) \circ (a, b) = 1_E$

Permutarea (a, b) se numeşte *transpoziţie*.

4. Fie $a, b, c, d, f, g, k, l, p$ elemente ale lui E distincte două cîte două. Indicăm prin $(a, b, c, d, f, g, k, l, p)$ permutarea lui E definită de graficul următor



$(a, b, c, d, f, g, k, l, p)$

GRAFICUL 99

O astfel de permutare se numeşte ciclu.

Avem

$(a, b, c, d, f, g, k, l, p)^2 =$

$= (a, b, c, d, f, g, k, l, p) \circ (a, b, c, d, f, g, k, l, p) =$

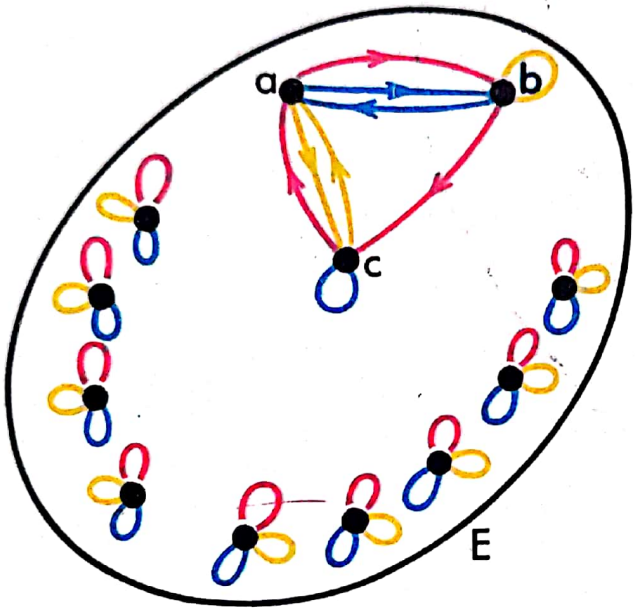
$= (a, c, f, k, p, b, d, g, l).$

Scanned with OKEN Scanner

5. Fie o mulţime E şi a, b, c a elementelor lui E, distincte 2 cîte 2.

Atunci rezultă

$$(a, b, c) = (a, c) \circ (a, b)$$
$$(a, b, c) \circ (a, b, c) = (c, b, a) = (a, b, c)^{-1}$$
$$(a, b, c) \circ (a, b, c) \circ (a, b, c) = 1_E$$



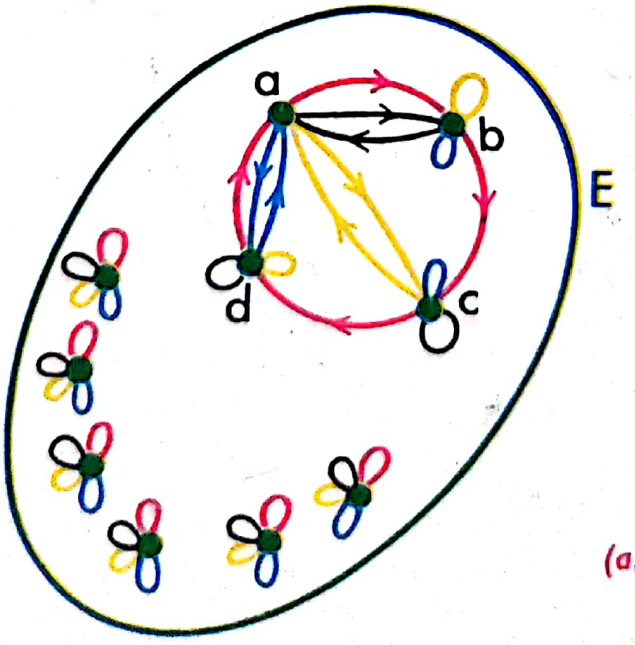
$(a, b, c) = (a, c) \circ (a, b)$
GRAFICUL 100

6.

Fie a, b, c, d elemente distincte ale mulţimii E.

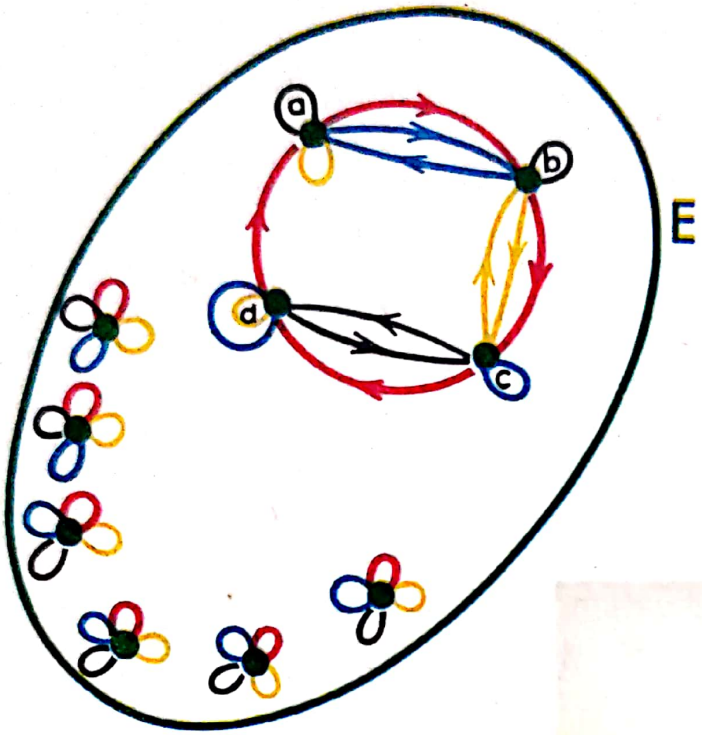
Definiţi formula

$$(a, b, c, d) = (a, d) \circ (a, c) \circ (a, b)$$



$(a, b, c, d) = (a, d) \circ (a, c) \circ (a, b)$
GRAFICUL 101

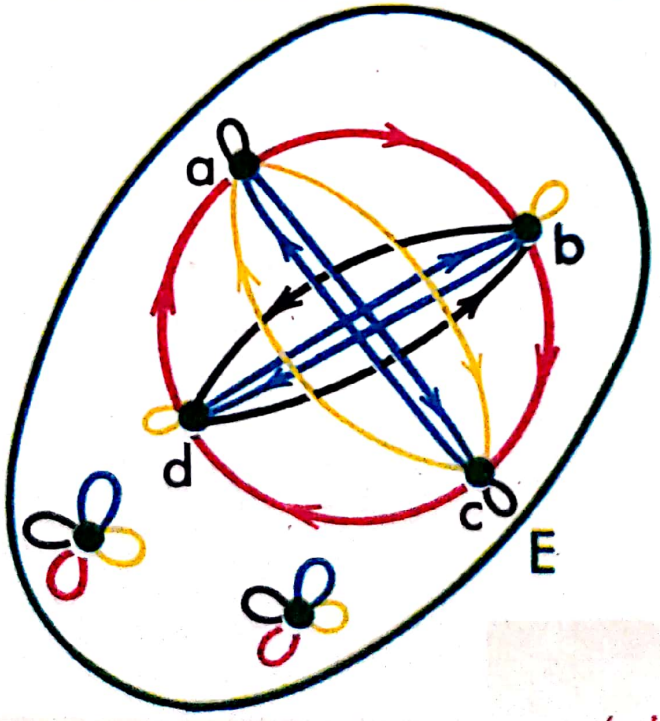
7. Cu aceleaşi notaţii ca la numărul 6 stabiliţi formula
$(a, b, c, d) = (a, b) \circ (b, c) \circ (c, d)$



$(a, b, c, d) = (a, b) \circ (b, c) \circ (c, d)$

GRAFICUL 102

8. Cu aceleaşi notaţii ca la exerciţiile precedente stabiliţi că
$(a, b, c, d)^2 = (a, b, c, d) \circ (a, b, c, d) = (a, c) \circ (b, d) = (b, d) \circ (a, c)$.



(a, b, c, d)
$(a, b, c, d)^2 = (b, d) \circ (a, c) = (a, c) \circ (b, d)$

GRAFICUL 103

Scanned with OKEN Scanner

9. Folosindu-vă de un grafic, stabiliți următoarele formule

$(a, b, c, d)^3 = (a, b, c, d)^2 \circ (a, b, c, d) = (d, c, b, a) = (a, b, c, d)^{-1}$

$(a, b, c, d)^4 = 1_E$

Din aceasta puteți deduce că

$$(a, b, c, d)^{17} = (a, b, c, d)$$

Calculați $(a, b, c, d)^{1.000.001}$

Cît fac $(a, b, c, d)^{19}$, $(a, b, c, d)^6$?

10. Reprezentați sub forma de compusă de cicluri permutarea impusă de profesorul nostru (graficul 97).

În acest scop veți reprezenta prin $a, b, c, d \ldots$ diferitele locuri din clasă.

11. Iată o permutare

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 7 & 8 & 6 & 9 & 3 & 1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ajutîndu-vă de un grafic reprezentați-o ca pe o compusă de cicluri.

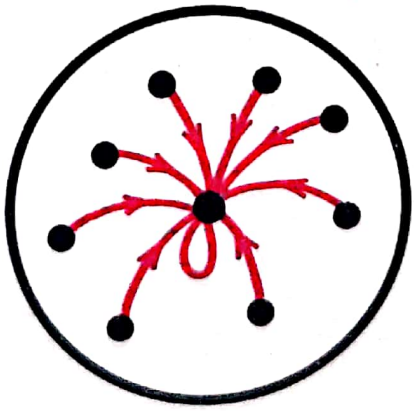
[Răspuns: $p = (1, 2, 7) \circ (3, 8, 4, 6) \circ (5, 9)$].

12. Descompuneți în cicluri permutarea

$$p = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & k & l & m & n \\ c & l & a & f & n & e & k & g & h & m & b & d \end{pmatrix}.$$

13. Se numește **transformarea lui E** orice funcție $E \to E$.

Graficul de mai jos definește o transformare t a lui E cu totul specială.



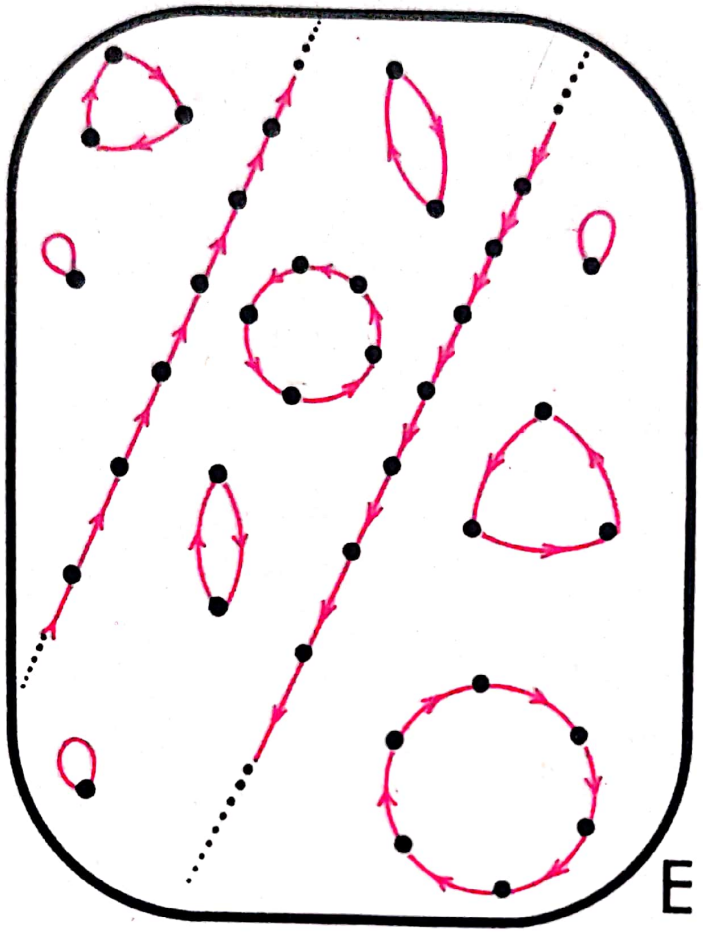
GRAFICUL 104

Nu există transformare s a lui E astfel ca $s \circ t = 1_E$

Nu există transformare u a lui E astfel ca $t \circ u = 1_E$.

Scanned with OKEN Scanner

14. Graficul de mai jos definește o permutare infinită



p : PERMUTARE INFINITĂ
GRAFICUL 105

15. Dacă $f, g \in \mathfrak{S}E$, există o permutare $x \in \mathfrak{S}E$ și numai una singură și o permutare $y \in \mathfrak{S}E$ astfel că

$$f \circ x = g = y \circ f$$

(Răspunsuri: $x = f^{-1} \circ g, y = g \circ f^{-1}$).

Scanned with OKEN Scanner

EVARISTE GALOIS (1811—1832)

Evariste Galois este una din cele mai patetice figuri din istoria matematicii.

Fiu al unui primar dintr-o mică localitate din împrejurimile Parisului, el a dovedit la o vîrstă fragedă o excepţională inteligenţă matematică. Geniul său, care depăşea cu mult epoca sa, precum şi integritatea caracterului său sînt cauza respingerii sale în două rînduri, la examenul de intrare la Şcoala Politehnică. În timpul vieţii n-a reuşit niciodată să-şi vadă meritele recunoscute. Memoriile pe care le-a prezentat Academiei au fost rătăcite adesea şi totdeauna neînţelese. El a participat cu toată credinţa sa democratică la mişcarea revoluţionară din 1830 din care cauză a fost închis de două ori, ultima oară timp de şase luni.

La 30 mai 1832, în urma unei afaceri rămasă învăluită în mister, se bate în duel şi moare a doua zi.

În noaptea dinainte de 30 mai a făcut un ultim efort copleşitor ca să lase lumii descoperirile sale matematice. Lucrările sale păstrate cu cea mai mare grijă de prietenul său Auguste Chevalier, conţineau marile idei ale teoriei grupurilor care a devenit esenţială în matematica şi fizica de astăzi.

Scanned with OKEN Scanner

14

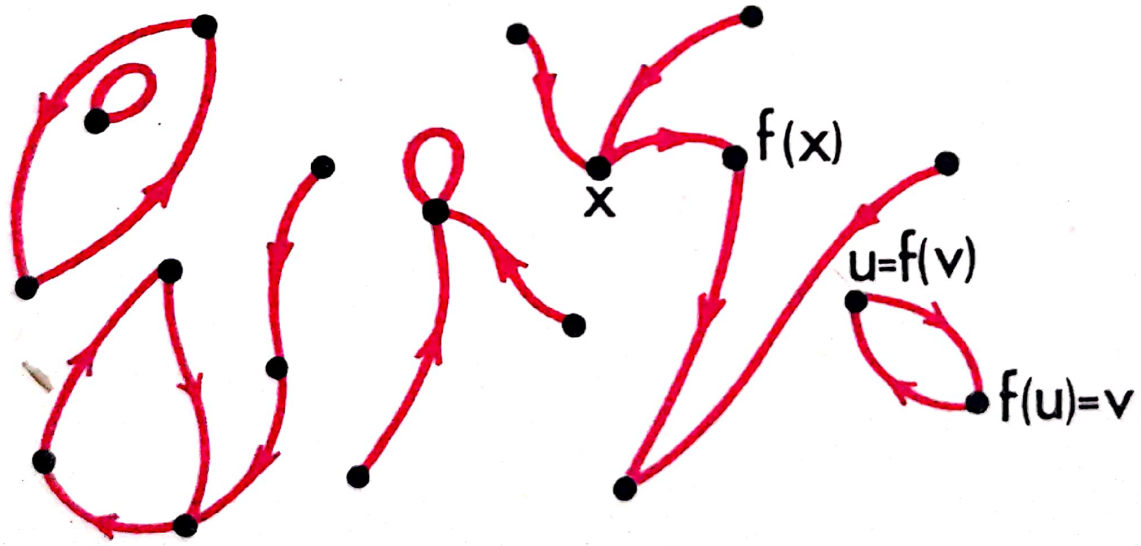
Transformările planului

1 — DEFINIŢIE

Numim ***transformare*** *a lui* Π *orice funcţie* $\Pi \to \Pi$

Dacă f este o transformare a lui Π, din orice punct al lui Π pleacă o săgeată şi numai una singură din graficul lui f.

Deoarece Π este infinit, nu vom putea desena toate punctele lui Π, nici toate săgeţile lui f.



CÎTEVA SĂGEŢI ALE UNEI TRANSFORMĂRI f A LUI Π

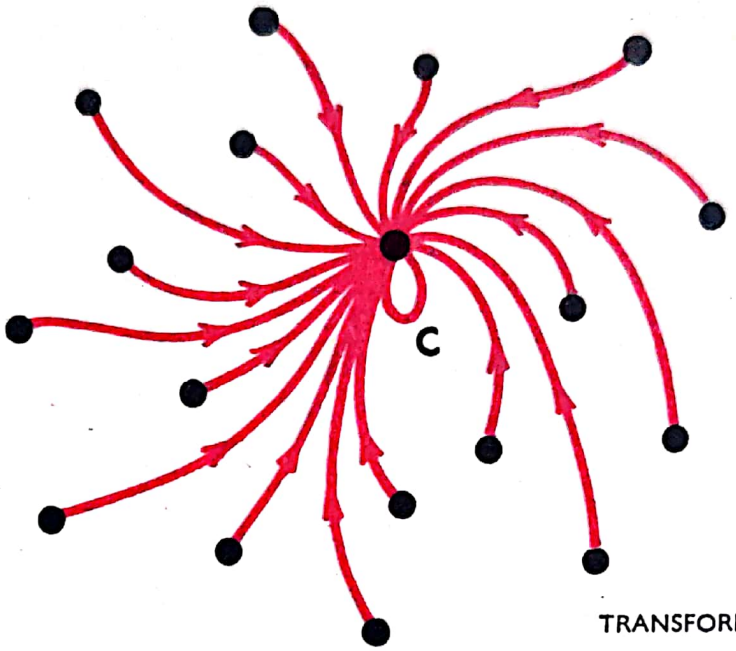
GRAFICUL 106

Scanned with OKEN Scanner

2 — TRANSFORMĂRILE CONSTANTE

Fie $c \in \Pi$.

Făcînd să plece din orice punct al lui Π o săgeată care ajunge în c, definim o transformare a lui Π care este numită transformare constantă.



TRANSFORMAREA CONSTANTĂ c
GRAFICUL 107

EXERCIŢII

1. Fie $a, b \in \Pi$.
Să notăm tot cu a şi b transformările constante definite de a şi b.
Pentru orice $x \in \Pi$, vom avea deci:

$$a(x) = a, \quad b(x) = b.$$

Care sînt compusele $a \circ b$ şi $b \circ a$?
Veţi observa că $a(b) = a$ şi $a \circ b = a$.

2. Fie $a \in \Pi$ şi P o parte nevidă a lui Π. Care este imaginea lui P prin transformarea constantă a?
Care sînt imaginile lui Π şi $\varnothing$ prin această transformare?

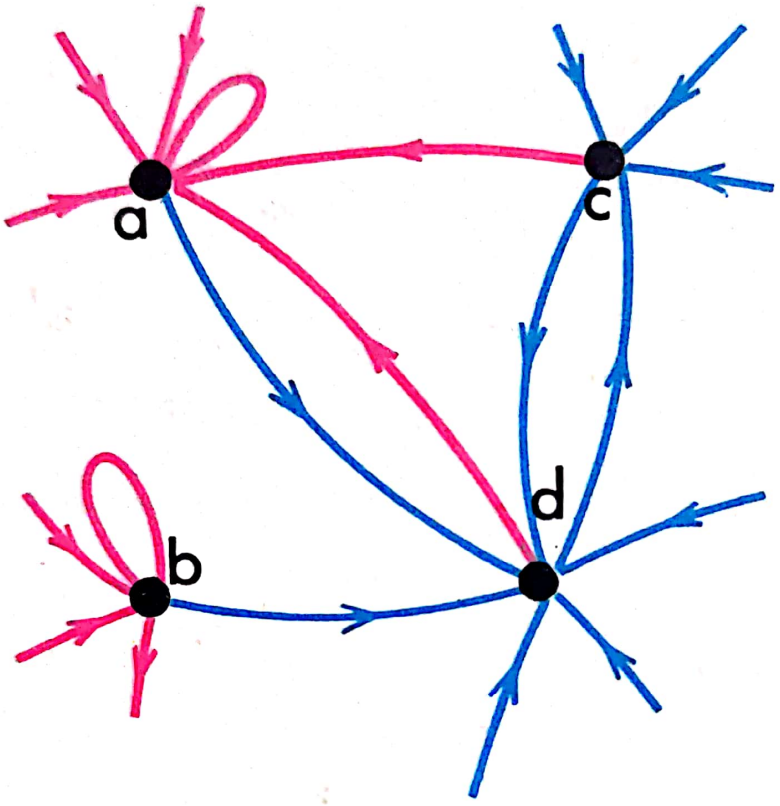
3. Fie f o transformare oarecare a lui Π.
Fie $a \in \Pi$ şi să mai notăm cu a transformarea constantă definită de acest punct.
Arătaţi că $a \circ f = a$.
Stabiliţi şi că $f \circ a$ este transformarea constantă definită de punctul $f(a)$.
Explicaţi exactitatea formulei $f \circ a = f(a)$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Fie g, h transformări ale lui Π. Dacă una dintre acestea este constantă, compusele $g \circ h$ şi $h \circ g$ sînt constante.

5. Daţi două transformări f şi g ale planului Π, amîndouă neconstante şi astfel încît $f \circ g$ să fie constantă.

6. Iată două transformări neconstante f şi g, astfel încît $f \circ g$ şi $g \circ f$ sînt constante.



f, g NECONSTANTE

$$f \circ g = a; \quad g \circ f = d.$$

GRAFICUL 108

Pentru a defini transformările f şi g anunţate, luăm patru puncte $a, b, c, d \in \Pi$.

Toate săgeţile din f ajung fie în a, fie în b. În special

$$f(c) = f(d) = a$$

Toate săgeţile din g ajung fie în c, fie în d.

În special, $g(a) = g(b) = d$.

Explicaţi şi stabiliţi formulele $f \circ g = a$, $g \circ f = d$.

Scanned with OKEN Scanner

3 — TRANSFORMAREA IDENTICĂ

Punînd o buclă în orice punct al lui Π, definim o transformare a lui Π numită transformare identică a lui Π. O vom nota cu ε sau cu 1_Π. Avem deci $\varepsilon(x) = x$ pentru orice $x \in \Pi$

CÎTEVA BUCLE ALE TRANSFORMĂRII IDENTICE

$1_\Pi : \Pi \to \Pi : x \to x$

GRAFICUL 109

EXERCIȚII

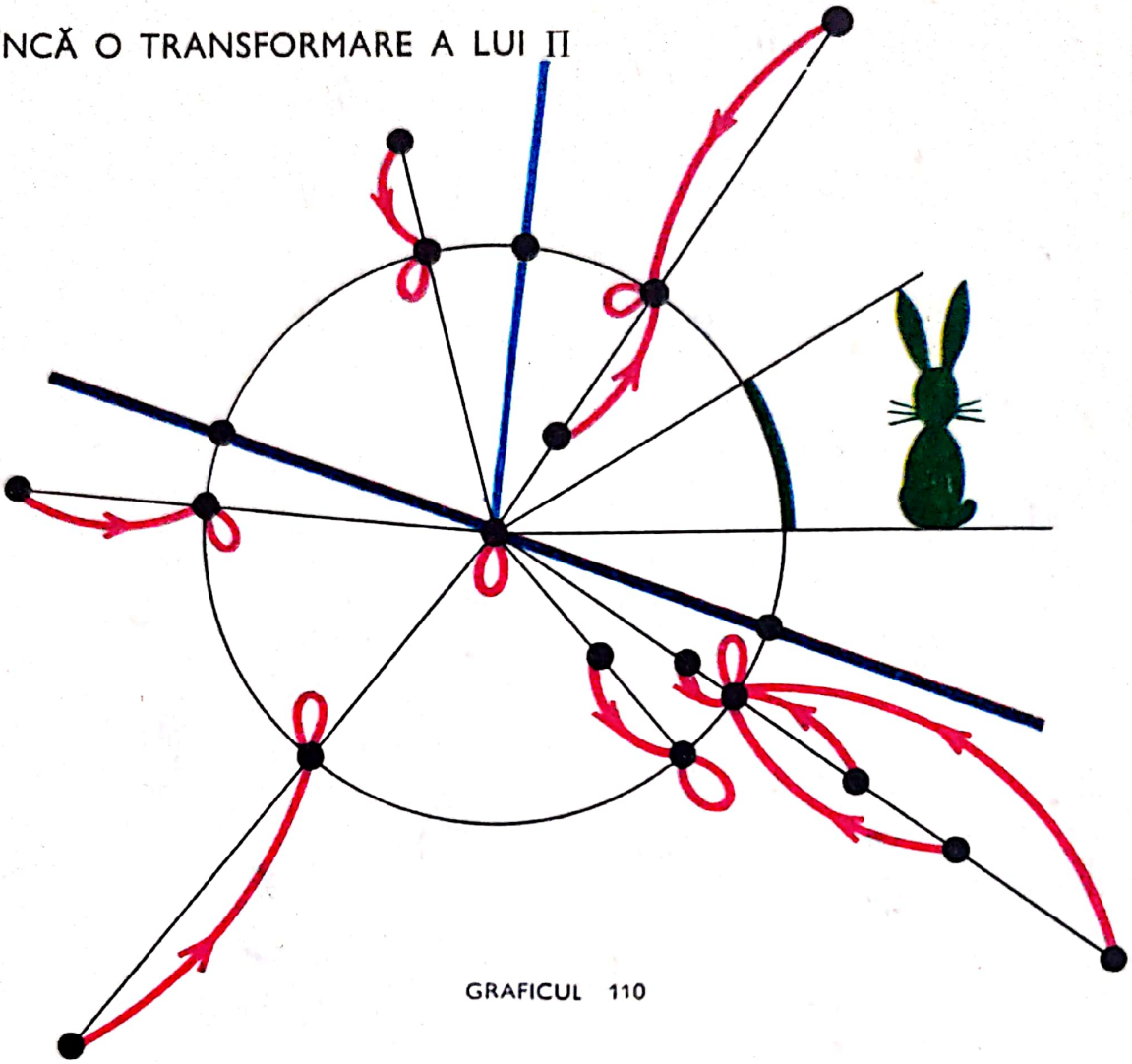
1. Pentru orice transformare f a planului Π, avem
$$f \circ I_\Pi = I_\Pi \circ f = f$$

2. Transformarea identică este egală cu reciproca ei.

3. Fie f o transformare a planului. Vi se semnalează că $f \circ f = I_\Pi$
Arătați că $f = f^{-1}$

Scanned with OKEN Scanner

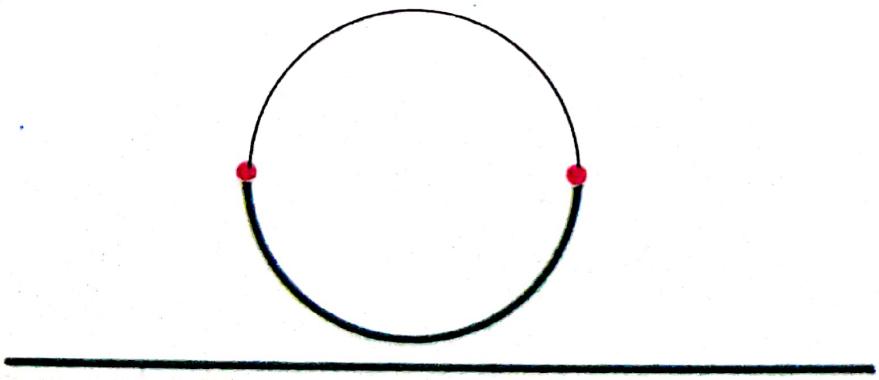
4 — ÎNCĂ O TRANSFORMARE A LUI Π



GRAFICUL 110

Definiți transformarea sugerată de graficul de mai sus.
Care este imaginea iepurașului verde prin această transformare?
Care este imaginea semidreptei deschise, albastre?
Imaginea dreptei mov este o mulțime care cuprinde 3 puncte.

EXERCIȚIU



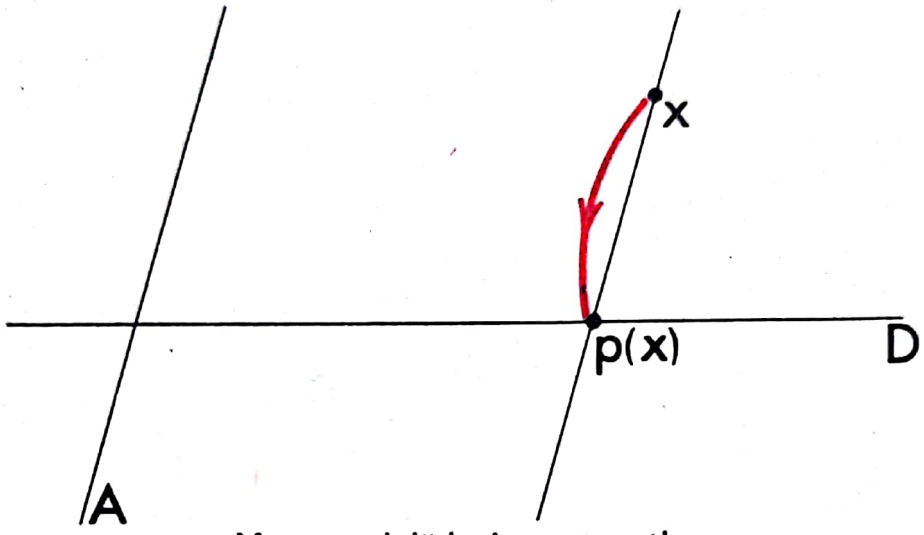
Care este imaginea dreptei verzi prin transformarea definită de graficul 110?

Scanned with OKEN Scanner

5 — PROIECȚIE PARALELĂ

Fie D și A drepte secante.

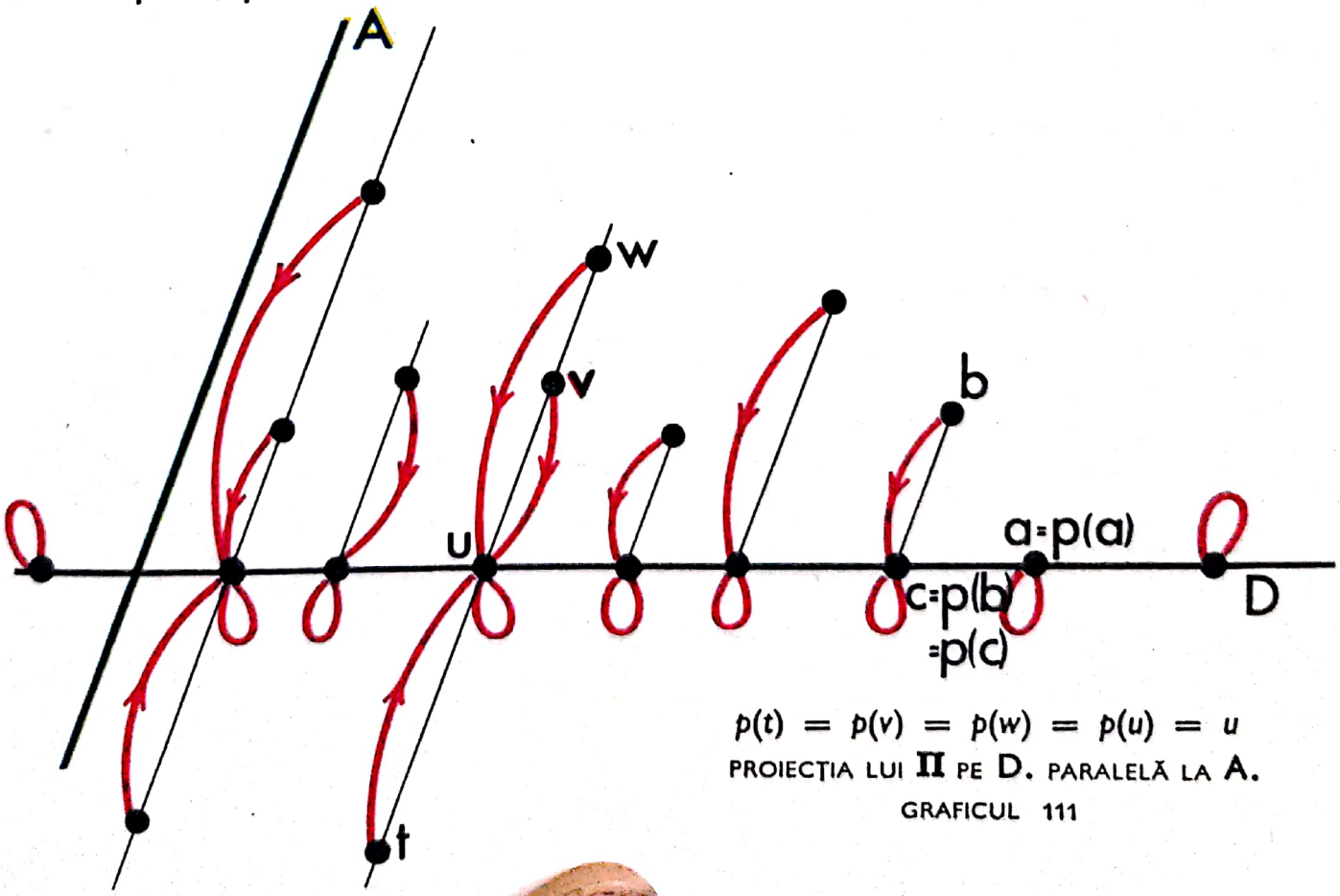
În virtutea axiomei lui Euclid, orice punct $x \in \Pi$ aparține unei paralele la A și numai uneia singure pe care o vom numi X.



X = paralelă la A care conține pe x.

Deci avem $D \nparallel A \parallel X$ de unde $D \nparallel X$ și deci $D \cap X$ este o mulțime cu un singur element.

Punînd $D \cap X = \{p(x)\}$, definim transformarea p a lui Π numită proiecție a lui Π **pe D, paralelă cu A.**



$p(t) = p(v) = p(w) = p(u) = u$

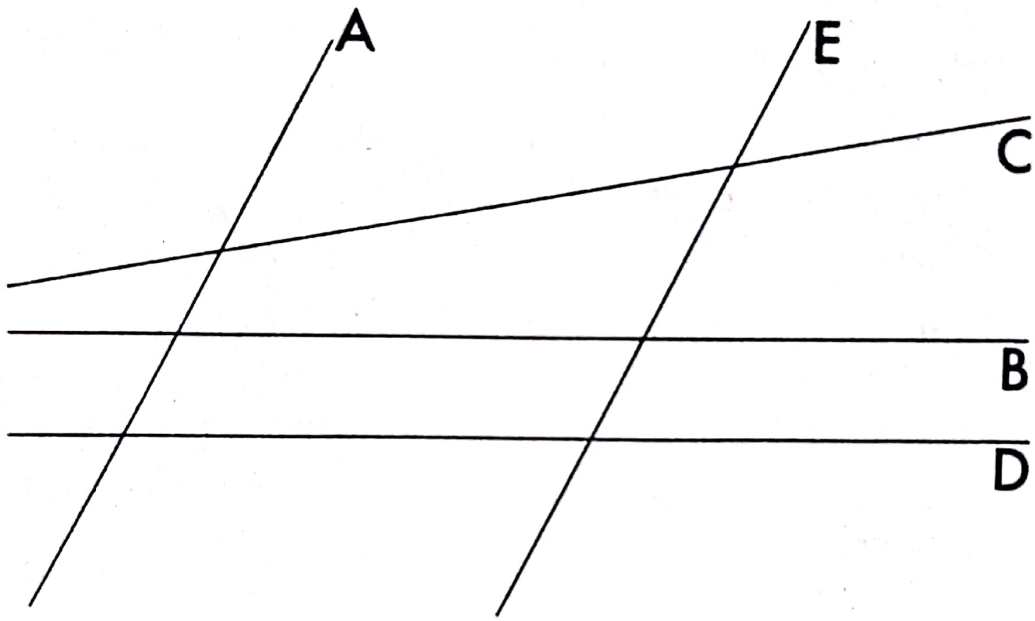
PROIECȚIA LUI Π PE D, PARALELĂ LA A.

GRAFICUL 111

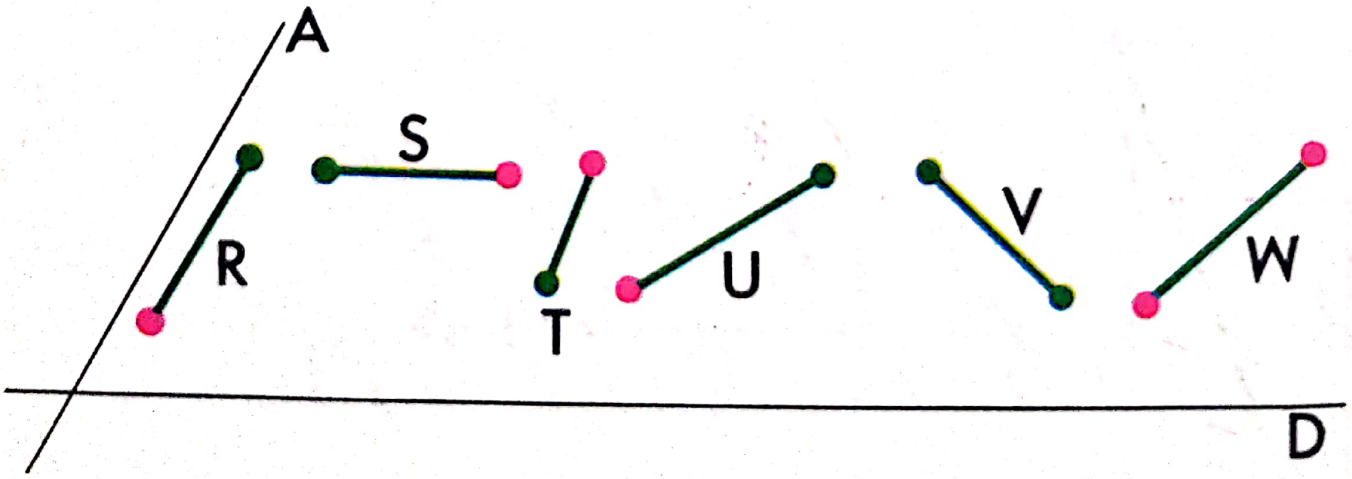
EXERCIȚII

În exercițiile de mai jos, p *este proiecția lui* Π *pe* D, *paralelă la* A.

1. De ce transformarea p nu este o permutare?
2. Stabiliți formula $p \circ p = p$.
3. Căutați imaginea prin p a dreptelor A, B, C, D, E.

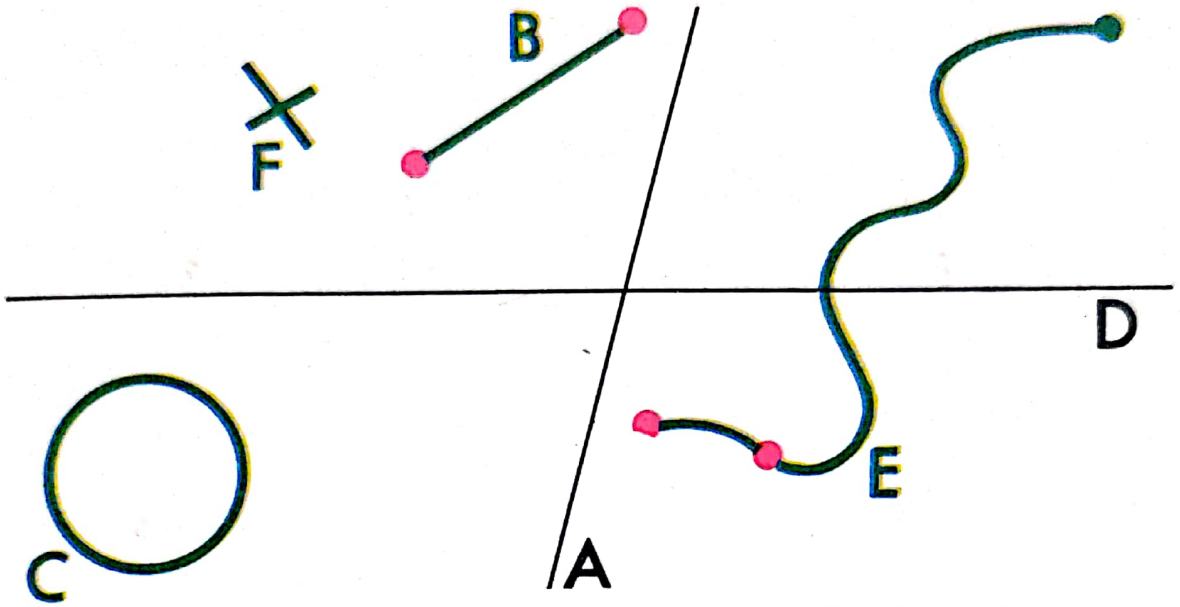


4. Care este imaginea prin p a segmentelor R, S, T, U, V și W?



Scanned with OKEN Scanner

5. Care sînt imaginile prin p ale mulțimilor A, B, C, D, E și F?

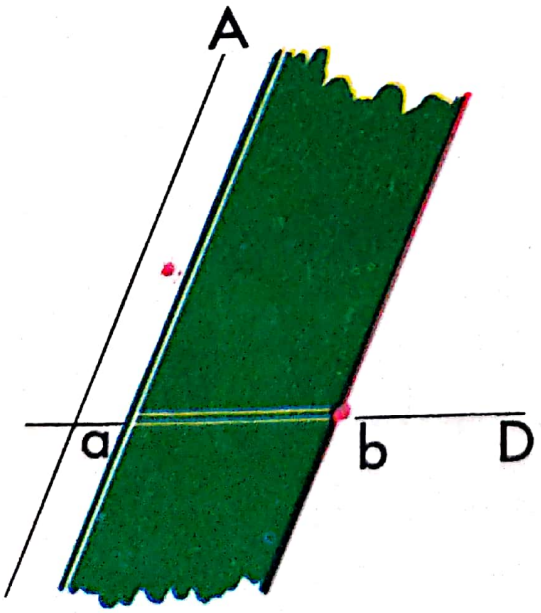


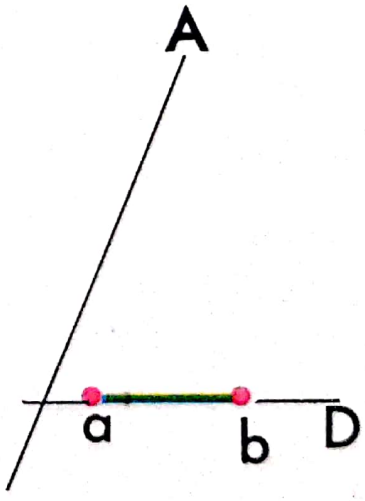
6. Fie $d \in D$. Mulțimea punctelor lui Π, care au d ca imagine prin p, este paralelă la A care cuprinde pe d.

7. Fie $x \in \Pi$. Mulțimea punctelor lui Π care are aceeași imagine prin p ca x este paralelă la A care cuprinde pe x.

8. Fie $[ab]$ un segment inclus în D.
Care este cea mai mare parte a lui Π a cărei imagine prin p este $[ab]$?

9. Aceeași întrebare înlocuind $[ab]$ prin $[ab[$, prin $]ab]$ și prin $]ab[$.

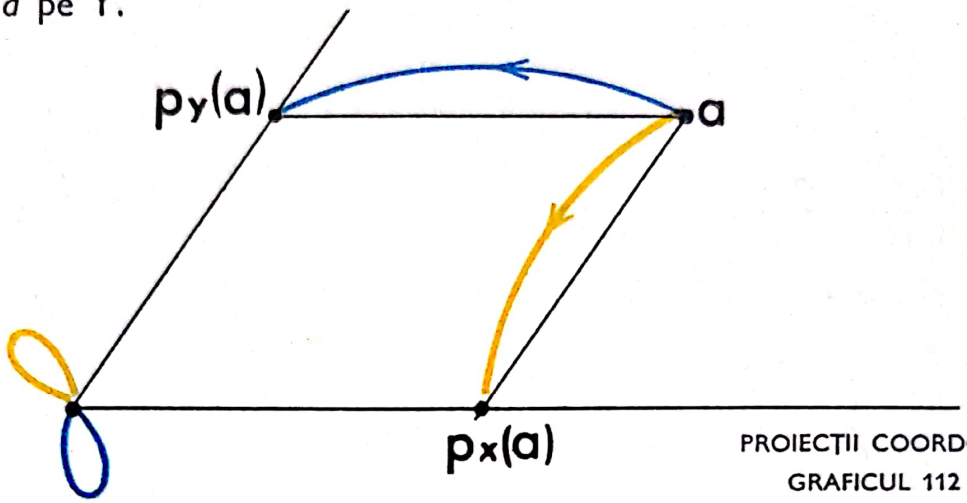




6 — PROIECȚII COORDONATE

Fie X și Y două drepte secante.

Să notăm cu p_x, proiecția paralelă cu Y a lui a pe X și cu p_y proiecția lui paralelă cu X a lui a pe Y.



PROIECȚII COORDONATE
GRAFICUL 112

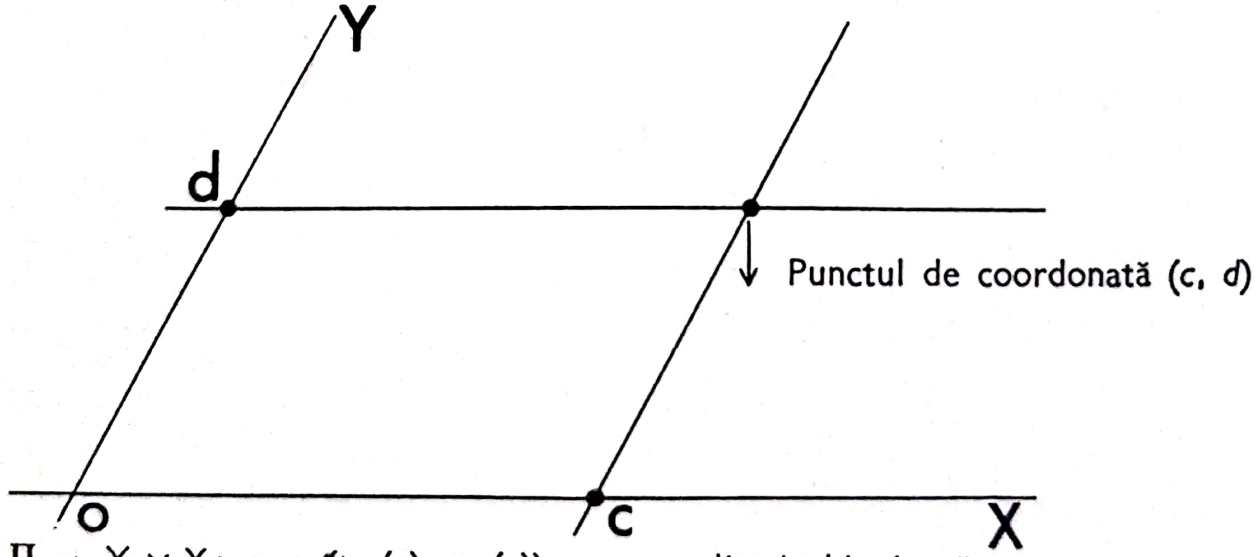
Orice punct $a \in \Pi$ definește perechea

$$(p_x(a), p_y(a)) \in X \times Y.$$

Reciproc, pentru orice pereche $(b, c) \in X \times Y$, există un punct și numai unul singur $u \in \Pi$, astfel încît

$$(p_x(u), p_y(u)) = (b, c)$$

Spunem că perechea $(p_x(a), p_y(a))$ **este coordonata lui** a **în sistemul** X, Y.



$\Pi \to X \times Y : a \to (p_x(a), p_y(a))$ este o aplicație biunivocă.

EXERCIȚIU

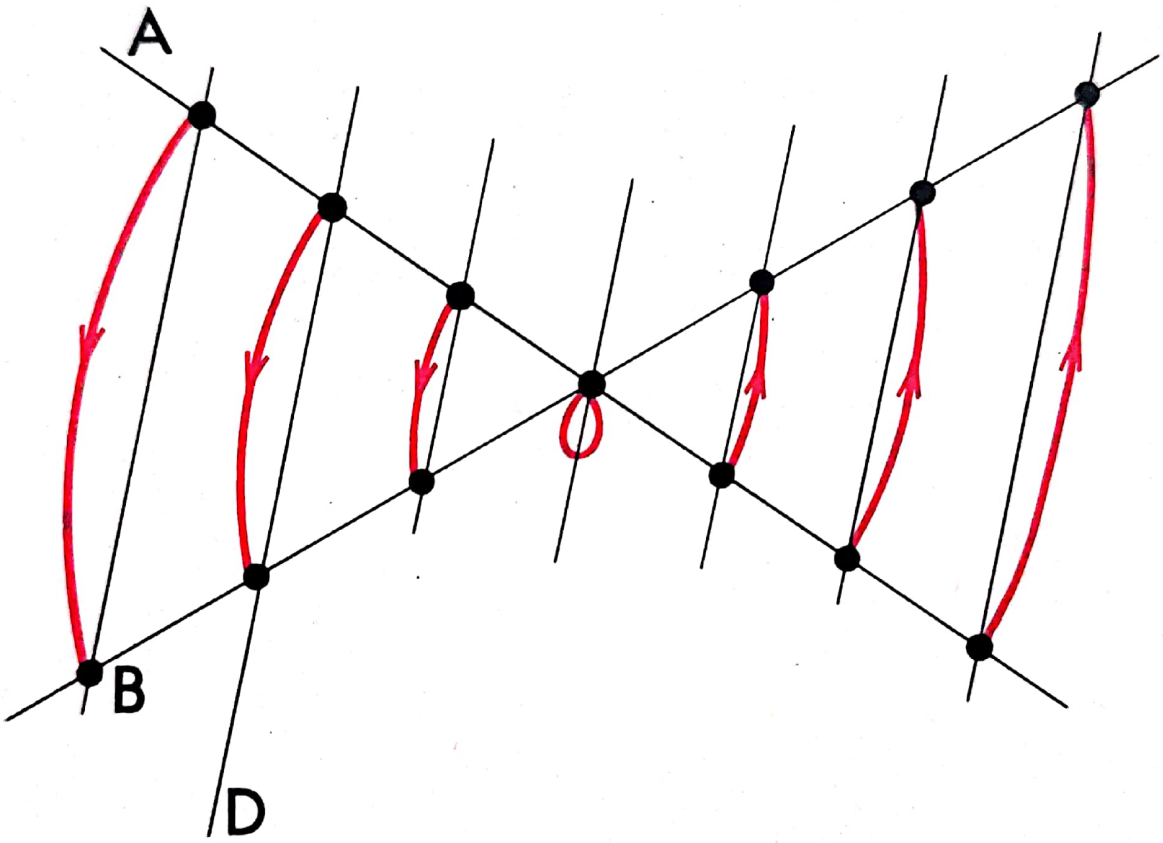
Compusele $p_x \circ p_y$ și $p_y \circ p_x$ (transformări neconstante p_x și p_y) sînt egale cu transformarea constantă o.

Scanned with OKEN Scanner

7 — PROIECȚIA PARALELĂ A UNEI DREPTE PE O DREAPTĂ

Fie A, B, D trei drepte din planul II, astfel încît A ∦ D ∦ B.

Orice paralelă la D taie pe A și pe B, de unde rezultă o transformare biunivocă $p: A \to B$ numită **proiecția lui A pe B paralelă la D.**



PROIECȚIA LUI A PE B PARALELĂ LA D

GRAFICUL 113

Scanned with OKEN Scanner

15

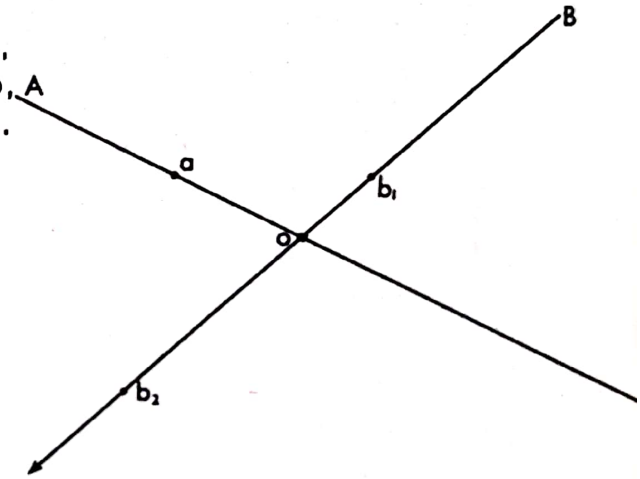
Proiecţii paralele şi ordine

1 — PROIECŢIE PARALELĂ A UNEI DREPTE ORIENTATE PE O DREAPTĂ ORIENTATĂ

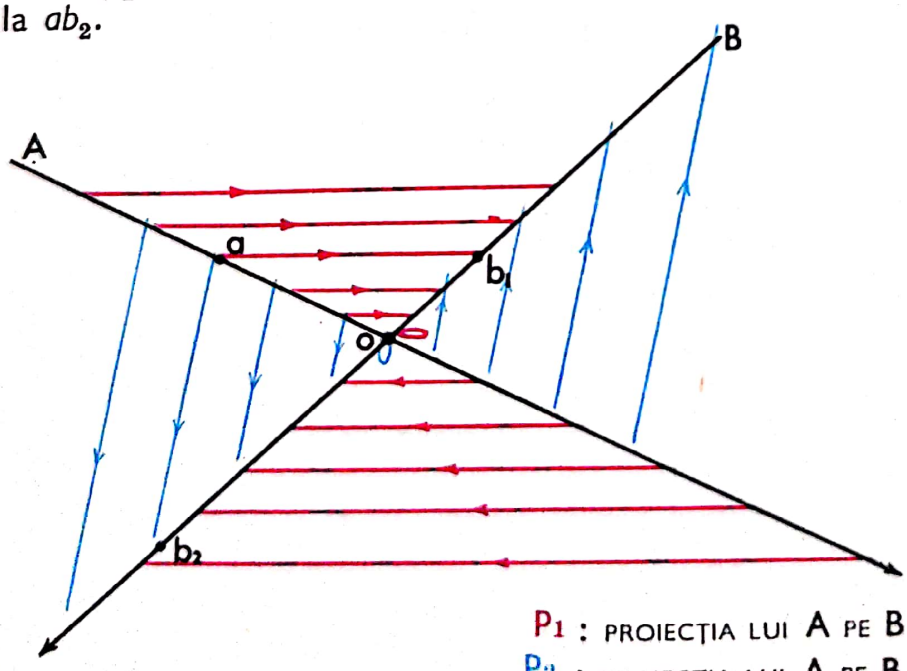
Fie A și B drepte secante și fie o punctul lor de intersecție: $A \cap B = \{o\}$.

Să orientăm pe fiecare din dreptele A și B și să indicăm ordinea aleasă pe fiecare din ele cu o săgeată.

Fie a un punct al lui A, astfel încît $a < o$,
b_1 un punct al lui B, astfel încît $b_1 < o$,
b_2 un punct al lui B, astfel încît $b_2 > o$.



Să notăm cu p_1 proiecția lui A pe B paralelă la ab_1 și cu p_2 proiecția lui A pe B paralelă la ab_2.



P_1 : PROIECŢIA LUI A PE B PARALELĂ LA ab_1
P_2 : PROIECŢIA LUI A PE B PARALELĂ LA ab_2

GRAFICUL 114

Scanned with OKEN Scanner

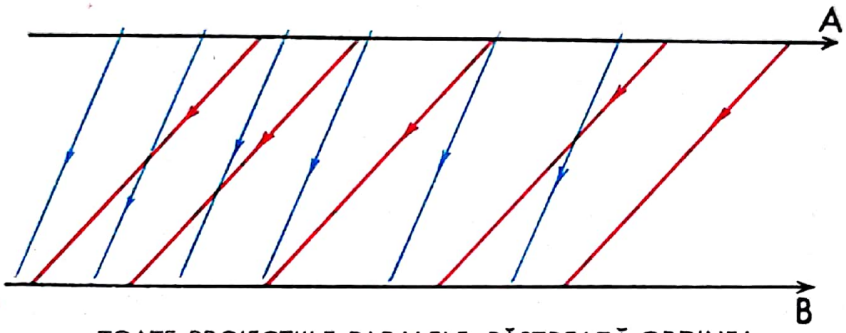
Fie x și y două puncte ale lui A. Constatăm că

$$x < y \Rightarrow p_1(x) < p_1(y)$$
$$x < y \Rightarrow p_2(x) > p_2(y).$$

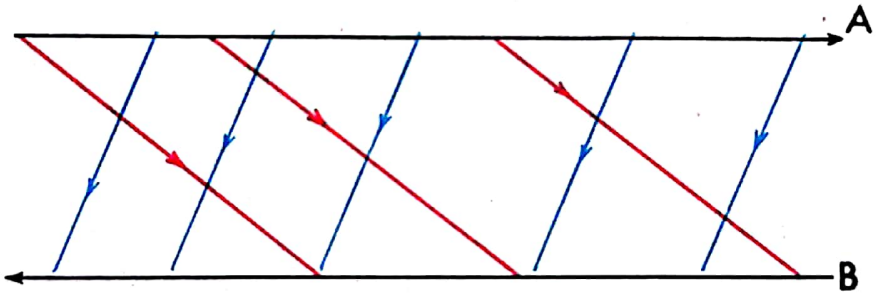
Vom exprima aceste lucruri spunînd că proiecția p_1 **păstrează** ordinea, pe cînd proiecția p_2 o **inversează.**

Dacă A ∦ B, anumite proiecții paralele ale lui A pe B păstrează ordinea, iar altele o inversează.

Să examinăm situația pe care o oferă dreptele paralele A și B.



TOATE PROIECȚIILE PARALELE PĂSTREAZĂ ORDINEA
GRAFICUL 115



TOATE PROIECȚIILE PARALELE INVERSEAZĂ ORDINEA
GRAFICUL 116

Constatăm că dacă două drepte orientate A și B sînt paralele, se prezintă două cazuri:

1. Toate proiecțiile paralele ale lui A pe B păstrează ordinea.
2. Toate proiecțiile paralele ale lui A pe B inversează ordinea.

AXIOMA II 8 — 1. *Dacă A și B sînt drepte orientate, orice proiecție paralelă a lui A pe B păstrează ordinea sau inversează ordinea.*

2. *Dacă A și B sînt drepte orientate paralele, se prezintă două cazuri:*

a) *Toate proiecțiile paralele ale lui A pe B păstrează ordinea: spunem atunci că dreptele orientate A și B au același sens.*

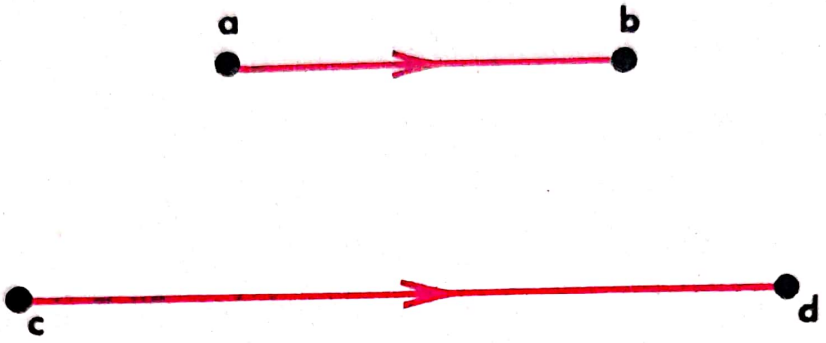
b) *Toate proiecțiile paralele ale lui A pe B inversează ordinea: spunem atunci că dreptele orientate A și B sînt de sensuri contrare.*

Scanned with OKEN Scanner

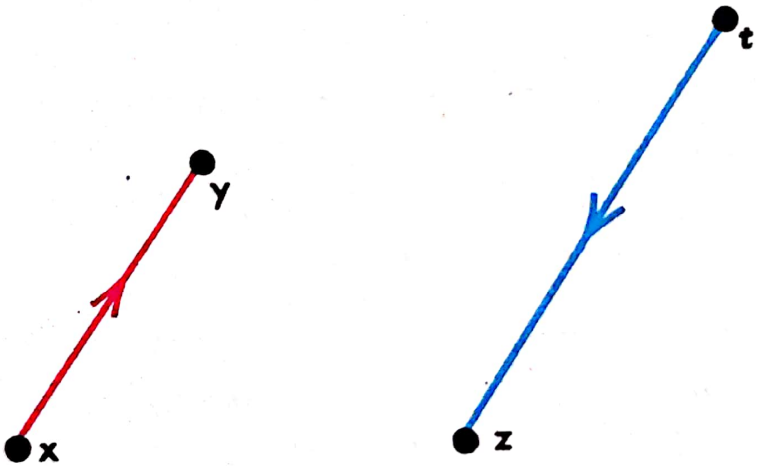
2 — PERECHI PARALELE

Fie a, b, c, d patru puncte distincte ale lui Π, astfel încît $ab \parallel cd$.

Dacă punînd $a < b$ și $c < d$, dreptele orientate ab și cd au același sens, vom spune că perechile (a, b) și (c, d) sînt de același sens.



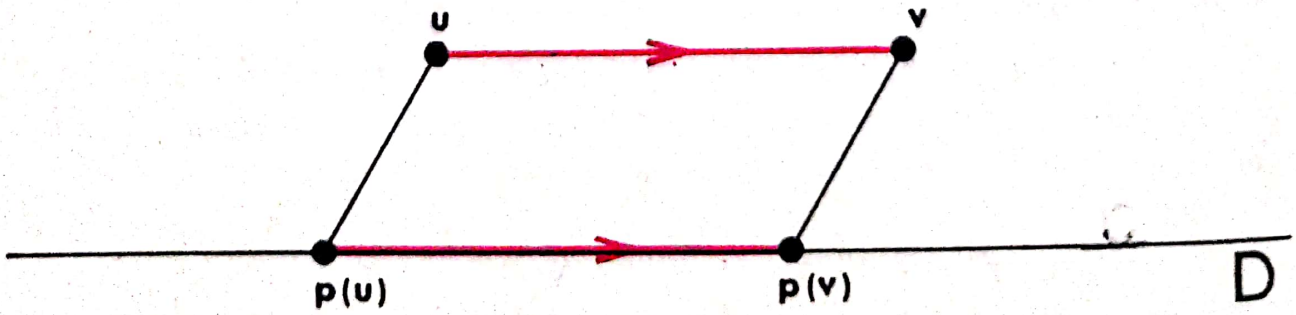
PERECHILE PARALELE (a, b) ȘI (c, d) SÎNT DE ACELAȘI SENS.



PERECHILE PARALELE (x, y) ȘI (t, z) SÎNT DE SENSURI OPUSE.

Fie u, v puncte distincte astfel încît $uv \parallel D \in \mathfrak{D}$

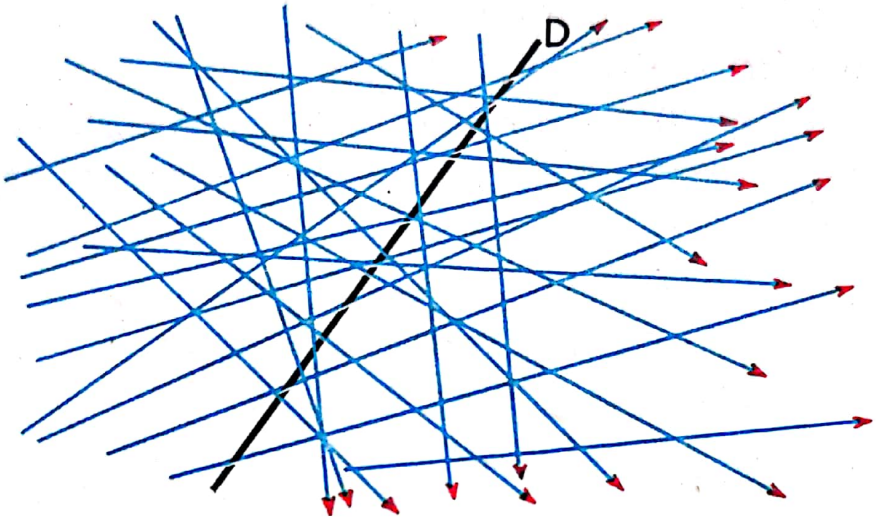
Dacă proiectăm paralel Π pe D prin proiecția p,
Atunci perechile $(p(u), p(v))$ și (u, v) vor avea același sens.



Scanned with OKEN Scanner

3 — SEMIPLANE

Iată o dreaptă D. Axioma II 8 ne permite să orientăm toate dreptele *neparalele cu* D așa fel încît orice proiecție paralelă cu D a uneia din aceste drepte pe altă dreaptă să păstreze ordinea.



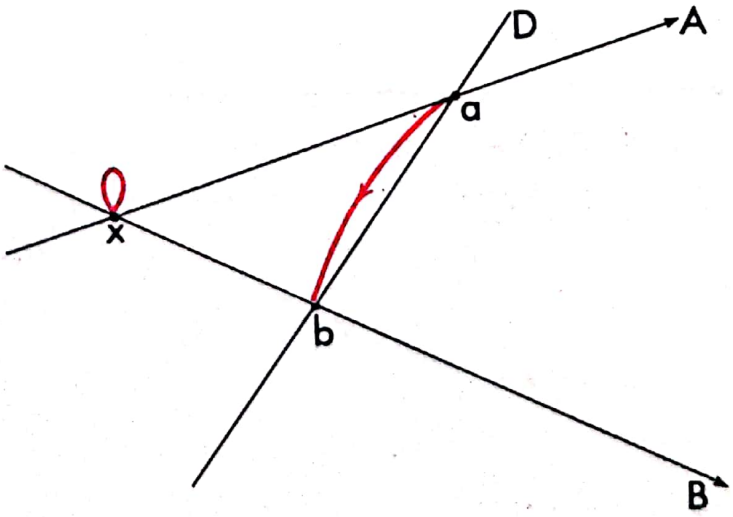
Alegeți un punct $x \in \Pi \setminus D$.

Notați cu A și B două din dreptele pe care le-am orientat și care să cuprindă amîndouă punctul x.

Să punem $A \cap D = \{a\}$ și $B \cap D = \{b\}$.

Dacă $x < a$ pe A, vom avea $x < b$ pe B pentru că proiecția paralelă la D păstrează ordinea.

Vom scrie în acest caz $x <_D$.



P : PROIECȚIA LUI A PE B, PARALELĂ LA D

$$x < a \Rightarrow x = p(x) < p(a) = b$$

GRAFICUL 117

Scanned with OKEN Scanner

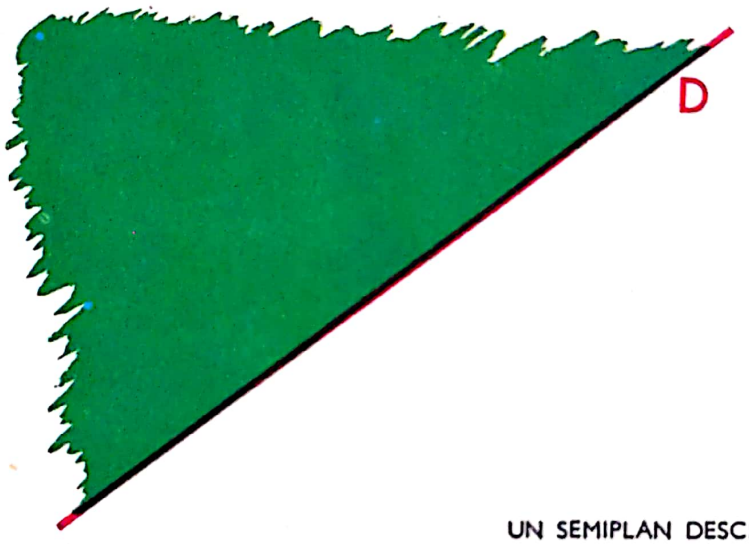
De asemenea, dacă $a < x$, vom avea $b < x$ și vom scrie $D < x$.

DEFINIȚIA 1 — Mulțimile

$$\Delta_1 = \{x \in \amalg \mid x < D\}$$
$$\Delta_2 = \{x \in \amalg \mid D < x\}$$

sînt numite ***semiplane deschise*** *definite de* D.

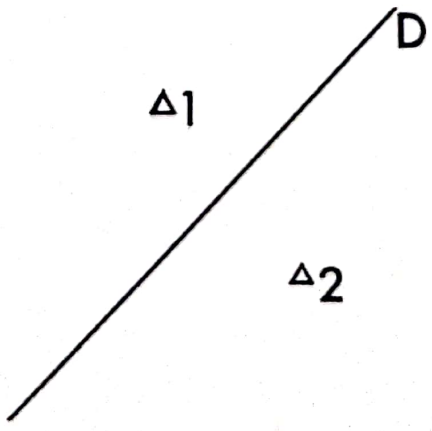
Dreapta D *este* ***marginea*** *fiecăruia din* ***semiplanele*** Δ_1 *și* Δ_2.



UN SEMIPLAN DESCHIS CU MARGINEA D

Deoarece orice punct al lui Π aparține uneia și numai uneia din cele trei mulțimi nevide Δ_1, D, Δ_2

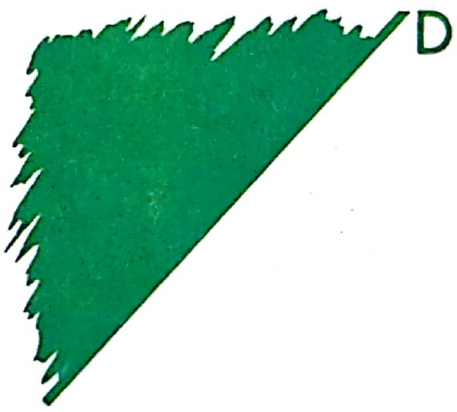
$\{\Delta_1, D, \Delta_2\}$ este o diviziune a lui Π



Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 2 — *Se numește* ***semiplan închis (cu marginea D)*** *reuniunea lui D și a unuia din semiplanele deschise definite de D.*

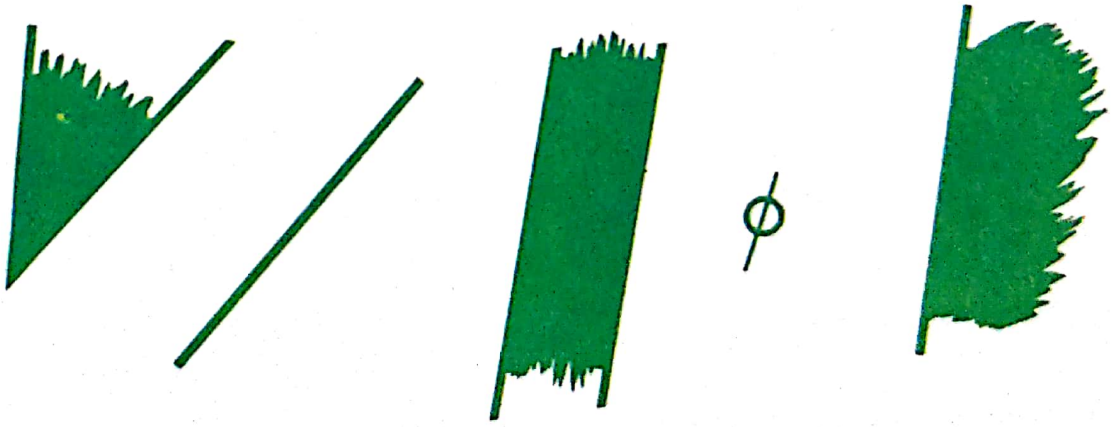
Astfel $\Delta_1 \cup D$ și $\Delta_2 \cup D$ sînt semiplanele închise cu marginea D.



SEMIPLAN ÎNCHIS CU MARGINEA D

EXERCIȚII

1. Reprezentați intersecția a 2 semiplane închise, a 2 semiplane deschise, a unui semiplan închis și a unui semiplan deschis, luînd în considerare diversele situații posibile.



INTERSECȚII DE SEMIPLANE ÎNCHISE.

Explicați și demonstrați!

2. Dacă M este un semiplan deschis, $\Pi \setminus M$ este un semiplan închis cu aceeași margine ca și M.

3. Pentru orice dreaptă D, mulțimea $\Pi \setminus D$ este reuniunea celor două semiplane deschise definite de D.

4. Care este intersecția a două semiplane închise definite de dreapta D?

5. Care este reuniunea celor 2 semiplane închise definite de dreapta D?

4 — SEMIPLANE DEFINITE DE O DREAPTĂ

— Trasați o dreaptă D și arătați cele două semiplane: deschise Δ_1, Δ_2 cu marginea D. Însemnați două puncte u, v aparținînd unuia din aceste plane (de exemplu, lui Δ_1). Ce puteți spune despre segmentul $[uv]$?

— $[uv] \subset \Delta_1$

— Orice segment ale cărui extremități aparțin unui semiplan deschis este inclus în acest semiplan.

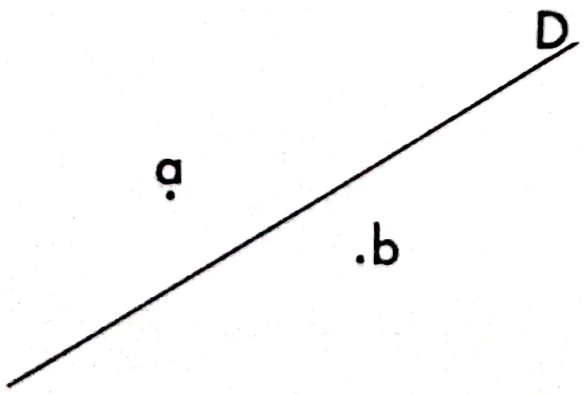
Cum se exprimă această proprietate?

— **Orice semiplan deschis este convex.**

— Remarcați că, de asemenea, **orice semiplan închis este convex.** Însemnați punctele a și b astfel încît

$$a \in \Delta_1, \ b \in \Delta_2$$

Spunem atunci că D **separă** pe a de b.



D SEPARĂ PE *a* DE *b*.

Scanned with OKEN Scanner

— Ce puteți spune de data aceasta de $]ab[$ și de D?

— **Dreapta D intersectează segmentul deschis** $]ab[$

— Cu alte cuvinte: $D \cap]ab[$ este o mulțime cu un singur element.

În sfîrșit, să luăm două puncte distincte $x, y \in \Pi$

D intersectează $]xy[$

Care este atunci situația respectivă a lui D și x, y?

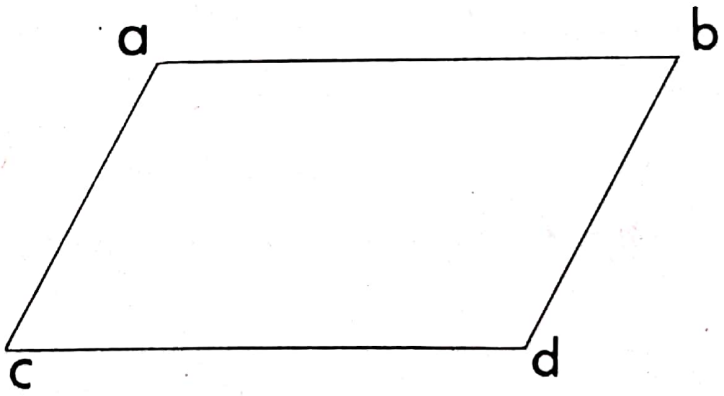
— D separă x, y.

Să strîngem observațiile precedente în axioma Π 9.

AXIOMA Π 9 — *Orice semiplan deschis sau închis este convex. Dreapta D intersectează* $]xy[$ *dacă și numai dacă dreapta D separă pe x de y.*

5 — DIAGONALELE UNUI PARALELOGRAM

Iată un paralelogram



Dreptele ab și cd sînt disjuncte.

Dreptele ac și bd sînt disjuncte.

Ținînd seama de axioma Π 9, este posibil să stabilim că $]ad\ [\cap]\ bc]$ este o mulțime cu un singur element.

Mai scurt, spunem că diagonalele unui paralelogram se intersectează.

Ca să nu vă plictisiți cu această demonstrație destul de delicată, vom lua acest rezultat ca supliment la axioma Π 9.

AXIOMA Π 9 (supliment) — *Diagonalele unui paralelogram se intersectează.*

Scanned with OKEN Scanner

6 — TEOREMA LUI PASCH

Dacă o dreaptă nu conține nici unul din vîrfurile unui triunghi și intersectează una din laturile lui,
Atunci această dreaptă mai intersectează una din laturile triunghiului.

Sau, mai precis

TEOREMA LUI PASCH. **Fie a, b, c trei puncte nealiniate și** $D \in \mathfrak{D}$

$a, b, c \notin D$ **și** D **intersectează** $]bc[$	$\Rightarrow$	D **intersectează** $]ba[$ **sau** D **intersectează** $]ac[$

DEMONSTRAȚIE: Fiindcă D intersectează $]bc[$, D separă pe b de c.

Să luăm de exemplu $b \in \Delta_1$, $c \in \Delta_2$,

în care Δ_1, Δ_2 desemnează semiplanele deschise definite de D.

Deoarece $a \notin D$, avem una și numai una din eventualitățile

$a \in \Delta_1$	$a \in \Delta_2$
Avem deci	
$a \in \Delta_1$ și $c \in \Delta_2$	
Cu alte cuvinte	
D separă pe a de c	(Cititorul să completeze !)
și conform axiomei Π 9	
D intersectează $]ac[$	

Ceea ce trebuia să demonstrăm

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIŢII

1. Reprezentaţi intersecţia a trei semiplane închise ţinînd seama de diferitele situaţii.

Intersecţia a trei semiplane închise. Explicaţi şi demonstraţi!

Aceste intersecţii sînt convexe? Justificaţi răspunsul.

2. Aceeaşi problemă în cazul a trei semiplane deschise, în cazul a două semiplane deschise şi a unui semiplan închis şi în cazul a două semiplane închise şi a unui semiplan deschis.

3. Iată trei puncte *a*, *b*, *c*. Care este cea mai mică mulţime convexă care cuprinde aceste trei puncte?

Aceeaşi problemă pentru 4 şi 5 puncte.

4. Axioma II 9 poate fi demonstrată pornind de la axiomele (şi teoremele) anterioare. Încercaţi. (Exerciţiul acesta este foarte greu).

Scanned with OKEN Scanner

16

Numere cardinale

1 — ECHIPOTENȚĂ

Iată că pe scena teatrului apare o trupă veselă de dansatori populari.

Fiecare băiat ține de mînă o fată plină de prospețime și voioșie.

Ei se mișcă în toate sensurile, fără să-și dea drumul de mînă. Este imposibil să-i numeri în acest joc încîntător.

Și totuși, noi știm că sînt tot atîtea fete cîți băieți.

Cum știm acest lucru?

Deoarece încîntătorul gest al acestor băieți față de aceste fete stabilește o aplicație **biunivocă**

$$G \rightarrow F$$

DEFINIȚIA 1 — Se spune că mulțimile E și F sînt ***echipotente*** sau că ***au același număr de elemente*** sau că au ***același număr cardinal*** dacă și numai dacă există o aplicație biunivocă $E \rightarrow F$.

Scriem atunci $E \# F$ sau, mai frecvent

$$\# E = \# F.$$

(A se citi: numărul cardinal al lui E = numărul cardinal al lui F).

$A \# B \iff$ există o aplicație biunivocă $A \rightarrow B \iff \# A = \# B$

Scanned with OKEN Scanner

Vom stabili că relația $\#$ este o **echivalență**, adică o relație *reflexivă*, *tranzitivă*, *simetrică*.

— Să ne ocupăm mai întîi de **reflexivitate.**

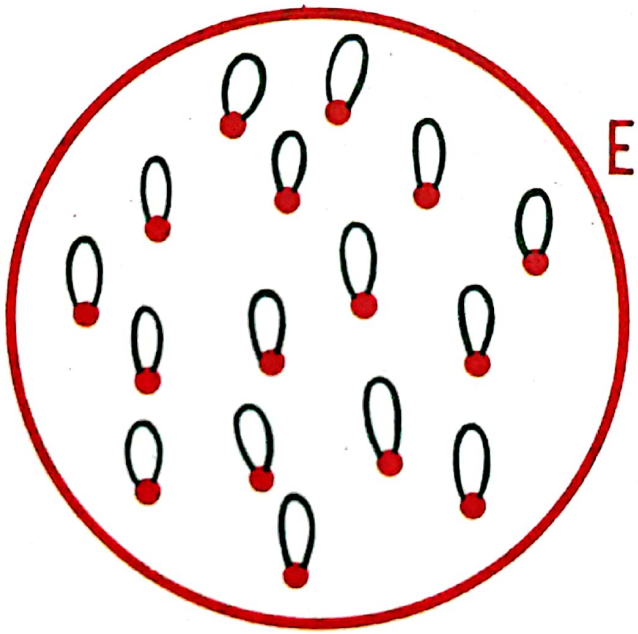
Trebuie să stabilim că, pentru orice mulțime E, avem $E \# E$.

Pe baza definiției lui $\#$ de mai sus

$$E \# E \Longleftrightarrow \text{există o aplicație biunivocă } E \to E$$

Cunoașteți o aplicație biunivocă $E \to E$?

— *Transformarea identică* $E \to E : x \to x$ este o aplicație biunivocă $E \to E$, **ceea ce stabilește reflexivitatea lui** $\#$.



TRANSFORMAREA IDENTICĂ **E → E**
GRAFICUL 118

— Să ne ocupăm de **tranzitivitate.**

— Trebuie să stabilim că

$$A \# B \text{ și } B \# C \Rightarrow A \# C$$

— Interpretați formulele $A \# B$, $B \# C$, $A \# C$ cu ajutorul definiției 1.

$A \# B \Longleftrightarrow$ *există o aplicație biunivocă* $A \to B$.
$B \# C \Longleftrightarrow$ *există o aplicație biunivocă* $B \to C$.
$A \# C \Longleftrightarrow$ *există o aplicație biunivocă* $A \to C$.

— Trebuie să dovedim că dacă există aplicații biunivoce $A \to B$ și $B \to C$, există o aplicație biunivocă $A \to C$.

Avînd aplicațiile biunivoce f: $A \to B$ și g: $B \to C$ puteți găsi o aplicație biunivocă $A \to C$?

— Dacă f: $A \to B$ și g: $B \to C$ sînt aplicații biunivoce, compusa gof este o aplicație biunivocă $A \to C$, **ceea ce stabilește tranzitivitatea lui** $\#$.

Scanned with OKEN Scanner

— Rămîne de stabilit **simetria** lui $\#$.

Trebuie să dovedim că

$$A \# B \Rightarrow B \# A.$$

— Conform definiției 1 trebuie să demonstrăm că există o aplicație biunivocă $A \to B \Rightarrow$ există o aplicație biunivocă $B \to A$.

— Cunoscînd o aplicație biunivocă f: $A \to B$, puteți găsi o aplicație biunivocă $B \to A$?

— Dacă f este o aplicație biunivocă $A \to B$, reciproca f^{-1} este o aplicație biunivocă $B \to A$.

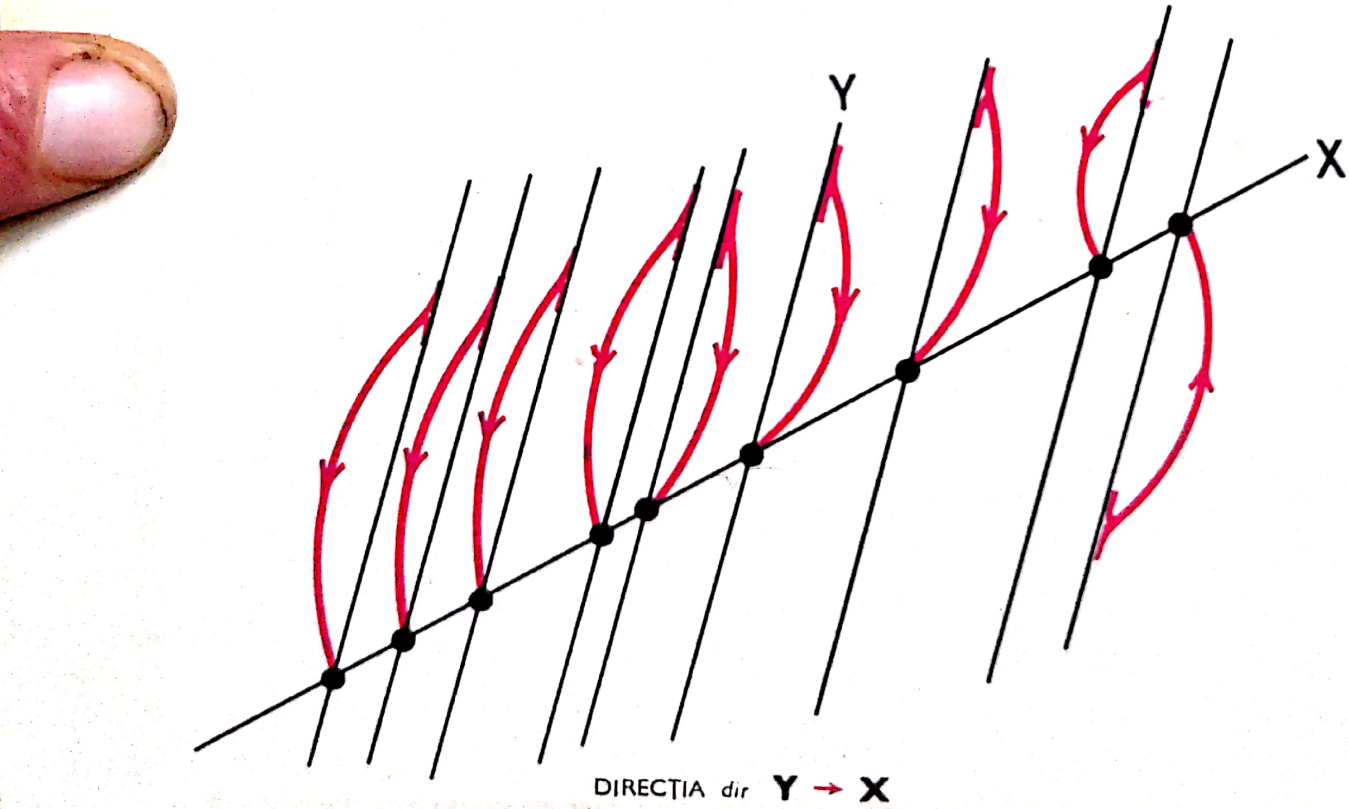
Simetria lui $\#$ este deci dovedită.

Am arătat succesiv că relația $\#$ este **reflexivă**, tranzitivă, simetrică ceea ce stabilește teorema 1.

TEOREMA 1 — *Relația $\#$ este o echivalență.*

EXERCIȚII

1. **Fie două drepte X $\#$ Y.**
Arătați că $\# X = \# dir\ Y$.

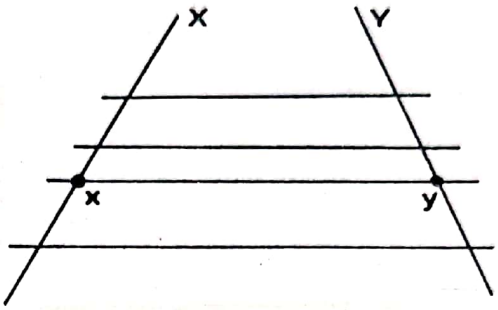


DIRECȚIA *dir* Y → X

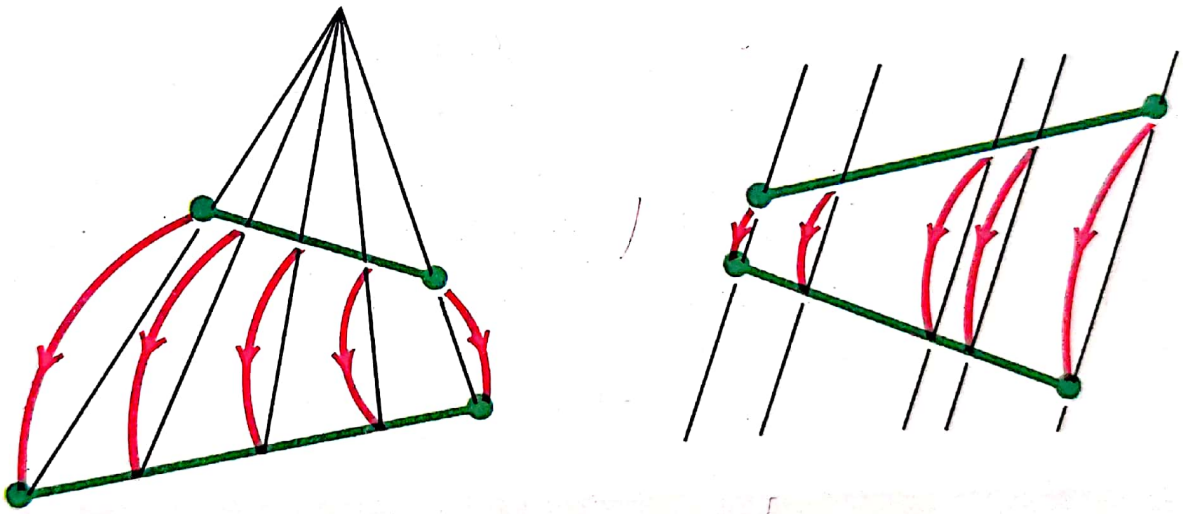
GRAFICUL 119

Scanned with OKEN Scanner

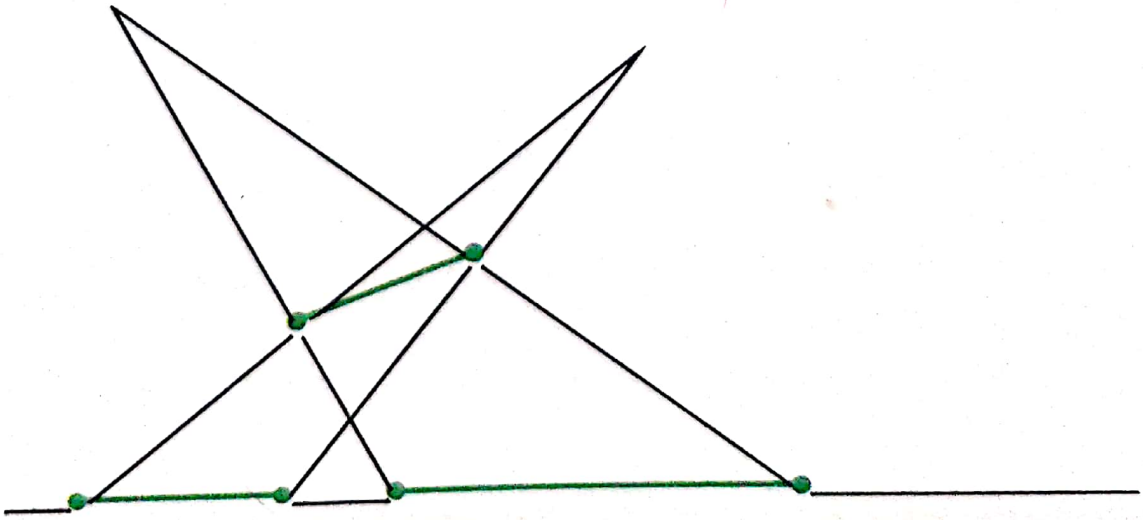
2. *Toate dreptele au același număr cardinal.*
Fie X, Y două drepte date, distincte.
Trebuie să demonstrăm că $\# X = \# Y$.
Fie $x \in X$, $y \in Y$ cu $x \neq y$.
Avem deci $X \# xy \# Y$
de unde $\# X = \# dir\ xy = \# Y$.



3. Toate direcțiile au același număr cardinal.
4. Două segmente închise nereduse la un punct au același număr cardinal.



GRAFICUL 120



5. Arătați că toate semidreptele închise au același număr cardinal.

2 — NUMERELE NATURALE

Orice mulțime echipotentă cu mulțimea vidă este vidă.

Se numește zero numărul cardinal al mulțimii vide și se scrie

$$0 = \#\varnothing.$$

Toate mulțimile cu un singur element sînt echipotente: *se numește* **unu** (și se notează 1) *numărul cardinal al mulțimilor cu un singur element.*

Astfel

$$1 = \#\{0\}.$$

Deoarece mulțimile cu un singur element nu sînt vide

$$0 \neq 1$$

și $\{0,1\}$ este o pereche.

Toate perechile sînt echipotente. *Numim* **doi** (și notăm 2) *numărul cardinal al perechilor.*

În special

$$2 = \#\{0,1\}$$

Numerele 0, 1, 2 au fost definite de formulele

$$\begin{aligned} 0 &= \#\varnothing \\ 1 &= \#\{0\} \\ 2 &= \#\{0, 1\} \end{aligned}$$

Și așa mai departe:

$$\begin{aligned} 3 &= \#\{0, 1, 2\} \\ 4 &= \#\{0, 1, 2, 3\} \\ 5 &= \#\{0, 1, 2, 3, 4\} \\ &\dots \\ 27 &= \#\{0, 1, 2, 3, \dots, 26\} \\ &\dots \\ 1.000.000.000 &= \#\{0, 1, 2, 3, \dots, 999.999.999\} \\ &\dots \end{aligned}$$

Admiteți desigur că numerele 0, 1, 2, 3, . . . astfel definite sînt distincte două cîte două.

Aceste numere au fost numite numere **naturale.**

Mulțimea lor se notează cu ω.

Scanned with OKEN Scanner

3 — MULȚIMI INFINITE

Numim **mulțime finită** orice mulțime al cărei număr cardinal este un număr natural.

Numim **mulțime infinită** orice mulțime nefinită.

Mulțimea ω este o mulțime infinită.

— Prezentați alte mulțimi infinite.
— Planul Π este o mulțime infinită de puncte.

Orice dreaptă este o mulțime infinită de puncte.

Dacă a și b sînt puncte distincte, $[ab]$ este o mulțime infinită de puncte.

$\mathfrak{D}$ este o mulțime infinită de drepte.

Pentru orice dreaptă D: *dir* D este o mulțime infinită de drepte.

Pentru orice punct x, mulțimea $\mathfrak{D}_x$ a dreptelor care conțin pe x este infinită.

Mulțimea $2\,\omega$ a numerelor naturale pare este infinită.

EXERCIȚIU

Prezentați 17 mulțimi infinite foarte diferite între ele.

4 — NUMĂRUL δ

Să numim δ numărul cardinal al mulțimii ω

$$\delta = \#\,\omega = \#\,\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Noi știm că:

Două mulțimi au același număr cardinal dacă și numai dacă există o aplicație biunivocă de la o mulțime la cealaltă.

Aplicația $\omega \to 2\,\omega : x \to 2x$ este biunivocă.

Deci

$$\#\,2\,\omega = \#\,\omega = \delta.$$

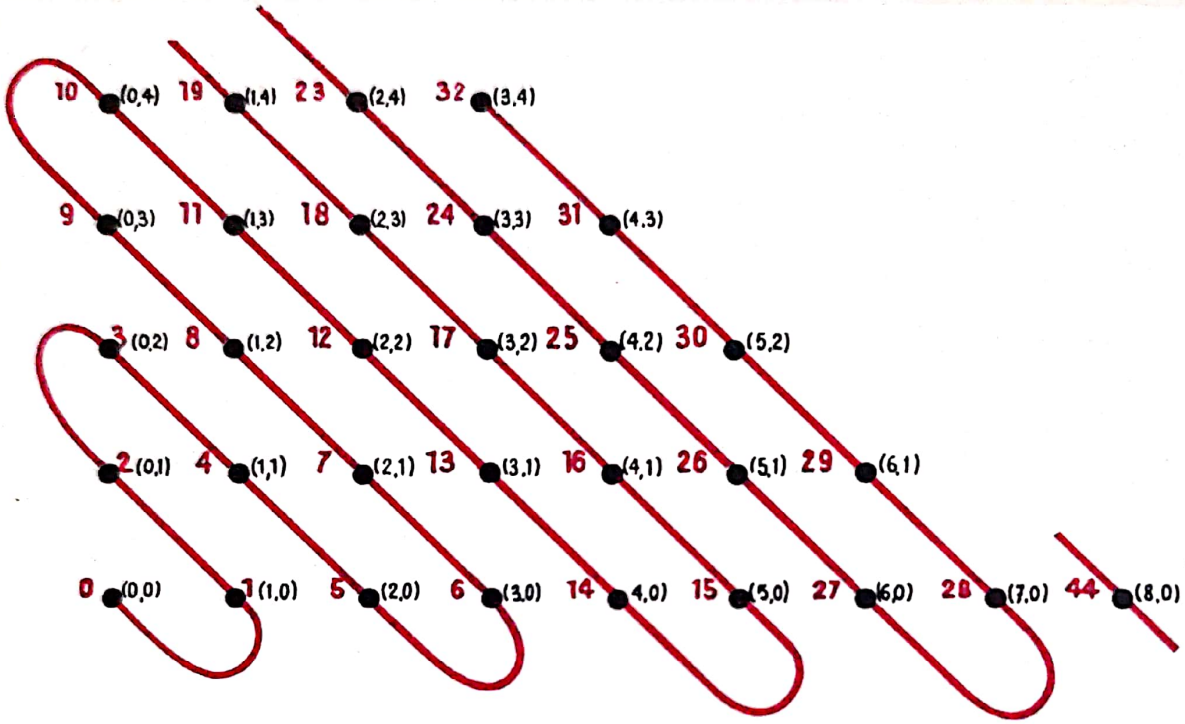
Vedem deci că *mulțimea infinită ω are același număr cardinal ca una din părțile ei.*

EXERCIȚII

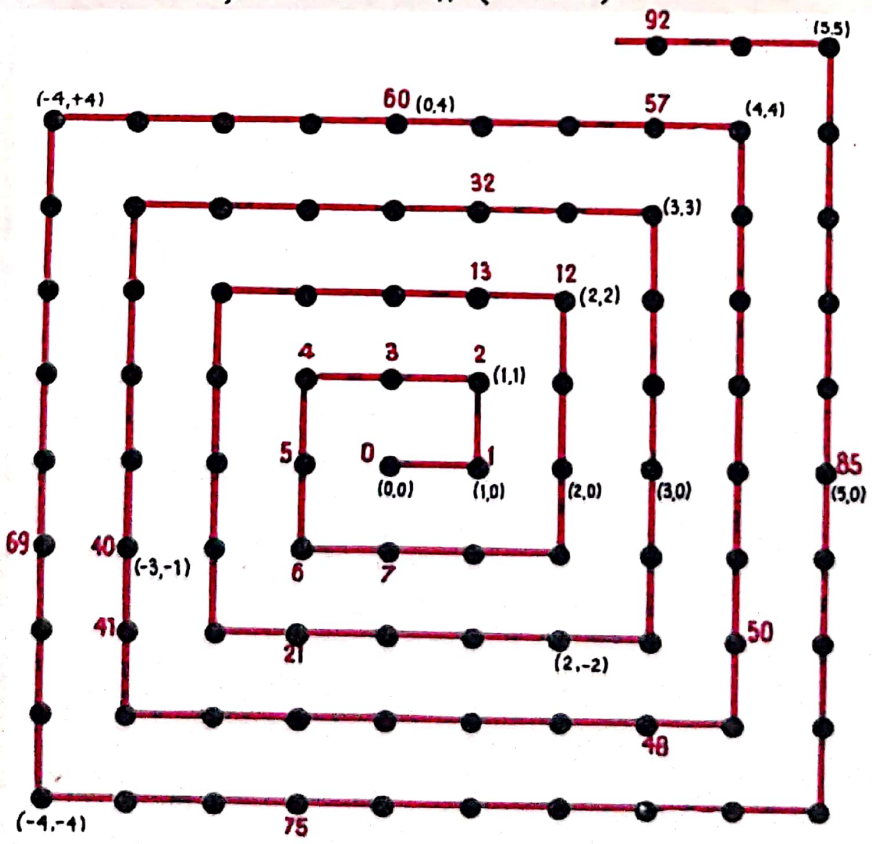
1. $\#\,3\,\omega = \delta$
2. $\#\,127.281\;\omega = \delta$
3. $\#\,333.333.333.333\;\omega = ?$
4. $\#\,\{1, 2, 3, \ldots\} = \delta$
5. $\#\,\{2, 3, 4, \ldots\} = ?$

Scanned with OKEN Scanner

6. $\# \{1.000.000.000, 1.000.000.001, 1.000.000.002, \ldots\} = ?$
7. $\# \{1, 2, \ldots, 1.000.000.000\} \neq \# \{0, 1, 2, \ldots, 1.000.000.000\}$
8. $1 = \# \{1\}$, $2 = \# \{1, 2\}$, $8 = \# \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
9. Schema de mai jos arată că $\# (\omega \times \omega) = \# \omega = \delta$



10. Schema de mai jos arată că $\# (Z \times Z) = \delta$

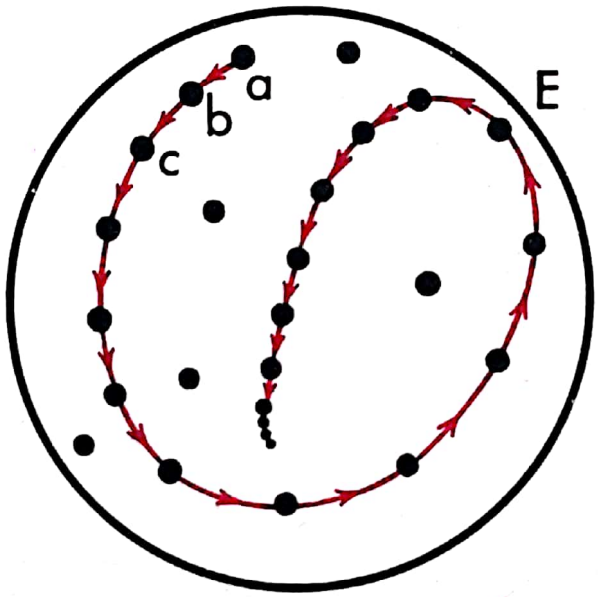


11. Arătați printr-o schemă că $\# (\omega \times Z) = \delta$.

5 — TEOREMA LUI DEDEKIND

Fie E o mulțime.
Dacă $E = \varnothing$, atunci E este finit.
Dacă $E \neq \varnothing$, fie $a \in E$.
Dacă $E \setminus \{a\} = \varnothing$, atunci $E = \{a\}$ și E este finit.
Dacă $E \setminus \{a\} \neq \varnothing$, fie $b \in E \setminus \{a\}$.
Dacă $E \setminus \{a, b\} = \varnothing$, atunci $E = \{a, b\}$ și E este finit.
Dacă $E \setminus \{a, b\} \neq \varnothing$, fie $c \in E \setminus \{a, b\}$.
. . . etc. . . .
Vedem că o mulțime este infinită dacă și numai dacă putem defini în ea un **șir.**

$$a \to b \to c \to \ldots$$



ȘIR
GRAFICUL 121

DEFINIȚIA 2 — *Se numește* **șir** *de origină* x_0 *definit în mulțimea E orice relație care satisface următoarele condiții:*
De la x_0 *pleacă o singură săgeată care ajunge în* $x_1 \neq x_0 \in E$,
de la x_1 *pleacă o singură săgeată care ajunge în* $x_2 \notin \{x_0, x_1\} \subset E$,
de la x_2 *pleacă o singură săgeată care ajunge în* $x_3 \notin (x_0, x_1, x_2) \subset E$
. . . *etc.* . . .

De unde această nouă definiție a mulțimilor infinite:

DEFINIȚIA 3 — *O mulțime este* ***infinită*** *dacă și numai dacă putem să definim în ea un șir.*

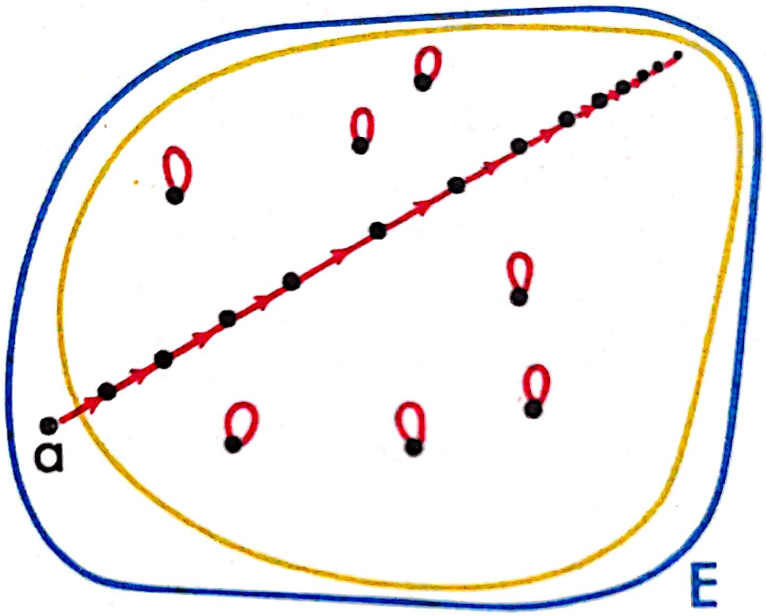
Scanned with OKEN Scanner

LEMA 1 — *Orice mulțime infinită este echipotentă cu una din părțile ei.*

Demonstrație: Fie E o mulțime infinită.

Să definim un șir în E, iar *a* să fie primul lui element.

Să punem o buclă fiecărui punct (eventual) al lui E din care nu pleacă nici o săgeată a șirului.



$E \# E \setminus \{a\}$

GRAFICUL 122

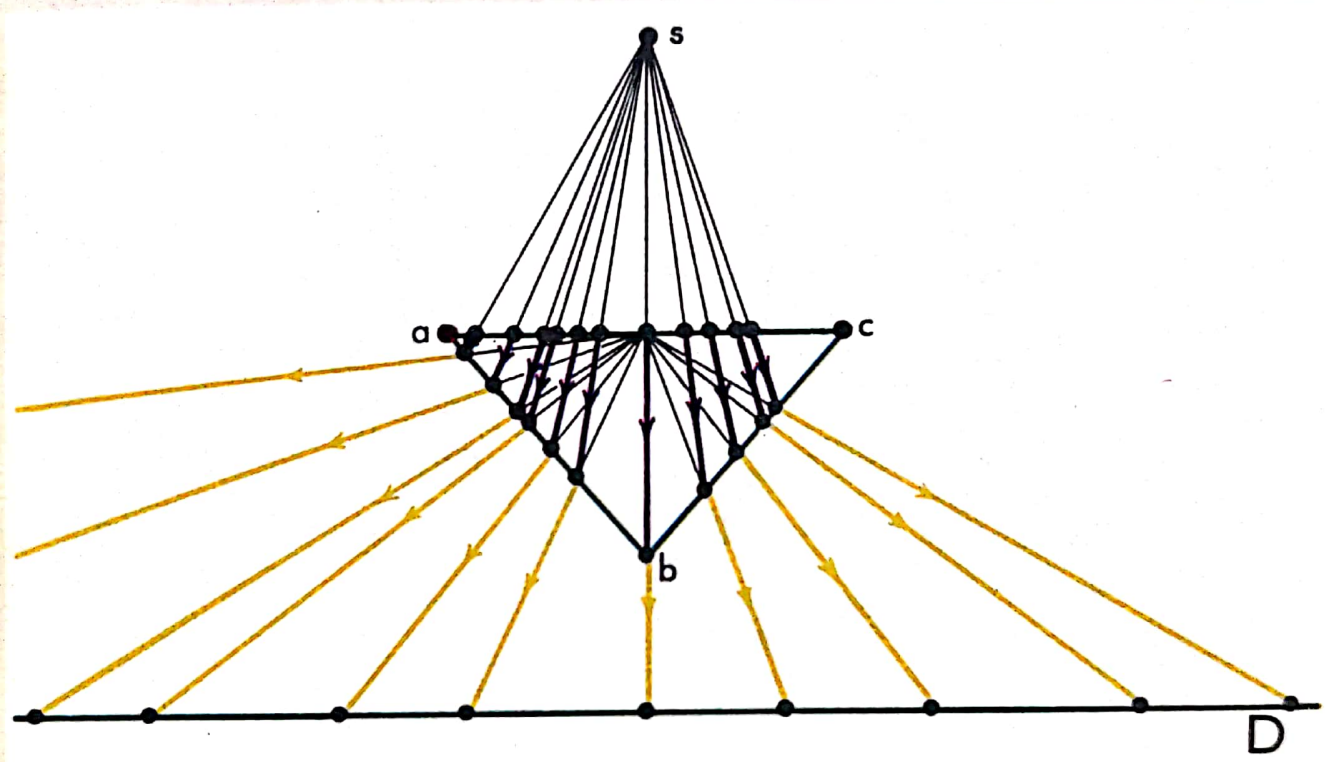
Graficul obținut astfel definește o aplicație biunivocă $E \to E \setminus \{a\}$, ceea ce dovedește că E este echipotent cu partea sa proprie $E \setminus \{a\}$.

EXERCIȚII

1. Definiți un șir în ω.
2. Definiți un șir în $E \setminus \{a\}$ (vezi graficul nr. 122).
3. Dacă E este infinit și $a \in E$: $\# E = \#(E \setminus \{a\})$.
4. Dacă E este infinit și $a, b, c \in E$: $\# E = \#(E \setminus \{a, b, c\})$.
5. Definiți un șir în planul Π.
6. Definiți un șir în dreapta D.
7. Definiți un șir în *dir* D.

Scanned with OKEN Scanner

8. **Dacă** $a, b \in \Pi$ şi $a \neq b$,
Atunci: $\# [a\,b] = \#]\,a\,b[= \# [a\,b[= \#]\,a\,b]$
9. Toate semidreptele, deschise sau închise, au acelaşi număr cardinal.
10. Dacă $a \neq c$, segmentul deschis $]ac[$ are acelaşi număr cardinal ca orice dreaptă.



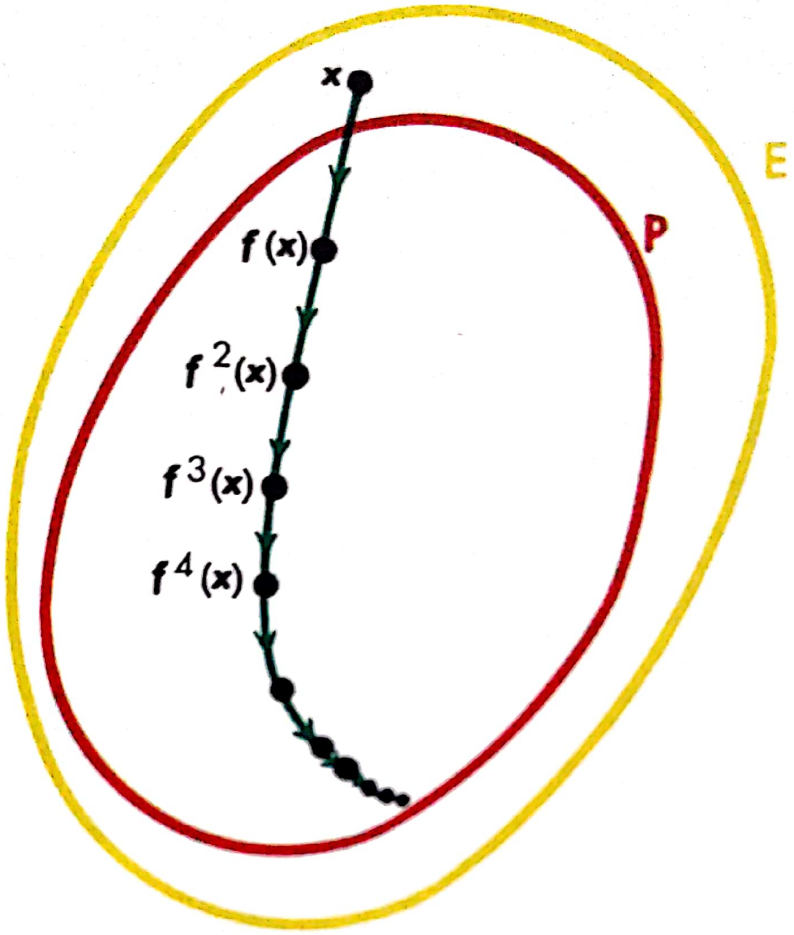
GRAFICUL 123

11. Toate dreptele,
toate semidreptele, deschise sau închise,
toate segmentele cu extremităţi distincte, deschise, semideschise, închise,
toate direcţiile . . . ***au acelaşi număr cardinal.***

LEMA 2 — *Orice mulţime echipotentă cu una din părţile ei proprii este infinită.*

Demonstraţie: Fie E o mulţime echipotentă cu una din părţile ei proprii P.
Există deci o aplicaţie biunivocă f: E → P.
Fie $x \in E \setminus P$.
$f(x) \in P$ şi deci $f(x) \neq x$.
Aplicaţia biunivocă f aplică cele două puncte distincte x, $f(x)$ în două puncte distincte $f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$ a lui P.
Deci x, f (x) şi f^2 (x) sînt distincte etc.

Am construit un șir în E, deci E este infinit.



GRAFICUL 124

Reunind cele două teoreme 1 și 2 obținem

TEOREMA 2 *(Dedekind)* **— O mulțime este infinită dacă și numai dacă ea este echipotentă cu una din părțile sale proprii.**

Din teorema lui Dedekind rezultă că dacă F *este o mulțime finită, orice* aplicație a mulțimii F *în* mulțimea F, F → F este o **permutare** a lui F.

Într-adevăr:

Dacă aplicația mulțimii F *în* ea însăși i : F → F nu este o **aplicație** a mulțimii F *pe* ea însăși. Atunci F este echipotenta în partea sa proprie iF și conform teoremei 2, F este infinită.

Deoarece F este finită, aplicația mulțimii F *în* ea însăși i : F → F trebuie să fie în același timp o **aplicație** a mulțimii F *pe* ea însăși. Funcția i este atunci o **permutare** a lui F.

TEOREMA 3 — Dacă F este o mulțime finită, orice aplicație a ei *în* ea însăși F → F este o permutare a lui F.

6 — MULȚIMI INTERMEDIARE

TEOREMA 4 — Dacă o mulțime este echipotentă cu una din părțile ei, ea este echipotentă cu orice mulțime intermediară.

$$A \supset B \supset C \text{ și } A \# C \Rightarrow A \# B$$

DEMONSTRAȚIE: Dacă $A = B$, avem evident $A \# B$.

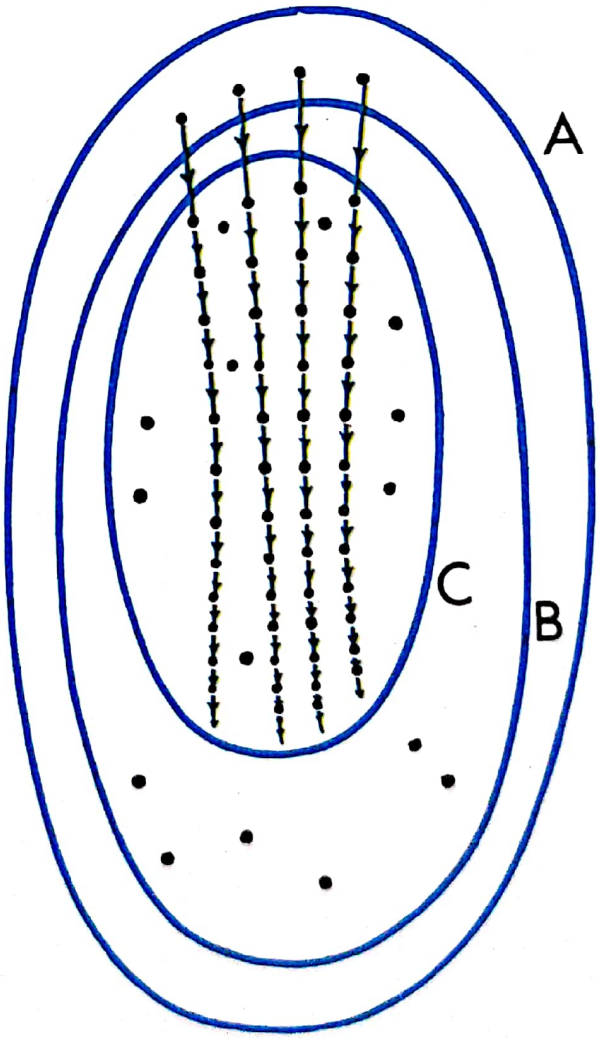
Să presupunem deci $A \neq B$ (de unde $A \setminus B \neq \varnothing$).

Deoarece $A \# C$, există o aplicație biunivocă f: $A \to C$.

Demonstrația teoremei precedente ne arată că această aplicație biunivocă definește un șir începînd din orice punct al lui $A \setminus B$.

Să desenăm cu verde șirurile care încep în patru puncte ale lui $A \setminus B$ (care vor *reprezenta* pentru noi **toate** punctele lui $A \setminus B$).

Deoarece f este o aplicație biunivocă, două săgeți distincte ale acestor șiruri nu pot ajunge în același punct, de unde rezultă situația următoare



GRAFICUL 125

Vom construi cu roșu o aplicație biunivocă $A \to B$.

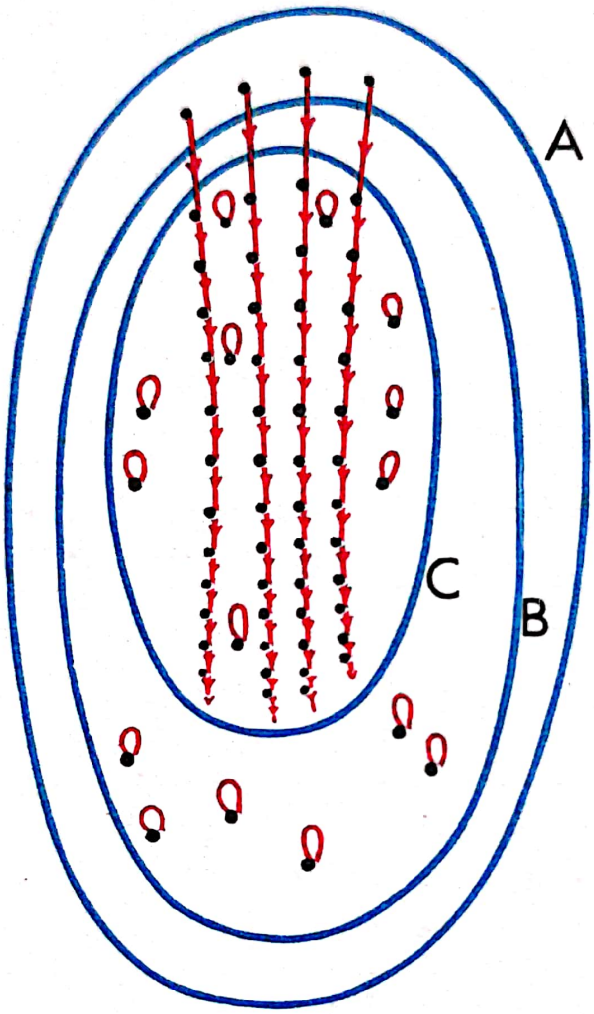
Vom începe prin a desena cu roșu șirurile care pleacă din punctele lui $A \setminus B$.

Scanned with OKEN Scanner

Anumite puncte ale lui B nu sînt atinse de aceste şiruri. Le vom pune o buclă roşie.

Avem astfel o aplicaţie biunivocă A → B.

Ceea ce trebuia să demonstrăm.



GRAFICUL 126

7 — ORDINEA NUMERELOR CARDINALE

La prima lecţie din acest an, cînd am intrat în clasă s-a produs un concert de exclamaţii.

— Nu sînt destule scaune.

— Nu sînt scaune pentru toţi.

— Sînt mai multe eleve decît scaune.

— Sînt mai puţine scaune decît eleve.

Nimeni dintre noi n-a avut ideea să numere scaunele sau elevele. Totuşi, fără teamă de a ne înşela am afirmat: *sînt mai puţine scaune decît eleve.*

— De ce?

Scanned with OKEN Scanner

— Deoarece anumite eleve nu s-au putut așeza, din cauză că toate scaunele erau ocupate de colegele lor.

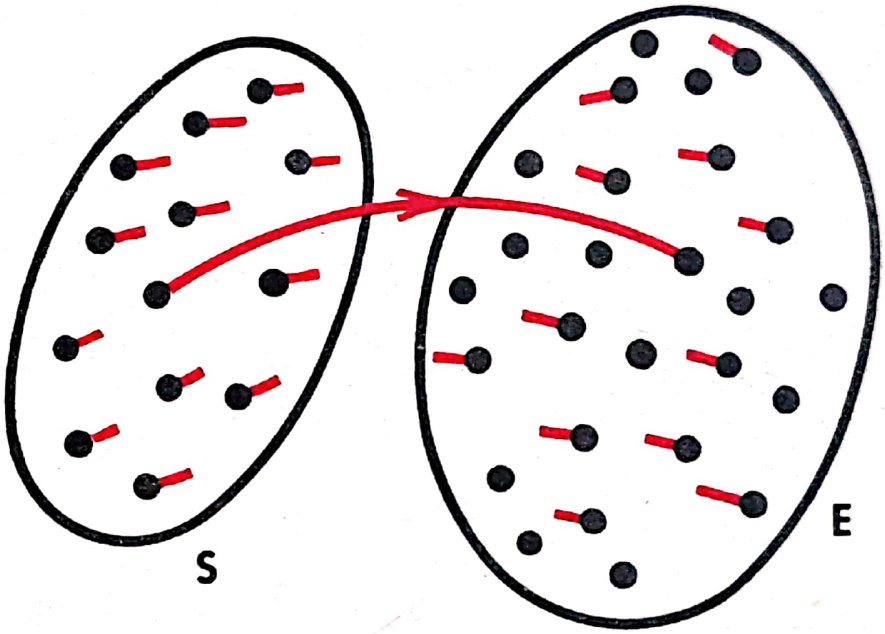
— Notați cu E mulțimea elevelor din clasă și cu S mulțimea scaunelor rezervate elevelor. Toate scaunele au fost ocupate.

Astfel

. . . este ocupat de . . .

este o funcție f: S → E.

Desenați un grafic al acestei funcții



. . . este ocupat de . . .

GRAFICUL 127

Relația f este o **aplicație** a mulțimii S *în* mulțimea E, S→ E.

(Din orice punct al lui S pleacă o săgeată și numai una singură: fiecare scaun este ocupat de o singură elevă.

În orice punct al lui E ajunge o singură săgeată: nici o elevă nu ocupă mai mult de un scaun).

DEFINIȚIA 4 — *Fie A, B mulțimi.*
$\#A \leqslant \#B \iff$ există o **aplicație** a mulțimii A *în* mulțimea B, A → B.
Semnul $\leqslant$ se citește: **este mai mic sau egal cu**, sau **este cel mult egal cu.**
Dacă $a \leqslant b$ și $a \neq b$, scriem $a < b$.

Scanned with OKEN Scanner

Numerele naturale au fost definite mai sus ca și numerele cardinale ale mulțimilor

$$\varnothing \subset \{0\} \subset \{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\} \subset \ldots \subset \{0, 1, \ldots, n\} \subset \ldots \qquad (1)$$

Fie a și b numere naturale. Deci $a = \#\,A$ și $b = \#\,B$, unde A și B sînt mulțimi care figurează în (1).

Atunci

$A \subset B$ (și deci există o aplicație a mulțimii A *în* mulțimea B, $A \to B$; de unde $a \leqslant b$)

sau

$B \subset A$ (și atunci $b \leqslant a$).

LEMA 3 — Dacă fiecare din literele **a, b** indică un număr natural

$$a \leqslant b \text{ sau } b \leqslant a$$

EXERCIȚIU

Pentru orice număr natural n: $\quad n < \delta$

Vom stabili că **relația $\leqslant$ este o ordine.**

LEMA 4 — *Relația $\leqslant$ este reflexivă.*

Pentru orice mulțime E: $\#\,E \leqslant \#\,E$.

Pe baza definiției $\leqslant$, trebuie să dovedim existența unei aplicații a mulțimii E *în* mulțimea E.

$$E \to E$$

Transformarea identică a lui E este o aplicație a mulțimii E *în* mulțimea E $E \to E$.

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

LEMA 5 — *Relația $\leqslant$ este tranzitivă.*

Dacă fiecare din literele A, B, C indică o mulțime,

$$\#\,A \leqslant \#\,B \leqslant \#\,C \Rightarrow \#\,A \leqslant \#\,C$$

Scanned with OKEN Scanner

DEMONSTRAȚIE:

$\#A \leqslant \#B \Rightarrow$ există o aplicație a mulțimii A *în* mulțimea B, $f: A \to B$.
$\#B \leqslant \#C \Rightarrow$ există o aplicație a mulțimii B *în* mulțimea C, $g: B \to C$.

Deoarece compusa a două aplicații este o aplicație (cap. 12, teorema 4. pag. 202), *gof* este o aplicație a mulțimii A *în* mulțimea C, $A \to C$, deci

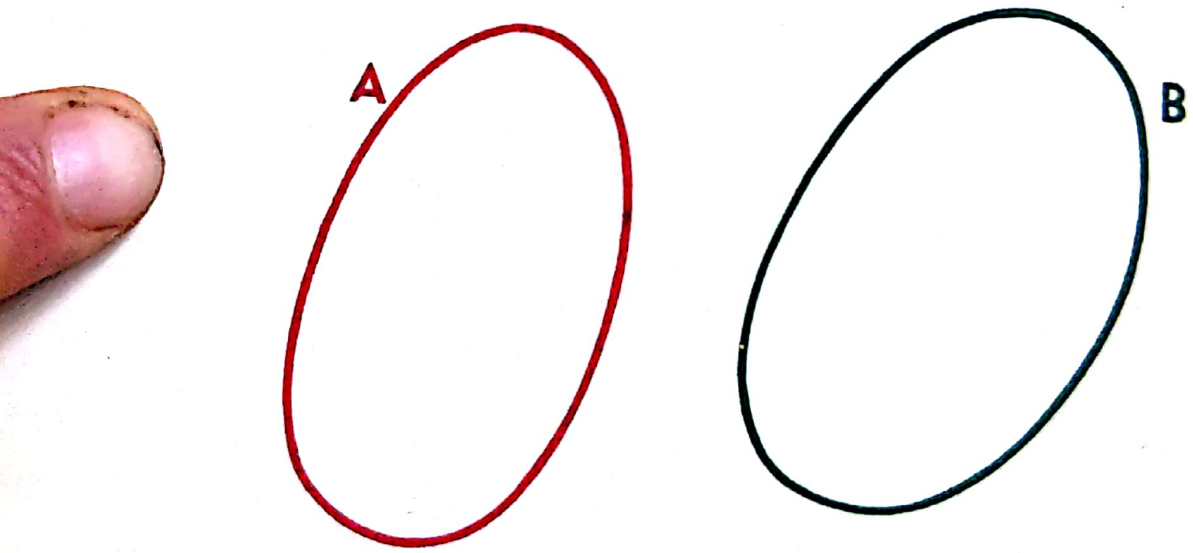
$$\#A \leqslant \#C$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

LEMA 6 **(Bernstein)** — *Relația* $\leqslant$ *este antisimetrică. Dacă fiecare din literele* A, B *reprezintă o mulțime,*

$$\#A \leqslant \#B \text{ și } \#B \leqslant \#A \Rightarrow \#A = \#B$$

DEMONSTRAȚIE: Să reprezentăm mulțimile A și B prin diagrame (pe care le vom desena disjuncte pentru claritatea desenului).



Deoarece $\#A \leqslant \#B$, există o aplicație a mulțimii A *în* mulțimea B, $f: A \to B$, care este o aplicație **biunivocă**

$$f: A \to fA \subset B$$

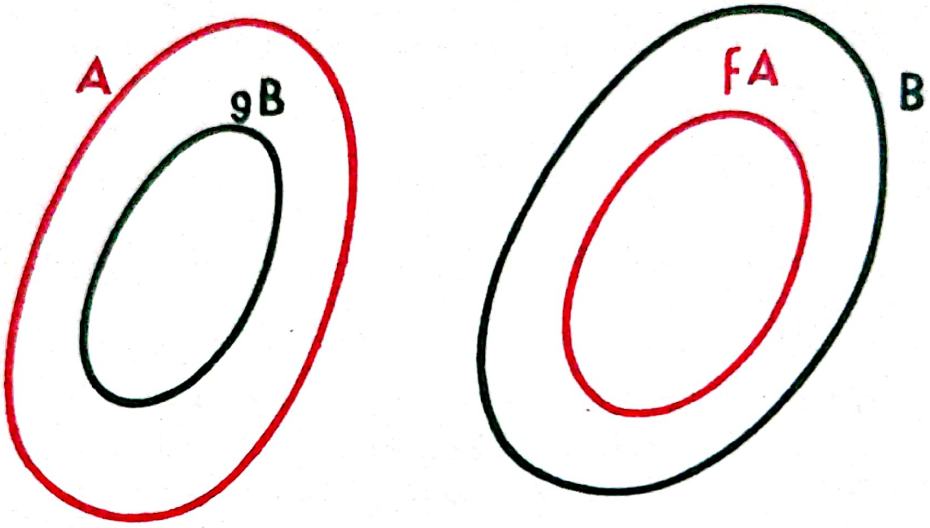
De asemenea, $\#B \leqslant \#A$ are ca rezultat existența unei aplicații **biunivoce.**

$$g: B \to gB \subset A$$

Scanned with OKEN Scanner

Să completăm diagrama noastră punîndu-i fA și gB și reprezentînd cu aceeași culoare mulțimile care au în mod sigur același număr cardinal

$$\#A = \#fA$$
$$\#B = \#gB$$



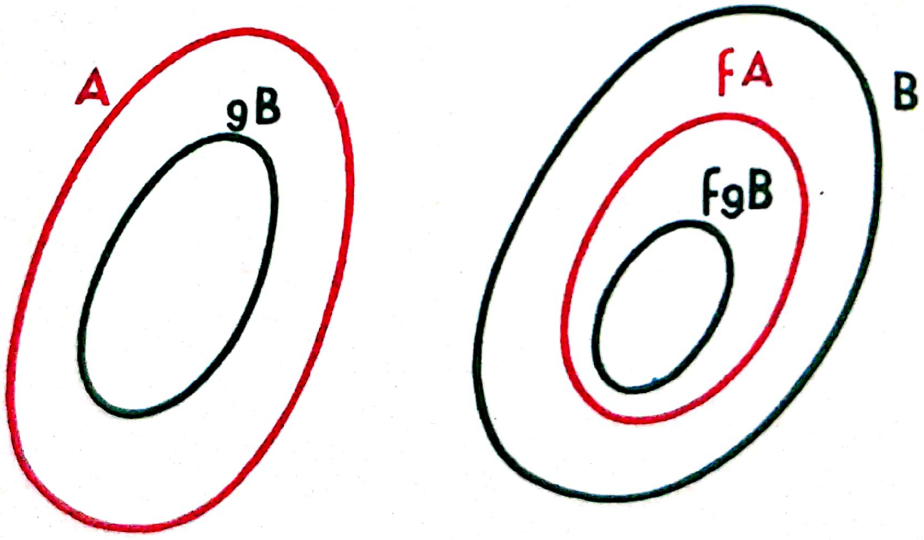
Aplicația biunivocă $A \to fA$, *definește*, la rîndul ei, o aplicație biunivocă

$$gB \to fgB \subset fA$$

deci

$$\#B = \#gB = \#fgB$$

Să punem fgB pe diagramă.



Avem deci situația

$$B \supset fA \supset fgB \text{ și } \#B = \#fgB$$

Pe baza teoremei 4 (pag. 247), $\#fA = \#B$.

Deoarece $\#fA = \#A$, am dovedit că $\#A = \#B$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

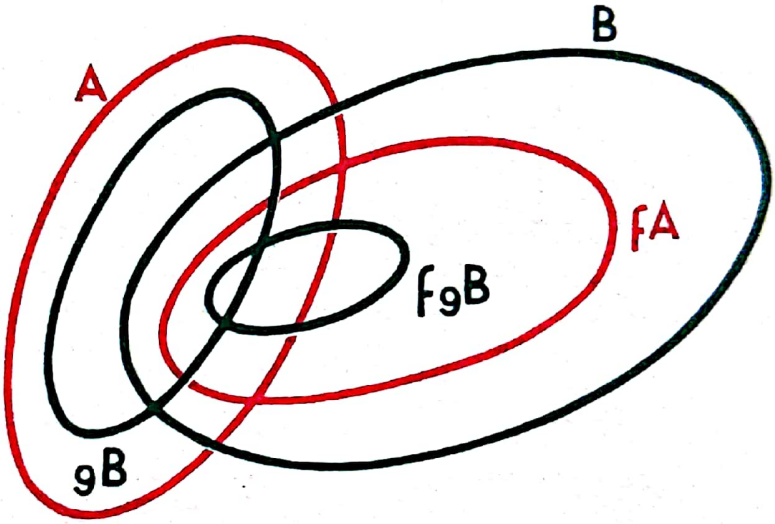
Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 4 — **Relaţia $\leqslant$ este o relaţie de ordine.**

Această teoremă este o consecinţă imediată a celor trei teoreme precedente.

EXERCIŢIU

În demonstraţia lemei 6 (pag. 251), am desenat mulţimile A şi B disjuncte. Repetaţi această demonstraţie servindu-vă de diagrama generală de mai jos.



DEDEKIND Richard (1831—1916).

Richard Dedekind, de naţionalitate germană, este fără îndoială unul din matematicienii care au contribuit mai mult ca să repună matematicile pe baze solide în cadrul teoriei mulţimilor.

Scanned with OKEN Scanner

17

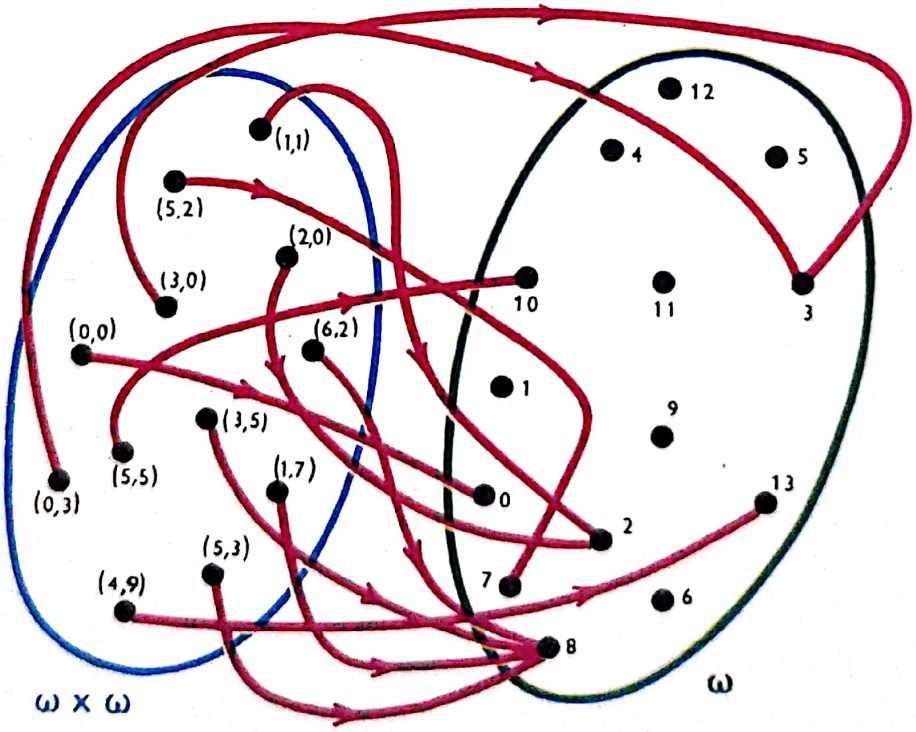
Adunarea

1 — DEFINIȚIA ADUNĂRII

Iată doi saci.
În primul sînt 3 obiecte, în al doilea 5.
Vărsați conținutul celor doi saci în această ladă goală.
Nu știm nimic despre aceste obiecte.
Nu știm dacă sînt asemănătoare sau sînt foarte diferite.
Și totuși știm că lada conține acum 8 obiecte.
Numărul 8 este dat de perechea (3,5) și nu de natura obiectelor.
Se spune că 8 este suma celor 2 numere, 3 și 5, *ceea ce se scrie*

$$3 + 5 = 8$$

Adunarea este **funcția** *care aplică orice pereche de numere pe* **suma lor.**



ADUNAREA: $\omega \times \omega \rightarrow \omega : (x, y) \rightarrow x + y$

GRAFICUL 128

Scanned with OKEN Scanner

Astfel adunarea este legată de reuniune!

Cum să realizăm o adunare plecînd de la reuniune?

— Gîndiți-vă la un număr! Să-l notăm cu a.

Și eu mă gîndesc la un număr. Să-l notăm cu b.

Ne propunem să calculăm $a + b$.

Cum să facem?

— Vom constitui fiecare o mulțime.

— Ce mulțime veți constitui?

— O mulțime al cărei număr cardinal este a, este o mulțime care conține a obiecte.

— Obiectele pe care le veți alege au importanță?

— Nu, singurul lucru care are importanță este ca mulțimea noastră să aibă a obiecte.

— Dați un nume mulțimii voastre!

— S-o numim A.

— Cum notăm că A conține a obiecte?

— $$\# A = a$$

— Ce trebuie să fac eu la rîndul meu?

— Să constitui o mulțime B care conține b obiecte!

— Pot alege obiectele după voia mea?

— Da, singurul lucru care are importanță este ca mulțimea B să conțină b obiecte, ceea ce notăm

$$\# B = b$$

— Sînteți absolut siguri că pot lua orice obiecte ca să constitui mulțimea B?

— . . .

— Pot, de exemplu, să caut în mulțimea voastră A și să iau de acolo cîteva obiecte ca să constitui pe B?

— Nu, desigur, aceasta se-nțelege de la sine! Elementele lui A și B trebuie să fie diferite.

— Cum exprimăm mai bine acest lucru?

$$A \cap B = \varnothing$$

— Să rezumăm operațiile noastre.

Am luat două numere naturale $a, b \in \omega$.

Am constituit mulțimile A *și* B *astfel încît*

$$a = \# A, \quad b = \# B, \quad A \cap B = \varnothing$$

— Ce mai rămîne de făcut?

— Să reunim A și B și să vedem cîte elemente are această mulțime.

— Cum notăm numărul elementelor lui $A \cup B$?

— Notăm numărul cardinal al mulțimii $A \cup B$ prin

$$\#(A \cup B)$$

— Deci

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B$$
$$\text{întrucît } A \cap B = \varnothing$$

Putem, deci, da **definiția.**

DEFINIȚIA 1

Dacă $A \cap B = \varnothing$ **Atunci** $\#A + \#B = \#(A \cup B)$

Dacă $a = \#A$, $b = \#B$ și $A \cap B = \varnothing$ **Atunci** $a + b = \#(A \cup B)$

EXERCIȚII

1. $\#\{o\} + \#\{o\} \neq \#(\{o\} \cup \{o\})$

2. Vi se spune că $\#A = 17$, $\#B = 24$, $\#(A \cup B) = 35$
Calculați $\#(A \cap B)$, $\#(A \setminus B)$, $\#(B \setminus A)$.
(Ajutați-vă de o diagramă).

3. Vi se spune că $\#A = 19$, $\#B = 7$, $\#(A \cup B) = 19$
Ce deduceți din aceasta pentru A și B?
Calculați $\#(A \cap B)$, $\#(A \setminus B)$, $\#(B \setminus A)$

4. Vi se spune că $\#A = 27$, $\#B = 36$, $\#(A \cup B) = 63$
Ce deduceți din aceasta pentru A și B?
Calculați $\#(A \cap B)$, $\#(A \setminus B)$, $\#(B \setminus A)$

Scanned with OKEN Scanner

5. Clasa voastră are 24 eleve.
I se cere Simonei să scrie numele a 6 eleve din clasă pe o foaie de hîrtie, ceea ce definește o mulțime S.
Micuța Maddy, la rîndul ei, constituie o mulțime M de 7 eleve din clasă.
Putem spune cu certitudine care este numărul de elemente al mulțimii $S \cup M$?
Ce puteți spune de numărul de elemente al mulțimii $S \cup M$?
(Ajutați-vă de o diagramă).

6. În această clasă de 27 de eleve, toate elevele sînt înscrise la cel puțin unul din următoarele cluburi: clubul de înot și cineclub.
Numărul elevelor înscrise la cele două cluburi este de 27, iar cineclubul are 18 membre.
Care este numărul membrelor clubului de înot?

7. Această școală oferă celor 225 de elevi ai ei posibilitatea de a se înscrie la un club de înot și la un club de teatru; 55 de elevi s-au înscris la « Tînărul teatru » și 117 la « Tritonii veseli ». Cunoașteți numărul elevilor care nu s-au înscris la nici unul din cele 2 cluburi? Ce știți despre acest număr? Dați, de asemenea, toate informațiile posibile asupra numărului de elevi care frecventează concomitent cele două cluburi.

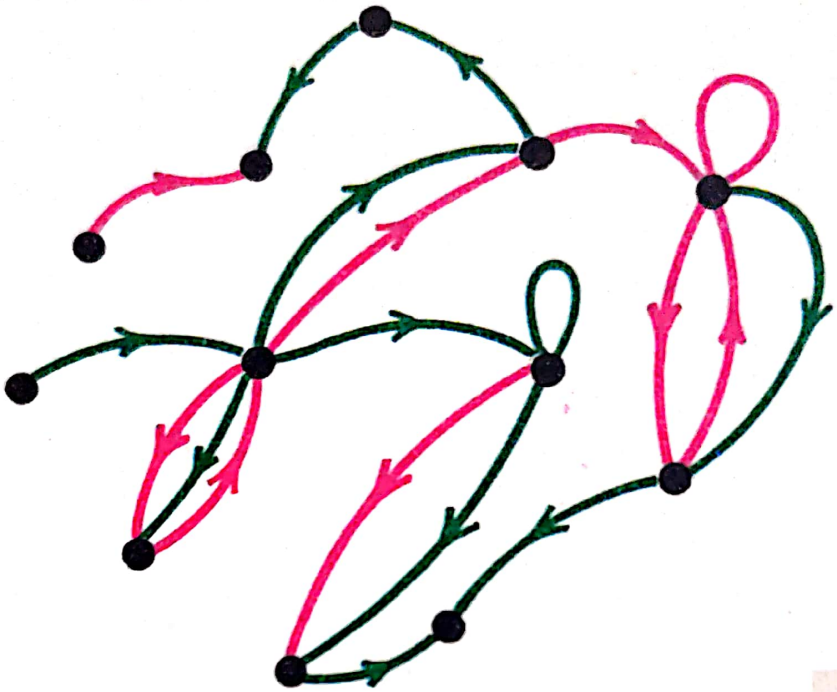
8. Ortopolis este un oraș în formă de dreptunghi ale cărui bulevarde drepte sînt orientate de la nord spre sud, iar cele 15 străzi de la est spre vest.
Iluminatul public al orașului este constituit exclusiv din lămpi axiale situate din 50 în 50 de metri pe bulevarde și din 60 în 60 m pe străzi.
Una din aceste lămpi este situată la fiecare intersecție dintre o stradă și un bulevard.
Distanța între cele două lămpi extreme din fiecare stradă este de 3.300 m.
Distanța dintre cele 2 lămpi extreme din fiecare bulevard este de 2.800 m.
Cîte lămpi are iluminatul public din Ortopolis?

9. Această școală de 315 eleve organizează 3 cluburi: « Cineclubul », « Tritonii veseli » și « Tînărul teatru ».
Fiecare elevă este înscrisă în mod obligatoriu la cel puțin unul din aceste cluburi.
153 eleve sînt înscrise la un singur club, dintre care 75 la « Tînărul teatru » și 38 la « Cineclub ».
25 de eleve sînt înscrise la trei cluburi deodată.
Cineclubul numără 130 de adepte dintre care nici una nu s-a înscris la « Tînărul teatru », fără să se înscrie în același timp la « Tritonii veseli ».

Scanned with OKEN Scanner

Care este numărul afiliatelor la « Tînărul teatru »?
Care este numărul afiliatelor la clubul « Tritonii veseli »?

10.



GRAFICUL 129

Cîte perechi cuprinde relația $A \cap B$?

11. În această mulțime de copii, relația ... *are ca frate* ... conține 7 perechi, iar relația ... *are ca soră* ... conține 9 perechi.
Cîte perechi conține relația ... *are ca frate sau soră* ... ?

12. Mă gîndesc la o mulțime de 18 numere naturale distincte.
Nu vă spun nimic mai mult cu privire la aceste numere. Totuși puteți calcula numărul perechilor relației $\leqslant$ definită în această mulțime de numere.

13. Să notăm cu P mulțimea numerelor naturale pare și cu I mulțimea numerelor naturale impare.

Deci

$$\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$P = \{0, 2, 4, \ldots\}$$
$$I = \{1, 3, 5, \ldots\}$$

Știți că $\# \omega = \delta$, $\# P = \# 2\omega = \delta$
Aplicația $P \to I$: $x \to x + 1$ este o aplicație biunivocă.
Ce înseamnă deci $\# I$?
Avem

$$\omega = P \cup I \quad \text{și} \quad P \cap I = \varnothing$$

Deci

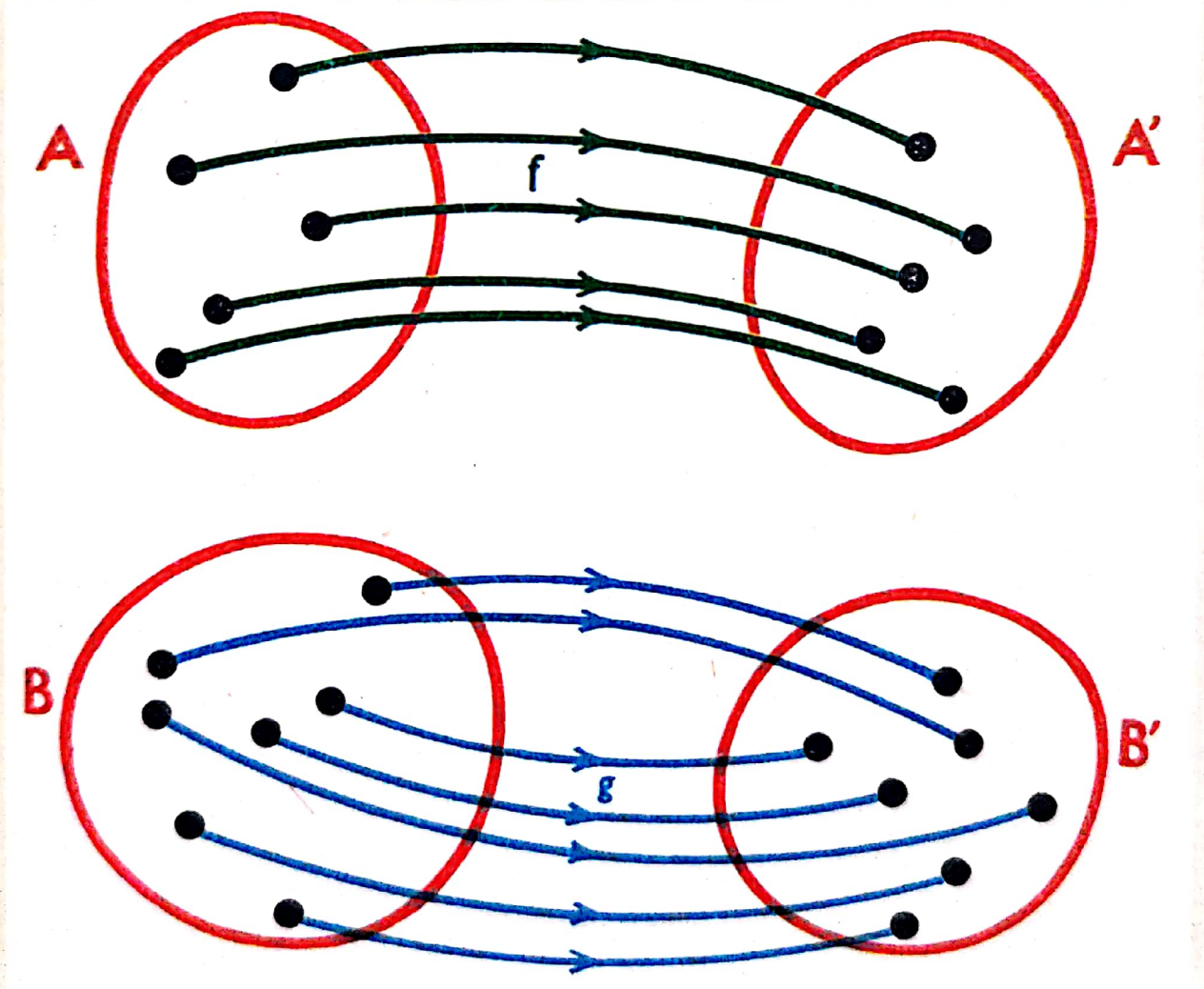
$$\delta + \delta = \delta$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă averea mea s-ar compune din atîția bani cîte numere sînt în ω, v-aș putea da jumătate din ea fără să sărăcesc!

14. Pentru a realiza $a + b$ am constituit mulțimi disjuncte A, B, încît $a = \# A$, $b = \# B$. Apoi ne-am uitat la $A \cup B$.
O altă persoană constituie A', B' disjuncte, astfel încît $a = \# A'$ și $b = \# B'$ și ajunge la noua reuniune $A' \cup B'$.
Este sigur că $A \cup B \# A' \cup B'$.
Deoarece $a = \# A = \# A'$, există o aplicație biunivocă, f: $A \to A'$.
Deoarece $b = \# B = \# B'$, există o aplicație biunivocă, g: $B \to B'$.
Deoarece $A \cap B = \varnothing = A' \cap B'$, reuniunea $f \cup g$ este o aplicație biunivocă $A \cup B \to A' \cup B'$.
Deci $\# (A \cup B) = \# (A' \cup B')$.

Ceea ce trebuia să demonstrăm.



APLICAȚII BIUNIVOCE: f: $A \to A'$, g: $B \to B'$, $f \cup g$: $A \cup B \to A' \cup B'$

GRAFICUL 126

Scanned with OKEN Scanner

15. **Tabel de adunare.** Completați următorul tabel de adunare.

+	0	1	2	7	13	1962	4	875	9999	10	15	27	100
0													
1													
2													
7							11						
13													
1962													
4				11									
875													
9999													
10													
15													
27													
100													

16. $\delta = \#\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$= \#\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$\delta = \#\{2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$
$= \#\{3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$= \{0\} \cup \{1, 2, 3, \ldots\}$
$= \{0, 1\} \cup \{2, 3, 4, \ldots\}$

$\{0\} \cap \{1, 2, 3, \ldots\} = \varnothing$
$\{0, 1\} \cap \{2, 3, 4, \ldots\} = \varnothing$
$\ldots$

Deduceți din aceste formule

$$\delta = 1 + \delta = 2 + \delta = 3 + \delta \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

17. Remarcați că

$$2 + \delta = 3 + \delta$$

și că

$$2 \neq 3$$

Dacă a, b, c indică numere cardinale, formula

$$a + c = b + c$$

nu are deci ca rezultat totdeauna

$$a = b$$

Spunem că adunarea numerelor cardinale nu poate fi **simplificată.**

2 — COMUTATIVITATEA ADUNĂRII

Să arătăm că proprietățile adunării rezultă din proprietățile cunoscute ale reuniunii.

Să începem prin comutativitate.

LEMA 1 — *Adunarea este* ***comutativă*** *; dacă fiecare din literele* a, b *reprezintă un număr cardinal,* $a + b = b + a$.

— Cum am definit $a + b$?

— Am luat $a, b \in \omega$.
Am constituit pe A și B astfel încît
$$a = \#\,A,\ b = \#\,B,\quad A \cap B = \varnothing$$
Atunci avem $a + b = \#\,(A \cup B)$

— Ca urmare a comutativității reuniunii mai putem scrie

$$a + b = \#\,(A \cup B) = \#\,(B \cup A) = b + a$$

Am putut pune al treilea semn = deoarece $B \cap A = \varnothing$

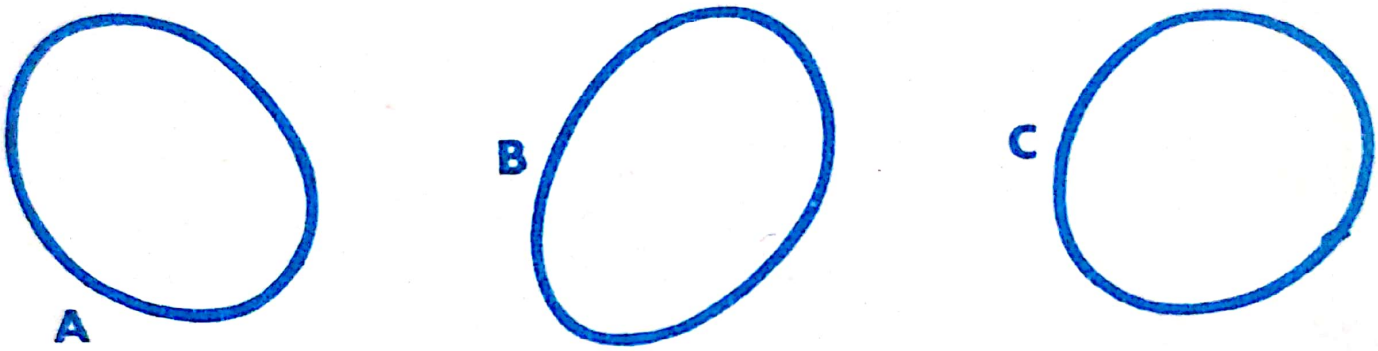
Ceea ce trebuia să demonstrăm.

3 — ASOCIATIVITATEA ADUNĂRII

LEMA 2 — *Adunarea este* ***asociativă****: dacă fiecare din literele* ***a, b, c*** *reprezintă un număr cardinal,* $(a + b) + c = a + (b + c)$

DEMONSTRAȚIE: Să construim mulțimi A, B ,C disjuncte *două cîte două* astfel încît

$$a = \#A, \quad b = \#B, \quad c = \#C$$
$$A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$$



Așadar

$$(A \cup B) \cap C = \varnothing \; ; \; A \cap (B \cup C) = \varnothing$$

Deci

$$a + b = \#(A \cup B) \; ; \; \#(B \cup C) = b + c$$
$$(a + b) + c = \#((A \cup B) \cup C) = \#(A \cup (B \cup C)) = a + (b + c)$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

4 — ELEMENT NEUTRU

— Ce rol joacă $\varnothing$ în raport cu reuniunea?

— Mulțimea vidă este neutră pentru reuniune.

Pentru orice mulțime E:	$E \cup \varnothing = E$

— Care este numărul cardinal al mulțimii vide?

— Zero.

— Care este proprietatea adunării care rezultă din faptul că $\varnothing$ este neutru pentru $\cup$?

— *Zero este neutru pentru adunare.*

Scanned with OKEN Scanner

Pentru orice număr cardinal a: $a + 0 = a$

— Stabiliți această formulă.
— Fie o mulțime A astfel încît $a = \#A$.

$$\begin{aligned} a + 0 &= \#(A \cup \varnothing) \quad \text{deoarece} \quad A \cap \varnothing = \varnothing \\ &= \#A \\ &= a \end{aligned}$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

LEMA 3 — *Numărul zero este* ***neutru pentru adunare.***

Pentru orice număr cardinal a: $a + 0 = 0 + a = a$.

Să strîngem rezultatele enunțate în cele 3 leme de mai sus în

TEOREMA 1 — **Adunarea numerelor cardinale este comutativă și asociativă. Numărul zero este neutru pentru adunare:**

Pentru orice număr cardinal a: $a + 0 = a$

EXERCIȚII

1. Pentru orice obiect a, există o aplicație biunivocă
$\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4)\} \to \{1, 2, 3, 4\}$

2. $$\begin{aligned} 5 + 7 &= \#(\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\} \cup \\ &\qquad \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7)\}) \\ &= \#(\{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\} \cup \\ &\qquad \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7)\}) \end{aligned}$$

3. Arătați exactitatea formulei $o + a = a$.

4. Stabiliți că dacă fiecare din literele a, b, c, d indică un număr cardinal
$$(a + b) + (c + d) = (b + c) + (a + d).$$

Scanned with OKEN Scanner

5. Pentru orice mulțime A și pentru orice mulțime B, avem

$$\# (A \cup B) \leqslant \# A + \# B$$

Într-adevăr, fie mulțimile A', B', astfel încît

$$\# A = \# A', \# B = \# B', A' \cap B' = \varnothing \text{ (Graficul 131)}$$

Considerăm aplicațiile biunivoce

$$f: A \to A', \quad g: B \to B'.$$

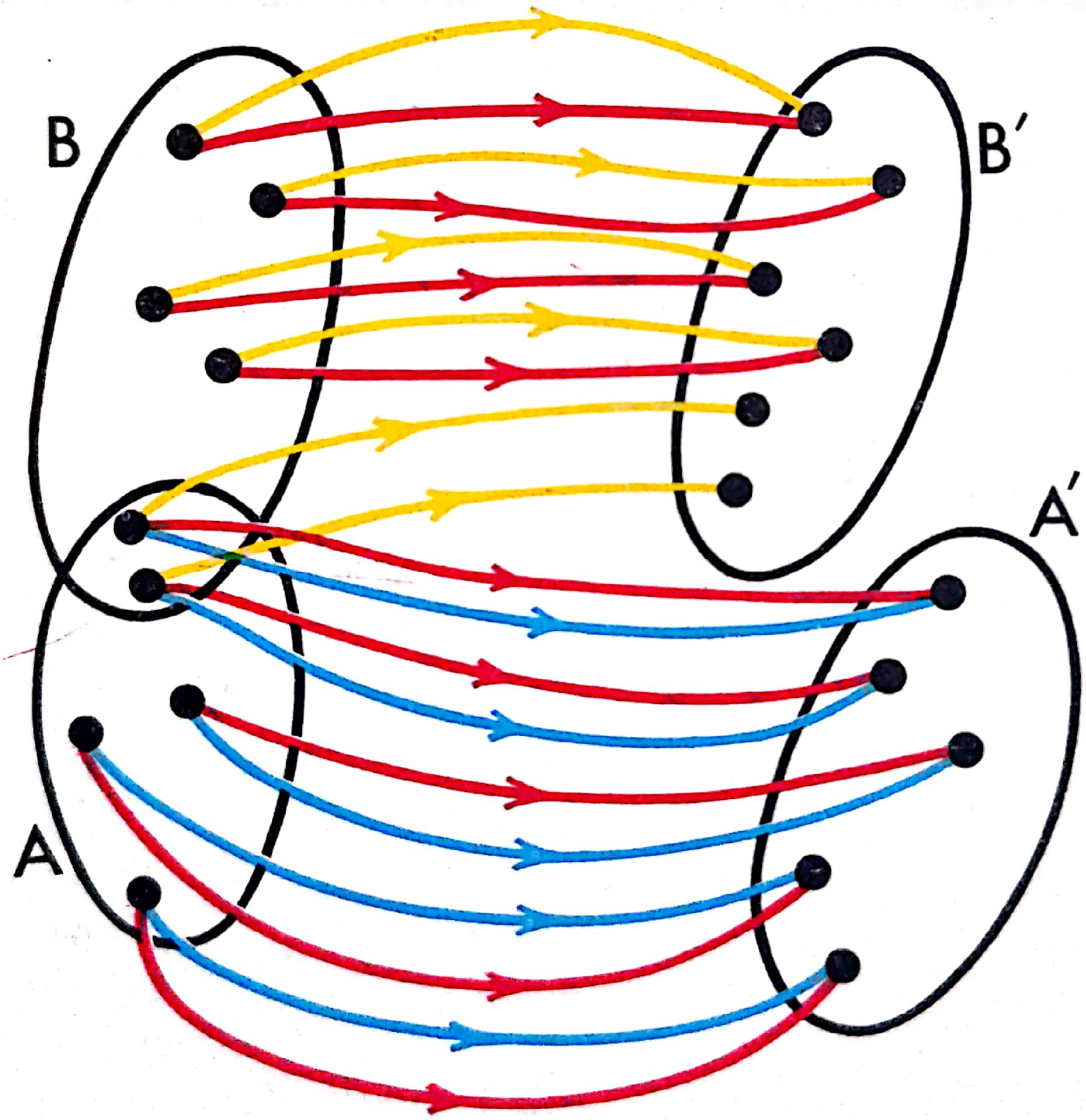
Să notăm cu h funcția $A \cup B \to A' \cup B'$ definită, precum urmează

pentru orice $a \in A$: $h(a) = f(a)$

pentru orice $b \in B \setminus A$: $h(b) = g(b)$

Este evident că h este o aplicație a mulțimii $A \cup B$ *în* mulțimea $A' \cup B'$, $A \cup B \to A' \cup B'$.

Ceea ce trebuia să demonstrăm.



f ESTE O APLICAȚIE BIUNIVOCĂ $A \to A'$

g ESTE O APLICAȚIE BIUNIVOCĂ $B \to B'$

h ESTE O APLICAȚIE A MULȚIMII $A \cup B$ *ÎN* MULȚIMEA $A' \cup B'$ $A \cup B \to A' \cup B'$

GRAFICUL 131

Scanned with OKEN Scanner

6. Dacă fiecare din literele $a, b, c, d, x, y, z, t, u, v, w$ indică un număr cardinal, **comutativitatea** și **asociativitatea** adunării ne permit să scriem

$$\begin{aligned} & a+b+c+d+x+y+z+t+u+v+w \\ =\ & a+x+u+b+y+v+c+z+w+d+t \\ =\ & a+b+c+d+t+u+v+w+x+y+z \\ =\ & z+a+y+b+x+c+w+d+v+t+u \end{aligned}$$

7. Ca urmare a asociativității și comutativității adunării

$$\begin{aligned} & 627+1.352 \\ =\ & (600+20+7)+(1000+300+50+2) \\ =\ & 1000+(600+300)+(20+50)+(7+2) \\ =\ & 1000+900+70+9 \\ =\ & 1979 \end{aligned}$$

8. Dacă $\{A, B, C, D, F, G, H, K\}$ este o partiție a lui E,
$\#E = \#A + \#B + \#C + \#D + \#F + \#G + \#H + \#K.$

9. Fiecărei litere îi atribuim ca valoare locul pe care-l ocupă în alfabetul nostru. Deci $a = 1$, $b = 3$, $c = 4, \ldots, t = 22$, $x = 26$, $z = 27$.
Pentru orice cuvînt punem

$$f(\text{frumos}) = f + r + u + m + o + s = 7 + 19 + 24 + 15 + 17 + 20$$

Am definit astfel o funcție f a mulțimii cuvintelor în ω_0.
Această funcție este o aplicație *în*? o aplicație *pe*?
Ce valoare atribuie această funcție prenumelui tău? Dar numelui tău de familie?
Calculați f (București) și f (Maria).
De ce avem

$$f(\text{acid}) = f(\text{Daci})$$
$$f(\text{senin}) = f(\text{ninse})$$

Scanned with OKEN Scanner

5 — ADUNARE ȘI ORDINE

— Luați un număr natural și notați-l cu a.

Eu iau un număr natural și-l notez cu b.

Care dintre cele trei numere: a, b, $a + b$ este mai mare?

— $a + b$

— Scrieți formulele care exprimă că $a + b$ este mai mare decît a și decît b

$$a \leqslant a + b$$
$$b \leqslant a + b$$

— A trebuit să se pună $\leqslant$ și nu $<$ în prima formulă, deoarece se putea să fi luat $b = 0$.

A trebuit să se pună $\leqslant$ și nu $<$ în a doua formulă, deoarece se putea să fi luat $a = 0$.

Dar acest lucru nu justifică complet formulele $a \leqslant a + b$, $b \leqslant a + b$.

Să arătăm deci că dacă fiecare din literele a, b indică un număr natural întreg, avem totdeauna $a \leqslant a + b$.

În acest scop să considerăm mulțimile A și B astfel încît

$$a = \#\,A, \qquad b = \#\,B, \qquad A \cap B = \varnothing$$

Știm atunci cum să realizăm $a + b$

— $$a + b = \#\,(A \cup B)$$

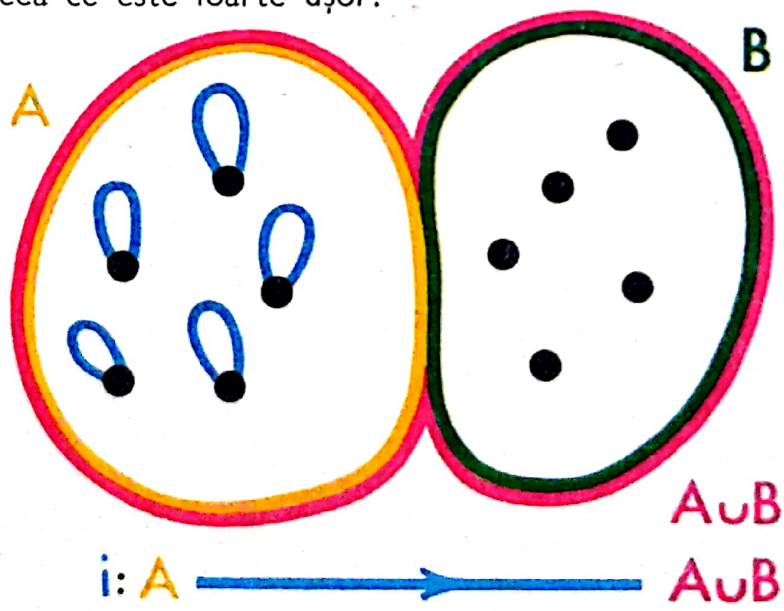
— Formula care trebuie să fie dovedită $a \leqslant a + b$ mai poate fi scrisă

$$\#A \leqslant \#\,(A \cup B)$$

Cînd scriem $\#\,E \leqslant \#\,F$?

— Cînd există o aplicație a mulțimii E *în* mulțimea F, $E \to F$.

— Trebuie să arătăm deci că există o aplicație a mulțimii A *în* mulțimea $A \cup B$, $A \to A \cup B$, ceea ce este foarte ușor.



APLICAȚIE *ÎN* GRAFICUL 132

Să enunțăm rezultatul.

LEMA 4 — *Dacă fiecare din literele* a, b *indică un număr natural întreg, avem formulele*

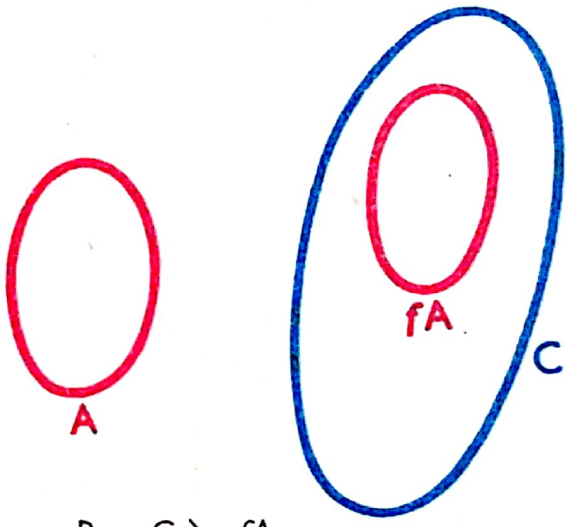
$$a \leqslant a + b$$
$$b \leqslant a + b$$

LEMA 5 — *Dacă* a, c *indică numere cardinale,* $a \leqslant c \Rightarrow$ *există un număr cardinal* b *astfel încît* $c = a + b$.

DEMONSTRAȚIE: Să construim mulțimile A și C disjuncte astfel încît

$$a = \# A \text{ și } c = \# C$$

Deoarece $\# A \leqslant \# C$, există o aplicație a mulțimii A *în* mulțimea C, $f: A \to C$. Această aplicație este de asemenea o aplicație biunivocă $f: A \to fA$



Să luăm $B = C \setminus fA$

Avem $C = (fA) \cup B$ și $(fA) \cap B = \varnothing$

Deci

$$\begin{aligned} c = \# C &= \# fA + \# B \\ &= \# A + \# B \qquad \text{deoarece } \# A = \# fA \\ &= a + \# B \qquad \text{deoarece } a = \# A. \end{aligned}$$

Este suficient deci să luăm $b = \# B$

Ceea ce trebuia să demonstrăm

— Să reunim lemele 4 și 5 într-o teoremă unică.

TEOREMA 2 — **Dacă fiecare din literele** a, c **indică un număr cardinal,** $a \leqslant c \iff$ **există un număr cardinal** b, **astfel încît** $c = a + b$.

Acum este ușor să stabilim importanta.

LEMA 6 — Dacă *a, b, c indică numere cardinale*

$$a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$$

DEMONSTRAȚIE: Pe baza teoremei 2

$a \leqslant b \Rightarrow$ există un număr cardinal x, astfel încît $b = a + x$

Deci

$$\begin{aligned} b + c &= a + x + c \\ &= (a + c) + x \end{aligned}$$

Există deci un număr cardinal x astfel încît $b + c = (a + c) + x$.

Teorema 2 ne permite să tragem concluzia

$$a + c \leqslant b + c$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

— Să arătăm în sfîrșit că « putem aduna membru cu membru formulele »

$$a \leqslant b \text{ și } c \leqslant d$$

TEOREMA 3 — **Dacă *a, b, c, d* indică numere cardinale**

$$a \leqslant b \text{ și } c \leqslant d \Rightarrow a + c \leqslant b + d$$

Ca urmare a lemei 6,

$$a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c \qquad (1)$$

Ca urmare a lemei 6,

$$c \leqslant d \Rightarrow c + b \leqslant d + b$$

sau, ținînd seama de comutativitatea $+$

$$c \leqslant d \Rightarrow b + c \leqslant b + d \qquad (2)$$

Ca urmare a tranzitivității relației $\leqslant$ din formulele (1) și (2) deducem

$$a + c \leqslant b + d$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

6 — SIMPLIFICABILITATEA ADUNĂRII NUMERELOR NATURALE

Fără îndoială, veți admite fără greutate că dacă fiecare din literele a, b, c indică un număr natural

$$a + b = a + c \Rightarrow b = c$$

În măsura în care vă interesează, vom stabili această teoremă, a cărei demonstrație este foarte dificilă.

TEOREMA 4 — **Dacă fiecare din literele a, b, c indică un număr natural**

$$a + b = a + c \Rightarrow b = c$$

DEMONSTRAȚIE: Fie a, b, c trei numere naturale astfel încît

$$a + b = a + c \tag{1}$$

Vom stabilit că $b = c$.

Fie A, B, C mulțimi **disjuncte două cîte două** și astfel încît

$$a = \# A, \quad b = \# B, \quad c = \# C$$

Formula (1) are ca rezultat

$$A \cup B \# A \cup C \tag{2}$$

Avem una și numai una din cele trei eventualități

1. $b < c$ 2. $b = c$ 3. $c < b$

Să începem prin a dovedi că prima eventualitate este imposibilă.

Dacă $b < c$, există o aplicație a mulțimii B *în* mulțimea C

$$f: B \to C$$

și aceasta trebuie să fie astfel încît

$$fB \neq C$$

(fără de care f ar fi o aplicație biunivocă $B \to C$ și am avea $b = c$).

Deoarece f este o aplicație biunivocă $f: B \to fB$, avem

$$A \cup B \# A \cup fB \tag{3}$$

Deoarece $fB \subset C$, avem $A \cup fB \subset A \cup C$ (4)

Știm însă că

$$A \cup C \# A \cup B \tag{1}$$

Astfel, ținînd seama de (1) și (3)

$$A \cup C \# A \cup B \# A \cup fB$$

Tranzitivitatea lui $\#$ are deci ca rezultat

$$A \cup C \# A \cup fB,$$

iar mulțimea finită $A \cup C$ ar fi echipotentă cu partea sa proprie $A \cup fB$, ceea ce este imposibil ca urmare a teoremei lui Dedekind (Teorema 2 din cap. 16).

Stabilim în același fel că eventualitatea 3 este imposibilă.

Deci $b = c$.

Ceea ce trebuia demonstrat.

Scanned with OKEN Scanner

18

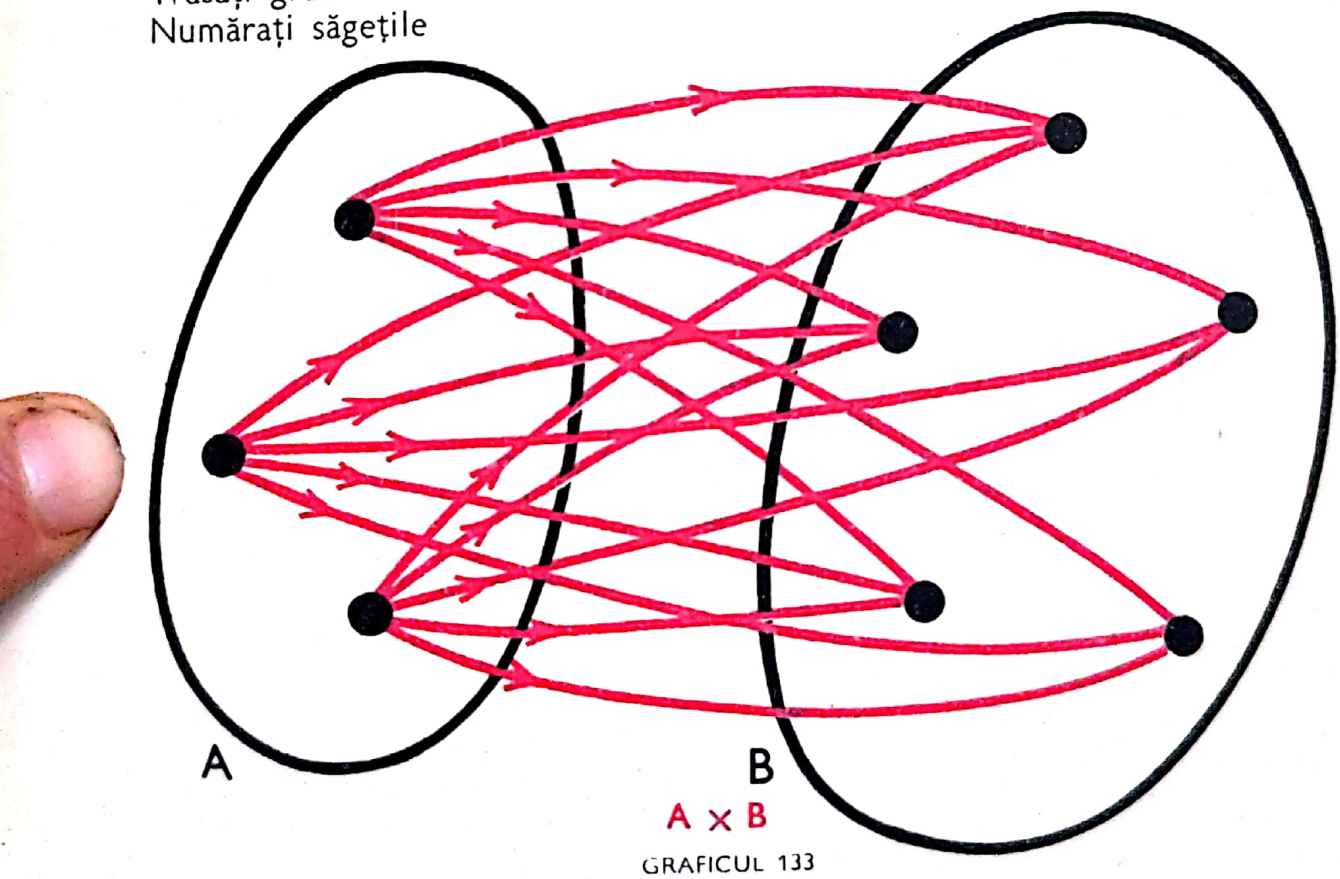
Înmulţirea

1 — DEFINIŢIA ÎNMULŢIRII

— Desenaţi o mulţime A cu un număr cardinal 3 şi o mulţime B cu un număr cardinal 5.

Trasaţi graficul A × B

Număraţi săgeţile



GRAFICUL 133

— Acest grafic conţine 15 = 3.5 săgeţi.

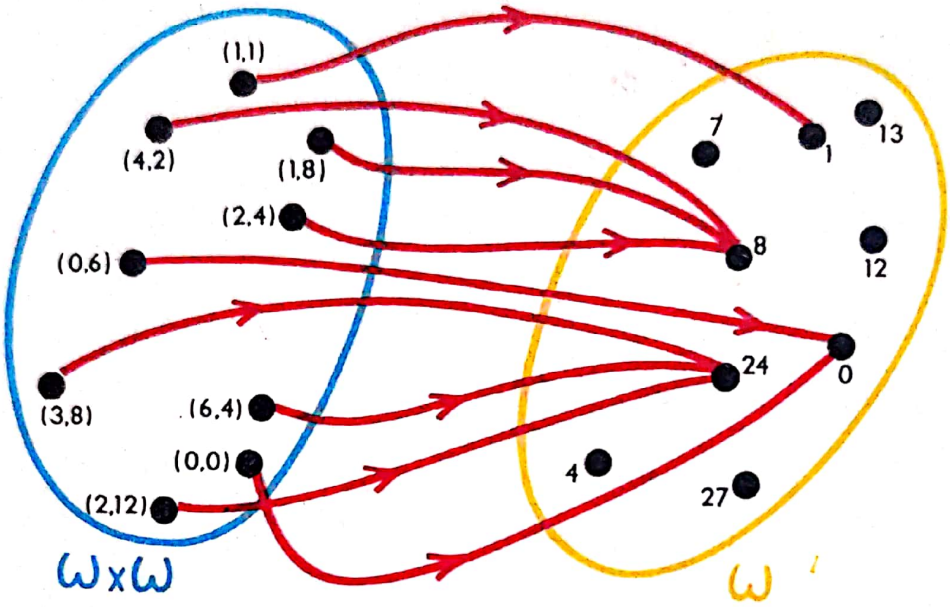
— Să definim cu îndrăzneală.

DEFINIŢIA 1 — ***Produsul*** *numerelor cardinale ale mulţimilor* **A** *şi* **B** este numărul *cardinal al mulţimii* **A × B**.

$$\#A \cdot \#B = \#(A \times B)$$

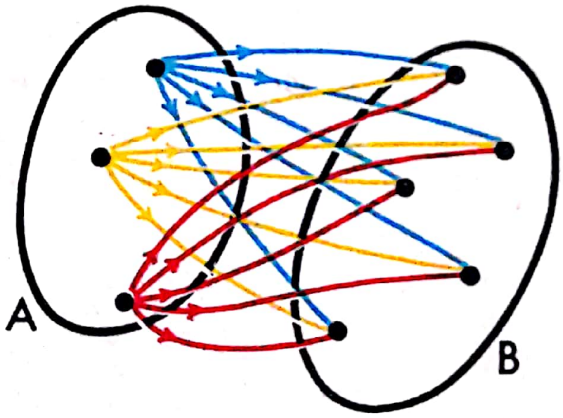
Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 2 — *Înmulțirea este funcția care aplică orice pereche de numere naturale pe produsul lor.*



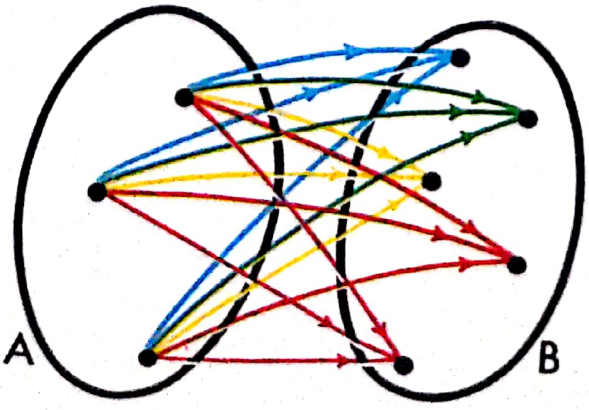
ÎNMULȚIREA: $\omega \times \omega \to \omega : (x, y) \to x \cdot y$

GRAFICUL 134

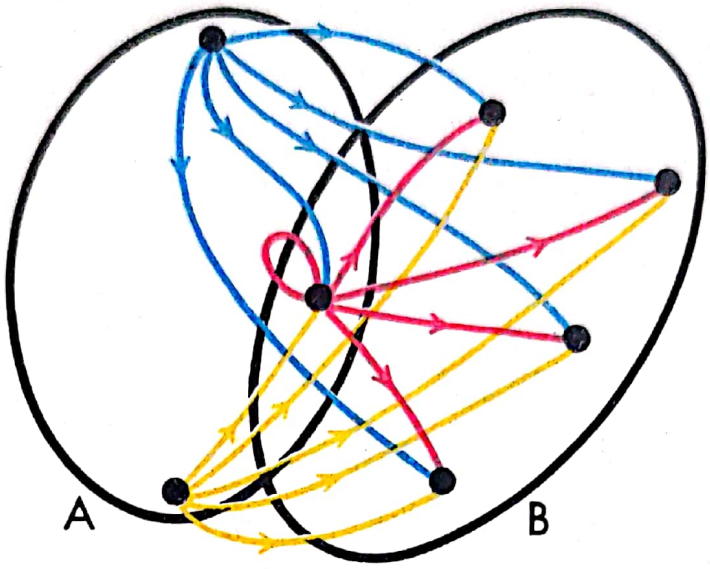


GRAFICUL 135

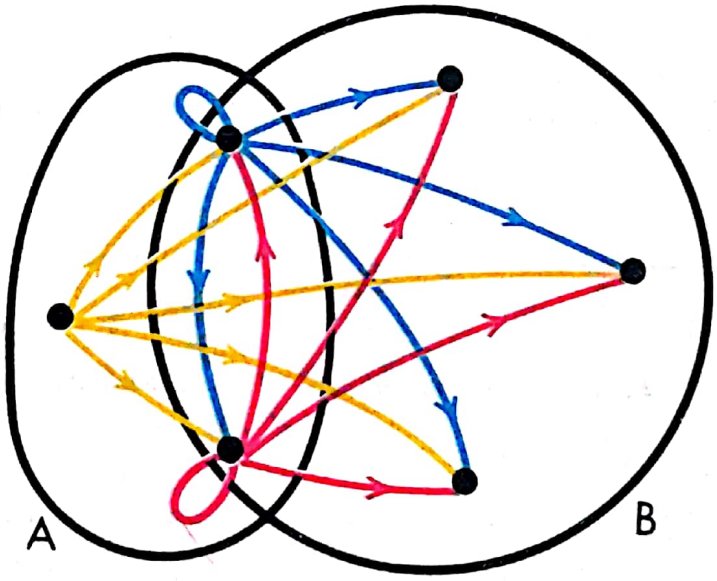
Din fiecare punct A pleacă atîtea săgeți ale lui $A \times B$ cîte elemente sînt în B și în orice punct al lui B ajung atîtea săgeți ale lui $A \times B$ cîte elemente sînt în A.



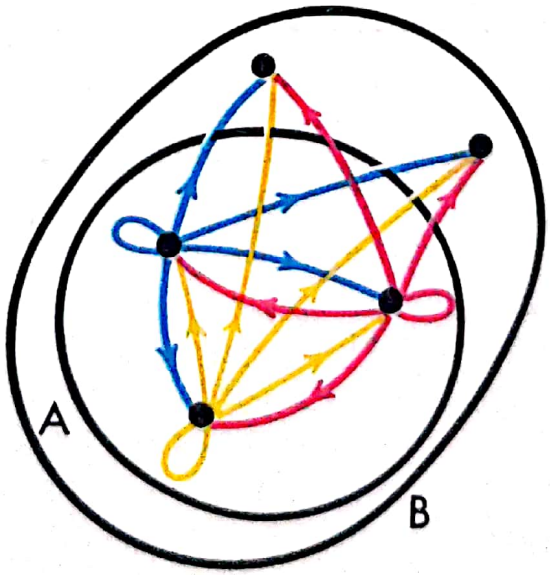
GRAFICUL 136



GRAFICUL 137



GRAFICUL 138



GRAFICUL 139

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a realiza produsul a două numere naturale a, b, se constituie mulțimi A, B, astfel încît $a = \#A$ și $b = \#B$; numărul cardinal al lui $A \times B$ este deci produsul lui $a.b$.

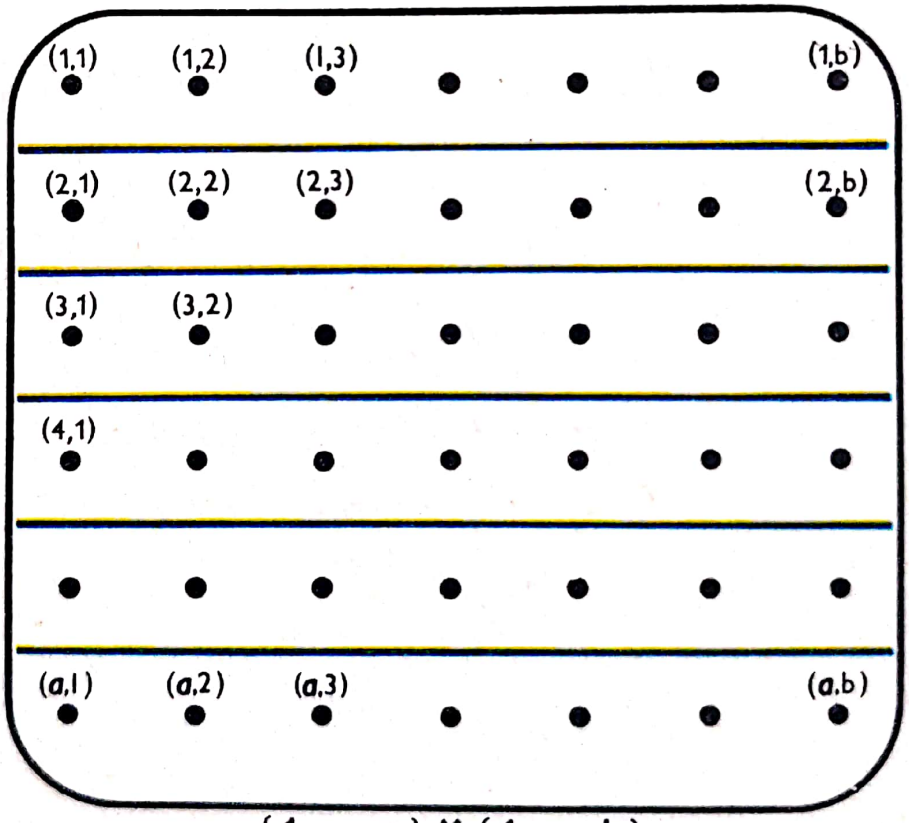
Dacă $a = \#A$ și $b = \#B$	Atunci $a \cdot b = \#(A \times B)$

Întrucît $a = \#\{1,2,\ldots a\}$ și $b = \#\{1,2,\ldots b\}$

$$a \cdot b = \#(\{1,2,\ldots a\} \times \{1,2,\ldots b\}) = \#\left\{\begin{array}{c}(1,1),\ldots(1,b),\\(2,1),\ldots(2,b),\\\ldots\ldots\ldots\ldots\\(a,1),\ldots(a,b).\end{array}\right\}$$

De exemplu

$$4\cdot 7 = \#\left\{\begin{array}{l}(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),\ (1,7)\\(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6),\ (2,7),\\(3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\ (3,7),\\(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),\ (4,7).\end{array}\right\}$$



$\{1, \ldots, a\} \times \{1, \ldots, b\}$

Desenul de mai sus sugerează o partiție a produsului

$$\{1,\cdots, a\} \times \{1,\cdots, b\}$$

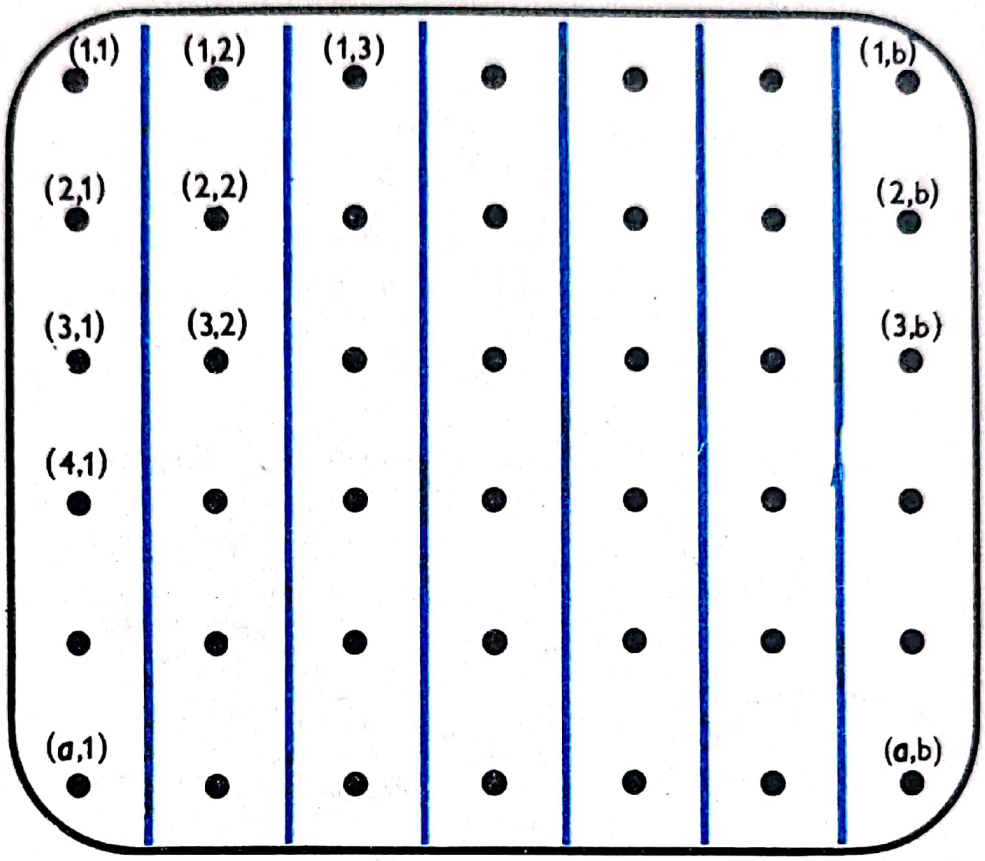
în a părți care fiecare are ca număr cardinal pe b.

Deci

$$a\cdot b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a \text{ termeni}}$$

— Ați putea să dați o altă partiție interesantă a produsului

$$\{1, \ldots, a\} \times \{1, \ldots, b\}?$$



$$\{1, \ldots, a\} \times \{1, \ldots, b\}$$

— Acest desen sugerează o partiție a produsului $\{1, \ldots, a\} \times \{1, \ldots, b\}$ în b părți cu număr cardinal a.

Deci

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ termeni}}$$

Înmulțirea numerelor naturale întregi înseamnă o adunare de termeni egali.

$$a \cdot b = \underbrace{b + \ldots + b}_{a \text{ termeni}} = \underbrace{a + \ldots + a}_{b \text{ termeni}}$$

2 — ROLUL LUI 0 ȘI AL LUI 1 ÎN RAPORT CU ÎNMULȚIREA

LEMA 1 — *Pentru orice număr a natural*

$$0 \cdot a = 0 = a \cdot 0 \quad \text{și} \quad 1 \cdot a = a = a \cdot 1$$

Acest lucru se exprimă spunînd că

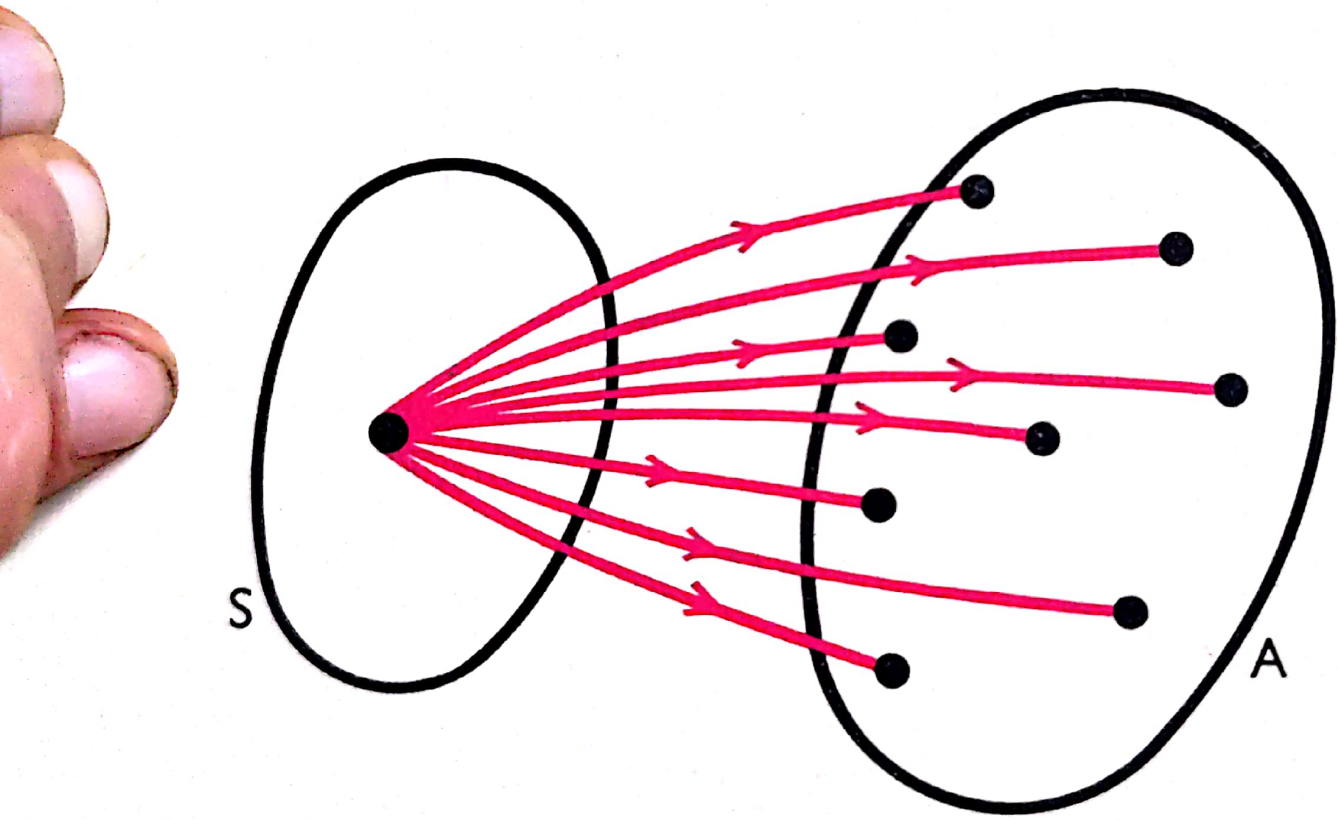
1 este **neutru** *pentru înmulțire*
0 este **absorbant** *pentru înmulțire*

DEMONSTRAȚIE: Fie A o mulțime astfel încît $a = \#A$,

Deci $0 \cdot a = \#\varnothing \cdot \#A = \#(\varnothing \times A) = \#\varnothing = 0$
$a \cdot 0 = \#A \cdot \#\varnothing = \#(A \times \varnothing) = \#\varnothing = 0$

Pe de altă parte, numărul 1 este numărul cardinal al oricărei mulțimi cu un singur element.

Produsul dintre mulțimea cu un singur element S și mulțimea A este echipotent cu A.



$\#(S \times A) = \#A$

GRAFICUL 140

Veți arăta de asemenea că $\#(A \times S) = \#A$ (Este suficient să întoarceți săgețile din graficul 140).

Deci, $1 \cdot a = \#S \cdot \#A = \#(S \times A) = \#A = a$
$a \cdot 1 = \#A \cdot \#S = \#(A \times S) = \#A = a$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

Scanned with OKEN Scanner

3 — COMUTATIVITATEA ÎNMULȚIRII

LEMA 2 — **Dacă** *fiecare din literele* a, b *indică un număr natural*

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Pe baza lemei 1, formula $a \cdot b = b \cdot a$ este adevărată dacă a sau b sînt egale cu 0 sau 1. De acum înainte, putem presupune deci, că $a, b \in \{2,3,4, \ldots\}$

Iată două demonstrații. Prima utilizează graficele, iar a doua se bazează pe formulele care reduc înmulțirea la o adunare de termeni egali.

PRIMA DEMONSTRAȚIE:

Pentru a realiza $a \cdot b$ constituim mulțimi A, B astfel încît $a = \#A$, $b = \#B$. Avem deci

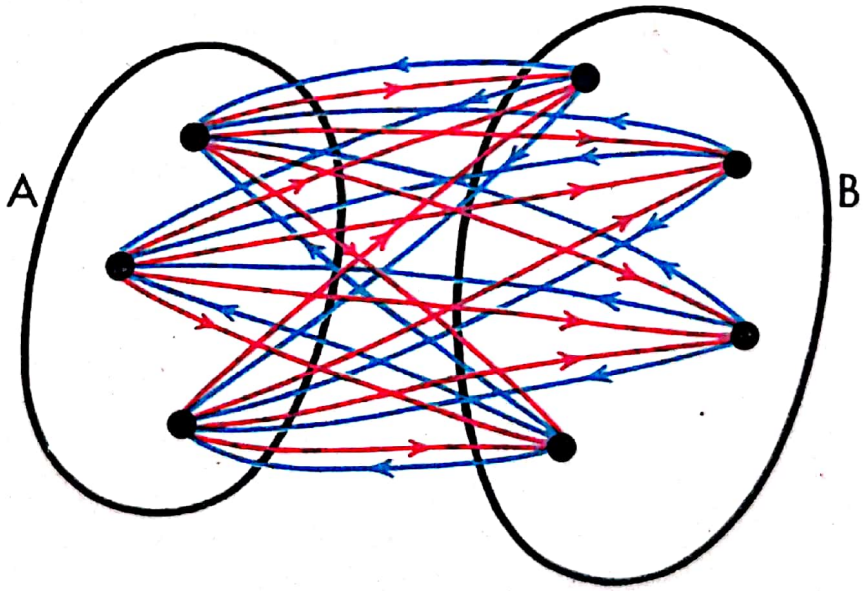
$$a \cdot b = \#(A \times B), \quad b \cdot a = \#(B \times A)$$

Dacă $A \neq B$ $\quad A \times B \neq B \times A$.

Trebuie să arătăm că avem totuși $\#(A \times B) = \#(B \times A)$.

— Cum să trecem de la $A \times B$ la $B \times A$?

— Întorcînd săgețile.



$A \times B \neq B \times A$

Aplicație biunivocă: $A \times B \to B \times A$: $(x, y) \to (y, x)$

GRAFICUL 141

Deci $a \cdot b = \#(A \times B) = \#(B \times A) = b \cdot a$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

Scanned with OKEN Scanner

A DOUA DEMONSTRAȚIE: Am văzut că dacă fiecare dintre literele a, b indică un număr natural

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a \text{ termeni}} = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ termeni}}$$

Scrieți formulele analoge pentru produsul $b \cdot a$

$$b \cdot a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ termeni}} = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a \text{ termeni}}$$

Deci $a \cdot b = b \cdot a$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

4 — ASOCIATIVITATEA ÎNMULȚIRII

LEMA 3 — *Dacă fiecare din literele* $\boldsymbol{a, b, c}$ *indică un număr natural, atunci*

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Veți verifica imediat că această formulă este adevărată, dacă una din literele $\boldsymbol{a, b, c}$ înseamnă 0. De acum înainte vom presupune că a, b, c sînt nenule.

PRIMA DEMONSTRAȚIE: Pentru a realiza $(a \cdot b) \cdot c$ și $a \cdot (b \cdot c)$, constituim mulțimi A, B, C ,astfel încît

$$a = \# A, b = \# B, c = \# C.$$

Avem

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \# (A \times B) \\ (a \cdot b) \cdot c &= \# ((A \times B) \times C) \\ b \cdot c &= \# (B \times C) \\ a \cdot (b \cdot c) &= \# (A \times (B \times C)) \end{aligned}$$

Trebuie să dovedim că $\# ((A \times B) \times C) = \# (A \times (B \times C))$ și deci să arătăm că există o aplicație biunivocă $(A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$

Iată o astfel de aplicație biunivocă:

$$(A \times B) \times C \to A \times (B \times C) : ((a,b),c) \to (a, (b, c))$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

Scanned with OKEN Scanner

A DOUA DEMONSTRAȚIE: Știm că fiecare din literele x, y indică un număr natural nenul,

$$x \cdot y = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{y \text{ termeni}} = \underbrace{y + y + \ldots + y}_{x \text{ termeni}}$$

Deci,

$$(a \cdot b) \cdot c = \underbrace{(a \cdot b) + (a \cdot b) + \ldots + (a \cdot b)}_{c \text{ termeni}}$$

Fiecare din produsele $a \cdot b$ este suma a a termeni egali cu b, de unde

$$(a \cdot b) \cdot c = \underbrace{\overbrace{(b + \ldots + b)}^{a \text{ termeni}} + \overbrace{(b + \ldots + b)}^{a \text{ termeni}} + \ldots + \overbrace{(b + \ldots + b)}^{a \text{ termeni}}}_{c \text{ paranteze}}$$

$$= \underbrace{b + b + \ldots\ldots\ldots + b}_{a \cdot c \text{ termeni}}$$

De asemenea

$$a \cdot (b \cdot c) = \underbrace{(b \cdot c) + \ldots\ldots\ldots + (b \cdot c)}_{a \text{ termeni}}$$

$$= \underbrace{\overbrace{(b + \ldots + b)}^{c \text{ termeni}} + \overbrace{(b + \ldots + b)}^{c \text{ termeni}} + \ldots + \overbrace{(b + \ldots + b)}^{c \text{ termeni}}}_{a \text{ paranteze}}$$

$$= \underbrace{b + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b}_{a \cdot c \text{ termeni}}$$

Deci, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

Scanned with OKEN Scanner

5 — ÎNMULȚIREA ESTE DISTRIBUTIVĂ FAȚĂ DE ADUNARE

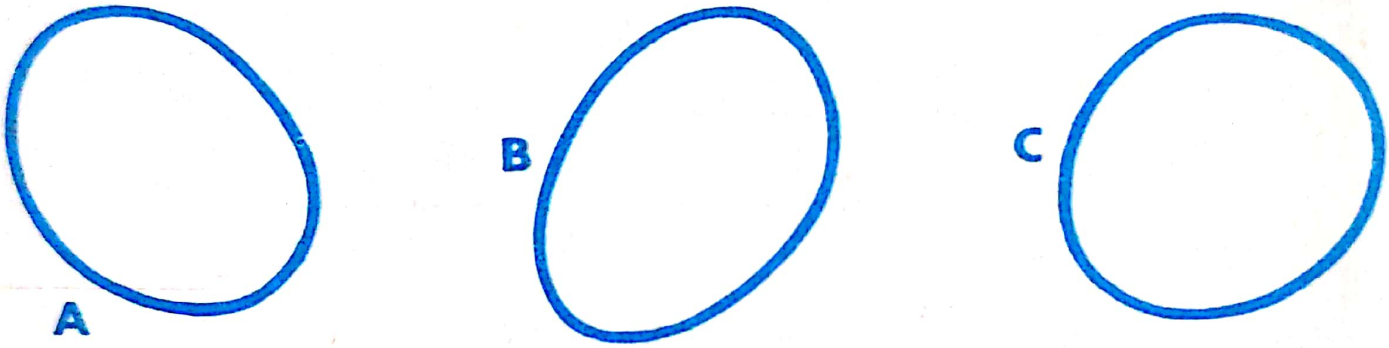
LEMA 4 — *Înmulțirea este distributivă în raport cu adunarea.*

Cu alte cuvinte:

Dacă fiecare din literele a, b, c indică un număr natural

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

PRIMA DEMONSTRAȚIE: Fie a, b, c trei numere cardinale și A, B, C trei mulțimi *disjuncte două cîte două*, astfel încît $a = \# A$, $b = \# B$, $c = \# C$.



Deci,

$$\begin{aligned} b + c &= \#(B \cup C) \qquad (\ldots \text{deoarece } B \cap C = \varnothing) \\ a \cdot (b + c) &= \#(A \times (B \cup C)) \\ a \cdot b &= \#(A \times B) \\ a \cdot c &= \#(A \times C) \end{aligned}$$

Deoarece $B \cap C = \varnothing$, avem de asemenea $(A \times B) \cap (A \times C) = \varnothing$

Deci,

$$(a \cdot b) + (a \cdot c) = \#((A \times B) \cup (A \times C))$$

Știm însă că produsul $\times$ al mulțimilor este distributiv în raport cu $\cup$. (Cap. 7, paragr. 11, pag. 111).

Deci

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

și

$$a \cdot (b + c) = \#(A \times (B \cup C)) = \#((A \times B) \cup (A \times C)) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

Scanned with OKEN Scanner

A doua demonstrație: Fie a, b, c numere naturale.

Știm că

$$a\cdot(b+c) = \underbrace{(b+c)+(b+c)+\ldots\ldots\ldots+(b+c)}_{a \text{ termeni}}$$

Pe baza proprietăților de asociativitate și de comutativitate a adunării

$$a\cdot(b+c) = \underbrace{(b+c)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(b+c)}_{a \text{ termeni}}$$

$$= \underbrace{(b+b+\ldots+b)}_{a \text{ termeni}} + \underbrace{(c+c+\ldots+c)}_{a \text{ termeni}}$$

$$= (a\cdot b) + (a\cdot c)$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

6 — ÎNMULȚIREA ȘI ORDINEA

LEMA 5 — *Dacă* a, b, c *indică numere naturale, atunci*

$$a \leqslant b \Rightarrow a\cdot c \leqslant b\cdot c$$

Prima demonstrație: Fie A, B, C mulțimi, astfel încît $a = \#A$, $b = \#B$, $c = \#C$.

Deci

$$a\cdot c = \#(A \times C), \quad b\cdot c = \#(B \times C)$$

Deoarece $a \leqslant b$, există o aplicație a mulțimii A *în* mulțimea B, $f: A \to B$.

Aplicația

$$A \times C \to B \times C : (a, c) \to (f(a), c)$$

este o aplicație a mulțimii $A \times C$ *în* mulțimea $B \times C$: $A \times C \to B \times C$.

Deci

$$a\cdot c \leqslant b\cdot c$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

Scanned with OKEN Scanner

A DOUA DEMONSTRAȚIE: Deoarece $a \leqslant b$, există (cap. 17, teorema 2, pag. 267) un număr natural x astfel încît

$$b = a + x$$

Distributivitatea înmulțirii în raport cu adunarea are ca rezultat

$$\begin{aligned} b \cdot c &= (a + x) \cdot c \\ &= (a \cdot c) + (x \cdot c) \end{aligned}$$

Deci

$$a \cdot c \leqslant b \cdot c$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

TEOREMA 1 — **Înmulțirea numerelor naturale întregi este asociativă, comutativă, distributivă în raport cu adunarea.**

Ea admite 1 ca număr neutru și 0 ca număr absorbant:

Pentru orice număr natural n: $1 \cdot n = n$ și $0 \cdot n = 0$.

Ordinea $\leqslant$ este compatibilă cu înmulțirea:

$$a, b, c, d \in \omega,\ a \leqslant b, c \leqslant d \Rightarrow a \cdot c \leqslant b \cdot d$$

Prima parte a acestei teoreme recapitulează rezultatele obținute mai înainte.

Rămîne să demonstrăm numai că

$$a, b, c, d \in \omega, a \leqslant b, c \leqslant d \Rightarrow a \cdot c \leqslant b \cdot d$$

DEMONSTRAȚIE: Pe baza lemei 5,

$$a \leqslant b \Rightarrow a \cdot c \leqslant b \cdot c \qquad (1)$$

De asemenea (înmulțirea este comutativă !),

$$c \leqslant d \Rightarrow b \cdot c \leqslant b \cdot d \qquad (2)$$

Ca urmare a tranzitivității relației $\leqslant$, formulele (1) și (2) au ca rezultat

$$a \cdot c \leqslant b \cdot c \leqslant b \cdot d \Rightarrow a \cdot c \leqslant b \cdot d$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

Scanned with OKEN Scanner

7 — DIVIZIBILITATE

Fie a, b numere naturale întregi. (Deci $a, b \in \omega$).

Dacă există un număr natural x astfel încît $b = a \cdot x$, spunem că ***a divide pe b*** și scriem $a \mid b$.

LEMA 6 — *Pentru orice număr natural întreg* n:

$$1 \mid n \mid n \mid 0$$

Formula $n = 1.n$ arată că $1 \mid n$ și că $n \mid n$ ceea ce se scrie pe scurt: $1 \mid n \mid n$.

Formula $0 = n \cdot 0$ arată că $n \mid 0$.

Să repetăm lema precedentă sub altă formă

> LEMA 6 — *Numărul* ***unu*** *divide toate numerele naturale.*
> **Orice număr natural divide pe zero.**

LEMA 7 — $(a \in \omega$ și $0 \mid a \Rightarrow a = 0)$

Cu alte cuvinte, *zero este singurul număr divizibil cu zero.*

DEMONSTRAȚIE: Dacă $0 \mid a$, există $x \in \omega$ astfel încît

$$a = x \cdot 0 \quad \text{și deci} \quad a = 0$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

LEMA 8 — *Relația* $\mid$ *este reflexivă.*

Care este teorema în care această afirmație a fost demonstrată mai înainte?

LEMA 9 — *Relația* $\mid$ *este tranzitivă.*

Cu alte cuvinte:

$$(a, b, c \in \omega \quad \text{și} \quad a \mid b \mid c) \Rightarrow a \mid c$$

DEMONSTRAȚIE: Deoarece $a \mid b$, există $x \in \omega$ astfel încît $b = a \cdot x$.

Deoarece $b \mid c$, există $y \in \omega$ astfel încît $c = b \cdot y$.

Deci

$$c = b \cdot y = (a \cdot x) \cdot y = a \cdot (x \cdot y)$$

ceea ce arată că $a \mid c$.

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

Scanned with OKEN Scanner

LEMA 10 — *Relația* $|$, *definită în* ω_0, *este inclusă în relația* $\leqslant$.
Cu alte cuvinte,

$$a, b \in \omega_0 \text{ și } a \mid b \Rightarrow a \leqslant b$$

DEMONSTRAȚIE: Dacă $a \mid b$ există $x \in \omega_0$ astfel încît

$$b = x \cdot a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{x \text{ termeni}}$$

Deci $a \leqslant b$.

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

LEMA 11 — *Relația* $|$, *definită în* ω_0, *este antisimetrică*.
Cu alte cuvinte,

$$a, b \in \omega_0,\ a \mid b \mid a \Rightarrow a = b$$

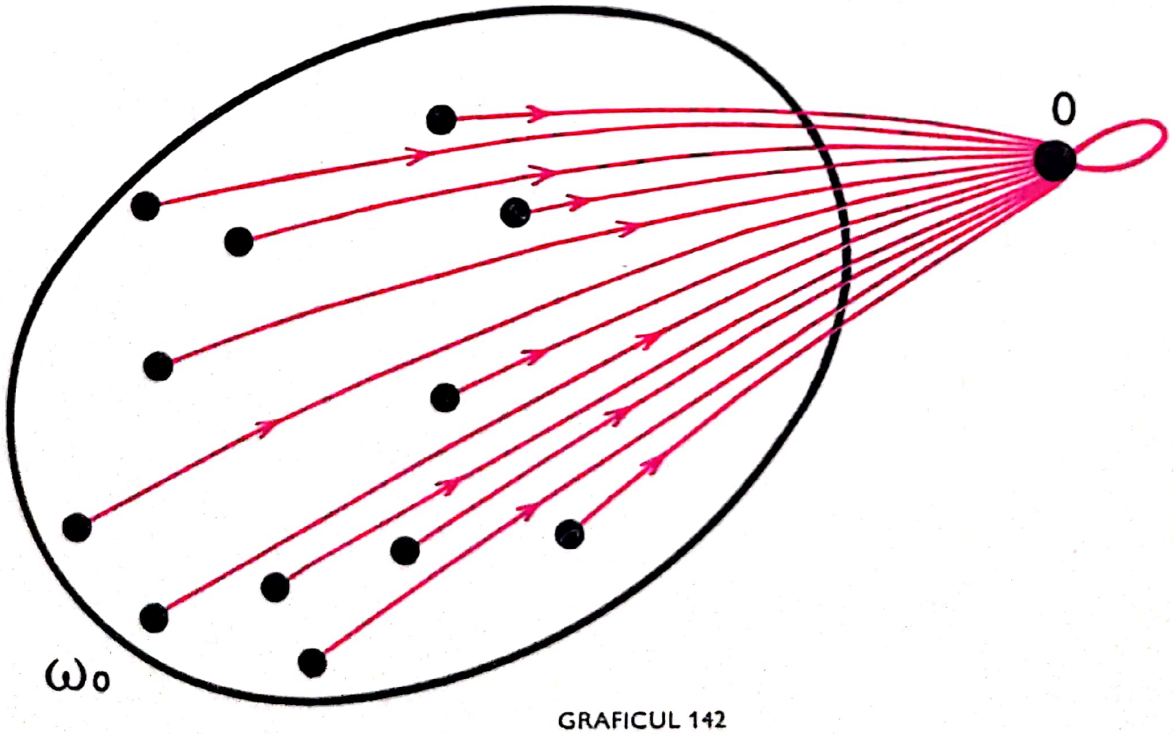
DEMONSTRAȚIE: Pe baza lemei 10,

$$a \mid b \mid a \Rightarrow a \leqslant b \leqslant a$$

Antisimetria relației $\leqslant$ are ca rezultat $a = b$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

LEMA 12 — *Relația* $|$ *definită în* ω *este antisimetrică*.
Închipuiți-vă graficul relației $|$ în ω_0.
— Ce să facem ca să obținem graficul relației $|$ în ω?
— Să adăugăm punctul zero, să desenăm o săgeată din orice punct al mulțimii ω spre zero. (Astfel zero capătă o buclă).



GRAFICUL 142
UNELE DIN NOILE SĂGEȚI ALE GRAFICULUI RELAȚIEI |

Scanned with OKEN Scanner

Toate săgeţile noi ajung deci în zero şi întrucît n-am creat nici un dus-întors între punctele distincte, relaţia $|$ în ω este antisimetrică.

TEOREMA 2 — **Relaţia $|$ definită în ω este o ordine netotală.**

Lemele 8, 9, 12 permit să se afirme că $|$ este o ordine în ω. Această ordine este netotală deoarece 2 nu divide pe 3, iar 3 nu divide pe 2.

TEOREMA 3 — **Ordinea $|$ este compatibilă cu înmulţirea.**

Cu alte cuvinte

$$(a, b, c, d \in \omega,\ a \mid b, c \mid d) \Rightarrow a \cdot c \mid b \cdot d)$$

DEMONSTRAŢIE: Deoarece $a \mid b$ există $x \in \omega$ astfel încît

$$b = a \cdot x$$

Deoarece $c \mid d$, există $y \in \omega$ astfel încît

$$d = c \cdot y$$

Deci $$b \cdot d = (a \cdot c) \cdot (x \cdot y)$$

ceea ce arată că $(a \cdot c) \mid (b \cdot d)$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

TEOREMA 4 — **Dacă un număr natural divide două numere naturale, el divide suma lor.**

Cu alte cuvinte,

$$(a, b, c \in \omega,\ a \mid b,\ a \mid c) \Rightarrow a \mid (b + c)$$

DEMONSTRAŢIE: Deoarece $a \mid b$, există $x \in \omega$, astfel încît

$$b = a \cdot x$$

Deoarece a $\mid c$, există $y \in \omega$, astfel încît

$$c = a \cdot y$$

Deci

$$b + c = a \cdot x + a \cdot y = a \cdot (x + y)$$

ceea ce arată că $a \mid (b + c)$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

EXERCIŢII

1. Ne vom distra scriind toate « cuvintele» de două litere, fie că au sens sau nu

$$aa,\ ab,\ ac, \ldots,\ ba,\ bb,\ bc, \ldots,\ zz.$$

Cîte « cuvinte» de cîte două litere putem forma?

2. Cîte cuvinte de patru litere, care să înceapă şi să se termine cu o vocală, iar la mijloc să aibă 2 consoane, putem forma?

3. Cîte cuvinte de trei litere putem forma care să înceapă cu o vocală și să se termine cu o consoană?

4. Cîte numere cu 2 cifre există în sistemul zecimal?
(Să amintim că nici un număr din 2 cifre nu începe cu 0).
Cîte numere cu o cifră există?
Cîte numere cu 3 cifre?
Cîte numere cu cel mult 3 cifre? (adică 3 cifre sau mai puțin de 3 cifre)?

În exercițiile 5—31 *fiecare literă indică un număr natural.*

5. $(a+b)\cdot(c+d) = ((a+b)\cdot c) + ((a+b)\cdot d)$
$= (a\cdot c) + (b\cdot c) + (a\cdot d) + (b\cdot d)$
Arătați exactitatea egalităților de mai sus.

CONVENȚIE DE SCRIERE

Se obișnuiește să se scrie:

$ac + bc + ad + bd$ pentru $(a\cdot c) + (b\cdot c) + (a\cdot d) + (b\cdot d)$

$(a+b)\,(c+d)$ pentru $(a+b)\cdot(c+d)$

Astfel formula precedentă se va scrie:

$$(a+b)\,(c+d) = ac + bc + ad + bd$$

Vom adopta totdeauna această convenție, fără mențiune specială.

6. $(1+x)\,(1+y) = 1 + x + y + xy$.

7. $(a+b+c)\,(x+y) =$

8. $(u+v+w)\,(x+y+z) =$

9. $(1+x+y)\,(1+u+v) =$

Scanned with OKEN Scanner

10. $a\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b$
$= a^2 + ab$.
Arătaţi exactitatea primului rînd.
La al doilea rînd am introdus importanta convenţie de scriere

$$\boxed{a^2 = a\cdot a}$$

Spunem că a^2 este **pătratul** lui a.

11. $(x+y)\cdot y =$

12. $(1+x)\cdot(1+2x) =$

13. $ab\,(1+c) =$

14. $x^2\,(1+x) = x^2 + x^2\cdot x$
$= x^2 + x^3$
Arătaţi exactitatea primului rînd.
La al doilea rînd, am introdus convenţia de scriere

$$\boxed{x^3 = x\cdot x\cdot x}$$

Spunem că x^3 este **cubul** lui x.

15. Spuneţi ce trebuie să înţelegem prin x^4, x^5, x^{17}?
x^4 este a patra putere a lui x: $x^4 = x\cdot x\cdot x\cdot x$

16.
$$\begin{aligned}(1+x)\,(1+2x)\,(1+3x) &= (1+x)\,((1+2x)\,(1+3x))\\ &= (1+x)(1+5x+6x^2)\\ &= 1\,(1+5x+6x^2) + x\,(1+5x+6x^2)\\ &= 1+5x+6x^2 \;+x+5x^2+6x^3\\ &= 1+(5x+x)+(6x^2+5x^2)+6x^3\\ &= 1+6x+11x^2+6x^3.\end{aligned}$$

Explicaţi fiecare etapă a calculului de mai sus.

17. $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot(a+b) + b\cdot(a+b)$
$= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Arătaţi exactitatea fiecărei operaţii de mai sus.

18. Aplicînd formula de mai sus verificaţi egalitatea

$$11^2 = 121$$

$(11^2 = (10+1)^2 = 10^2 + 2\cdot 10\cdot 1 + 1^2)$.

Scanned with OKEN Scanner

19. Fie n un număr natural întreg.

Avem

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Astfel se trece de la n^2 la $(n+1)^2$ adăugînd $2n+1 = n + (n+1)$.

Această regulă se aplică la întocmirea tabelei pătratelor plecînd de la $0^2 = 0$.

$$\begin{aligned} 0^2 &= 0 \\ &+0+1 \\ 1^2 &= 1 \\ &+1+2 \\ 2^2 &= 4 \\ &+2+3 \\ 3^2 &= 9 \\ &+3+4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4^2 &= 16 \\ &+4+5 \\ 5^2 &= 25 \\ &+5+6 \\ 6^2 &= 36 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

20. Știind că $25^2 = 625$, găsiți imediat 26^2.

21. Dați lista patratelor de la 70^2 pînă la 80^2.

22. Priviți lista de la exercițiul 19.

Din ea scoatem

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+5+6 &= 6^2 \\ +1+2+3+4+5 & \end{aligned}$$

Deci

$$2(1+2+3+4+5+6) = 6^2 + 6 = 6(6+1) = 6 \cdot 7$$

De unde

$$1+2+3+4+5+6 = 21$$

Calculați de asemenea $1 + \ldots\ldots + 10$.

Și mai departe

$$1 + 2 + \ldots\ldots + 1000$$

23. $(a+2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$

$(2u+3a)^2 =$

24. $\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c) \\ &= a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c) \\ &= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$

25. $(2x+3y+5z)^2 =$

Scanned with OKEN Scanner

26. $(x+y)^3 = (x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$
$= (x+y)\cdot(x+y)^2$
$= (x+y)(x^2+2xy+y^2)$
$= x(x^2+2xy+y^2)+y(x^2+2xy+y^2)$
$= x^3+2x^2y+xy^2+yx^2+2xy^2+y^3$
$= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

27. $(a+2b)^3 =$

28. $(x+1)^3 =$

29. $(1+x)^3 =$

30. $(1+x+y)^3 =$

31. $(x+y+z)^3 =$

32. Scrieți pătratele primelor 30 de numere naturale.
Scrieți cuburile primelor 10 numere naturale.
Scrieți primele 10 puteri ale lui 2.

$$2^1 = 2\ ,\ 2^2 = 4\ ,\ 2^3 = 8\ ,\ 2^4 = \ldots,\ 2^{10} =$$

Scrieți primele 5 puteri succesive ale lui 3.

33. $10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1000$
...
$10^{12} = \ldots$
Enunțați regula!

34. Cîte funcții $\{1, 2\} \to \{a, b, c, \ldots, y, z\}$ există?

35. Cîte funcții $\{1, 2, 3\} \to \{a, b, c, \ldots, z\}$?

36. Cîte funcții $\{1, 2\} \to \{1, 2\}$?

37. Cîte funcții $\{a, b, c\} \to \{0, 1\}$? (Se presupune că $a \neq b \neq c \neq a$).

38. Cîte funcții $\{a, b, c, d\} \to \{0, 1\}$? (Elementele a, b, c, d fiind distincte două cîte două).

39. Dacă $a = \#A$, cîte funcții $A \to \{0, 1\}$ există?

Scanned with OKEN Scanner

40. Numărul părților lui A este egal cu numărul funcțiilor $A \to \{0, 1\}$.
Pentru orice $P \subset A$ se va pune $f_P(x) = 1$ dacă $x \in P$
și $f_P(x) = 0$ dacă $x \in A \setminus P$.

41. Numărul părților lui A este $2^{\#A}$.

42. Dacă $a = \# A$ și $b = \# B$, numărul funcțiilor $A \to B$ este b^a.

43. Dacă notăm cu B^A mulțimea funcțiilor $A \to B$:
$$\# (B^A) = (\# B)^{\# A}.$$

44. Numim *relație a lui A spre B* orice parte a lui $A \times B$.
Dacă $a = \# A$, $b = \# B$, care este numărul cardinal al lui $A \times B$?
Numărul relațiilor lui A spre B este $2^{a.b}$.

45. Dacă $n = \# E$, numărul relațiilor definite în E este $2^{(n^2)}$.

46. Există 512 relații definite într-o mulțime de 3 elemente.

47. Într-o mulțime de 4 persoane se pot defini 65 536 relații.

În exercițiile 48—55, *literele reprezintă numere naturale.*

48. $a^2 + ab + ac = a(a + b + c)$

49. $ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d)$
$= (a + b)(c + d)$

50. $ac + ad + ae + bc + bd + be =$

51. $ax + az + ay + bx + by + bz + cx + cy + cz =$

52. Pentru orice număr natural n
$$1 \mid 1 \mid n \mid n \mid 0 \mid 0$$

53. Dacă $a \mid b \mid c \mid d \mid e \mid f \mid g \mid h \mid k \mid l \mid m \mid n$ și $f = 0$
Ce concluzie trageți?

54. $(a + b) \mid (a^2 + 2ab + b^2)$

55. $(a + b) \mid (a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3)$

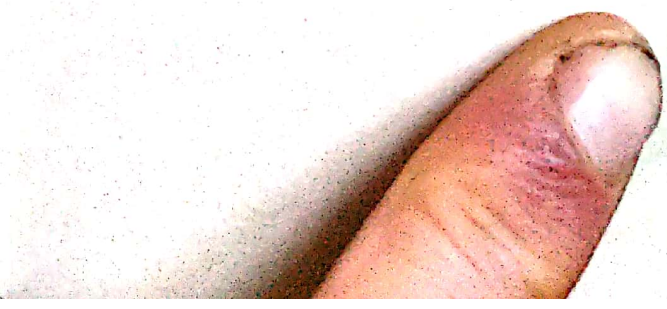
Scanned with OKEN Scanner

56. 7 | 392.

57. Vedeți o legătură între exercițiile 54, 55 și 56?

58. Completați tabelul de înmulțire de mai jos:

•	0	1	7	11	12	13	14	15	16	17	18	19	57
0													
1													
7												133	
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
57													



Scanned with OKEN Scanner

59. Completați tabelul de înmulțire de mai jos:

•	$a+x$	a	$b+c$	$1+a$	$a+b$	$1+x+y$	y	$a+b+x+y$	0
$a+x$									
a									
$b+c$		$ab+ac$							
$1+a$									
$a+b$									0
$1+x+y$									
y									
$a+b+x+y$									
0		0							

Scanned with OKEN Scanner

60. Dacă a este numărul cardinal al mulțimii A,

$$a^2 = \#(A \times A)$$
$$a^3 = \#(A \times A \times A)$$

Cum să definim pe $A \times A \times A$?

61. Dacă $a = \# A$, $b = \# B$, $c = \# C$

$$a \cdot b \cdot c = \#(A \times B \times C)$$

Cum să definim pe $A \times B \times C$?

62. Dacă $a, b \in \omega$

$$(a + b) \mid (a^2 + 2ab + b^2)$$
$$(a + b) \mid (a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 + a^2 + 2ab + b^2 + 2a + 2b)$$
$$(a + b) \mid (ax + ay + bx + by)$$

63. Un număr scris în sistemul zecimal este divizibil cu 2, atunci cînd cifra unităților lui este divizibilă cu 2.

Orice număr natural n se scrie $n = 10d + u$ cu $0 \leqslant u \leqslant 9$
Numărul u este cifra unităților lui n.
(De exemplu dacă $n = 4758$
avem $n = 10 \times 475 + 8$ ($d = 475$ și $u = 8$).)
$10d = 2 \cdot 5d$ deci $2 \mid 10d$.
Dacă $2 \mid u$ vom avea $2 \mid 10d$ și $2 \mid u$,
deci (teorema 4, p. 285): $2 \mid (10d + u) = n$.

64. Orice număr scris în sistemul zecimal este divizibil cu 5 atunci cînd 5 divide cifra unităților sale.

65. Dacă 9 divide suma cifrelor unui număr scris în sistemul zecimal, acest număr este divizibil cu 9.

Să notăm cu $\overline{m\ c\ d\ u}$ numărul zecimal obținut prin juxtapunerea celor 4 cifre m, c, d, u.

$$\overline{m\,c\,d\,u} = 1000\ m + 100\ c + 10\ d + u$$
$$= 999\ m + 99\ c + 9\ d + m + c + d + u$$
$$= 9(111\ m + 11\ c + d) + m + c + d + u.$$

Dacă $9 \mid (m + c + d + u)$ avem

$$9 \mid 9(111\ m + 11\ c + d) \text{ și } 9 \mid (m + c + d + u)$$

deci $9 \mid \overline{m\,c\,d\,u}$, pe baza teoremei 4, p. 285.

56 Să notăm cu $s(n)$ suma cifrelor numărului $n \in \omega$ scris în sistemul zecimal. În acest fel am definit o funcție

$$s: \omega \to \omega : n \to s(n)$$

sau *o transformare a mulțimii* ω.

Compusele $s^2 = s \circ s$, $s^3 = s \circ s \circ s \ldots$ etc. . . . sînt de asemenea transformări ale lui ω.

Stabiliți că

$$n \geqslant s(n) \geqslant s^2(n) \geqslant s^3(n) \geqslant \ldots$$

Deoarece n, $s(n)$, $s^2(n)$, . . . sînt numere naturale, acest șir trebuie să se termine cu numere egale.

Să analizăm cazul numărului 3.141.591.962

$n = 3.141.591.962$

$s(n) = 41$

$s^2(n) = 5$

$s^3(n) = 5 = s^4(n) = \ldots$

În acest caz

$$n > s(n) > s^2(n) = s^3(n) = s^4(n) = \ldots$$
$$3.141.591.962 > 41 > 5 = 5 = 5 = \ldots$$

Să notăm cu $r(n)$ cifra astfel obținută în final,

$$r \text{ este o funcție: } \omega \to \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$$

Scrieți șirurile următoarelor numere:

29, 875.324, 28, 89, 123, 123.022, 7.897.654

Scanned with OKEN Scanner

Vom defini în $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ o lege, punînd

$$a * b = r(a*b)$$

unde r este o funcție $\omega \to \omega$ definită la exercițiul 66.

Astfel $r(2 \times 3) = 6 \quad r(7 \times 4) = 1$

Desenați tabelul acestei legi:

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2			6						
3									
4									
5									
6									
7				1					
8									9
9									

Legea $*$ astfel definită în $\{1, \ldots, 9\}$ este comutativă, asociativă? Admite ea un număr neutru? Admite ea un număr absorbant? Orice element admite un simetric?

68. Studiați situația analogă cu precedenta, punînd

$$a * b = r(a + b).$$

Scanned with OKEN Scanner

19

Sistemul de numeraţie binară

1 — SISTEME DE NUMERAŢIE

Am reprezentat numerele naturale întregi în sistemul de **numeraţie zecimală.** Sînt şi alte mijloace de a reprezenta numerele naturale, în special **numeraţia romană.**

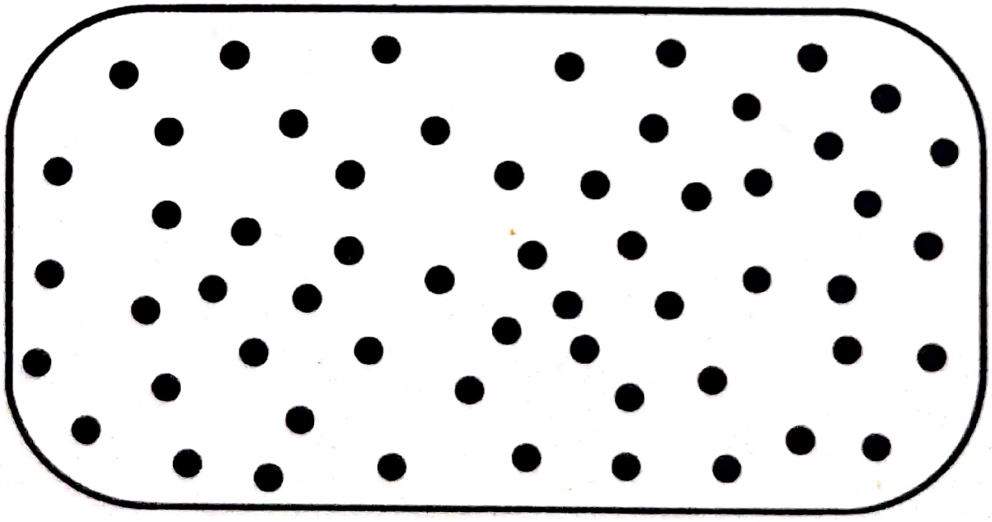
Numeraţie zecimală: 1 2 4 5 6 9 10 50 40 65 99 100
Numeraţie romană: I II IV V VI IX X L XL LXV IC C

Vom studia sistemul de numeraţie folosit de marile maşini electronice care execută astăzi cele mai lungi calcule cerute de civilizaţia noastră.

2 — SISTEMUL BINAR

Ne propunem să reprezentăm numărul de elemente ale unei mulţimi finite.

Să trasăm o diagramă a acestei mulţimi şi să reprezentăm prin puncte **toate** elementele mulţimii.

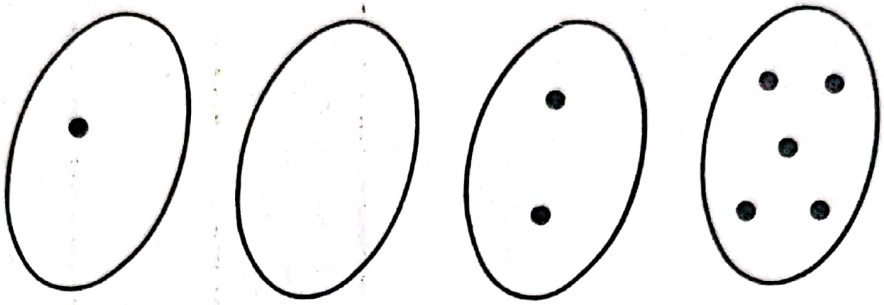


Această diagramă nu ne dă nici o informaţie despre natura obiectelor mulţimii. Singura informaţie pe care ne-o dă este numărul elementelor acestei mulţimi.

Scanned with OKEN Scanner

Această diagramă este deci o reprezentare grafică a numărului elementelor mulțimii.

Pentru mulțimi mici, astfel de diagrame sînt foarte clare.



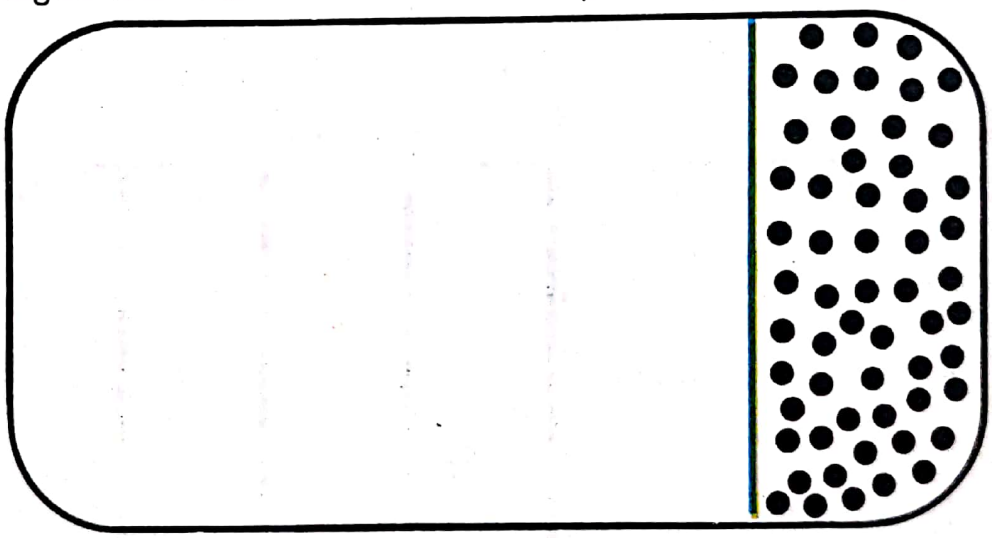
Dintr-o singură privire vedem că diagramele de mai sus reprezintă numerele unu, zero, doi, cinci.

Situația nu este aceeași pentru diagrama de la pagina precedentă.

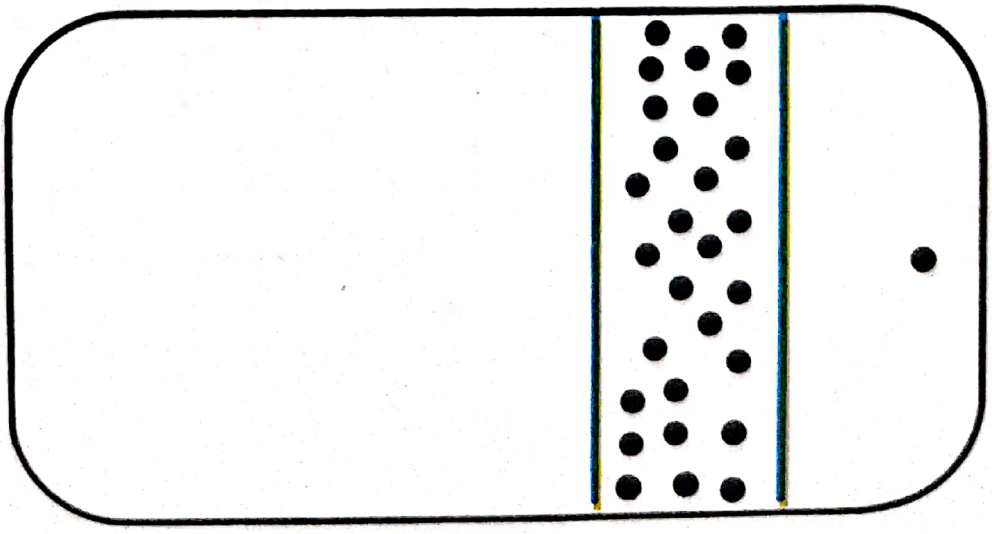
Dintr-o singură privire nu putem vedea numărul reprezentat de această diagramă.

Sistemul de numerație binară ne va permite să reprezentăm numărul punctelor din diagramă prin semne puține.

Să strîngem mai întîi toate obiectele mulțimii în partea dreaptă a diagramei.

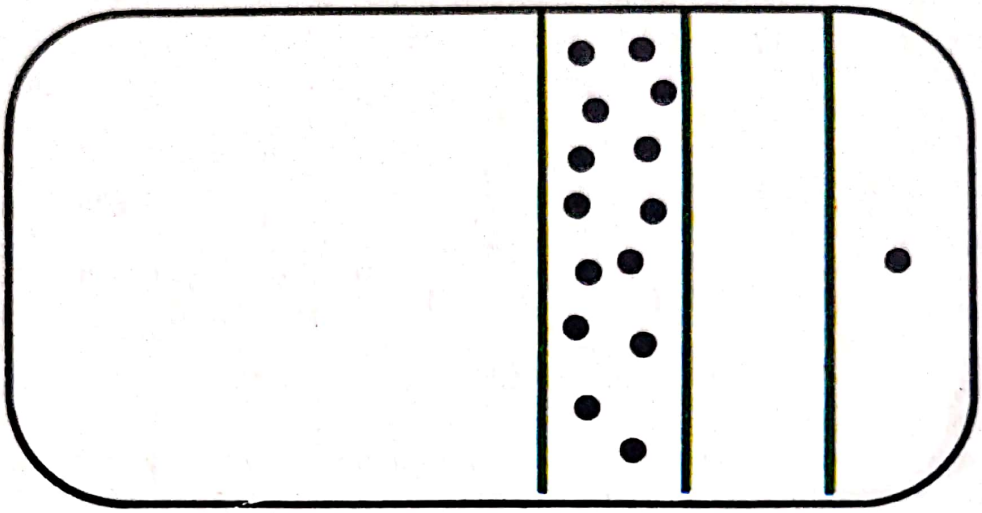


Pentru a simplifica situația, vom reprezenta mai jos o **pereche** de obiecte printr-un singur punct situat la stînga liniei verzi.



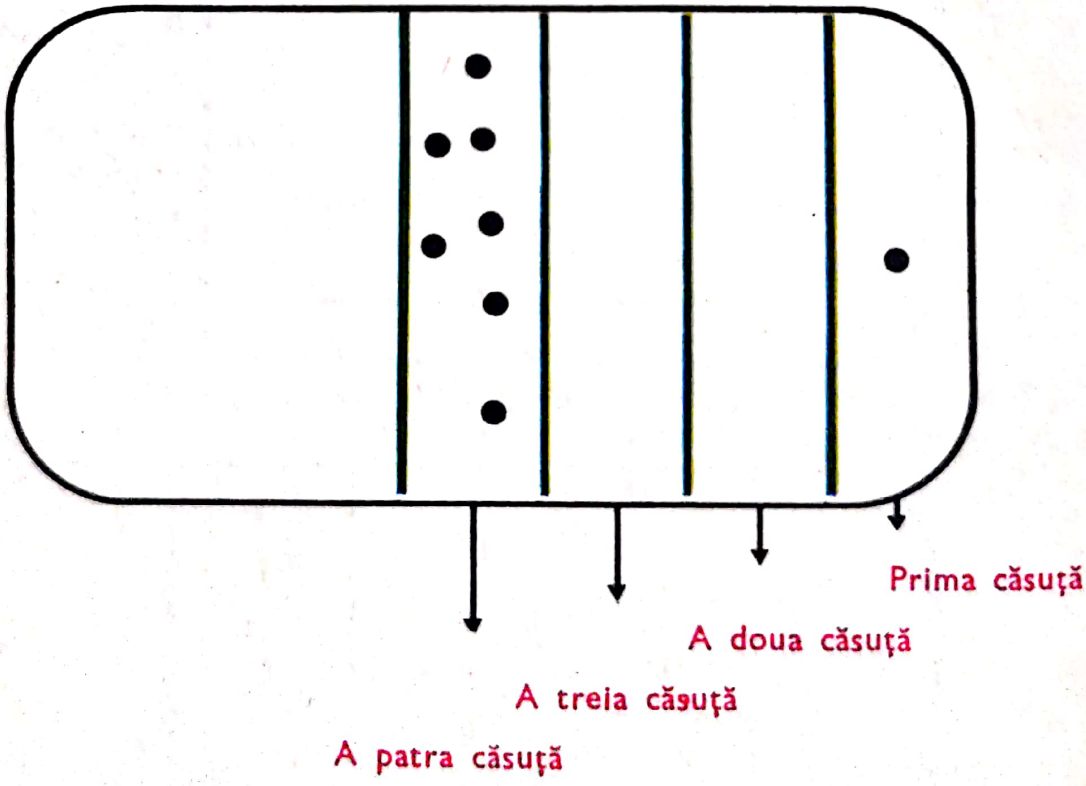
Scanned with OKEN Scanner

Să repetăm procedeul.

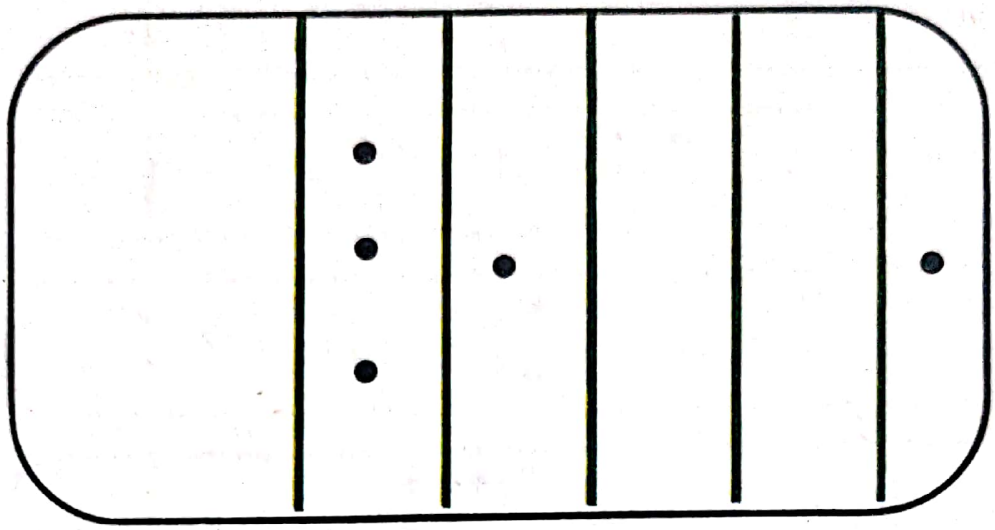


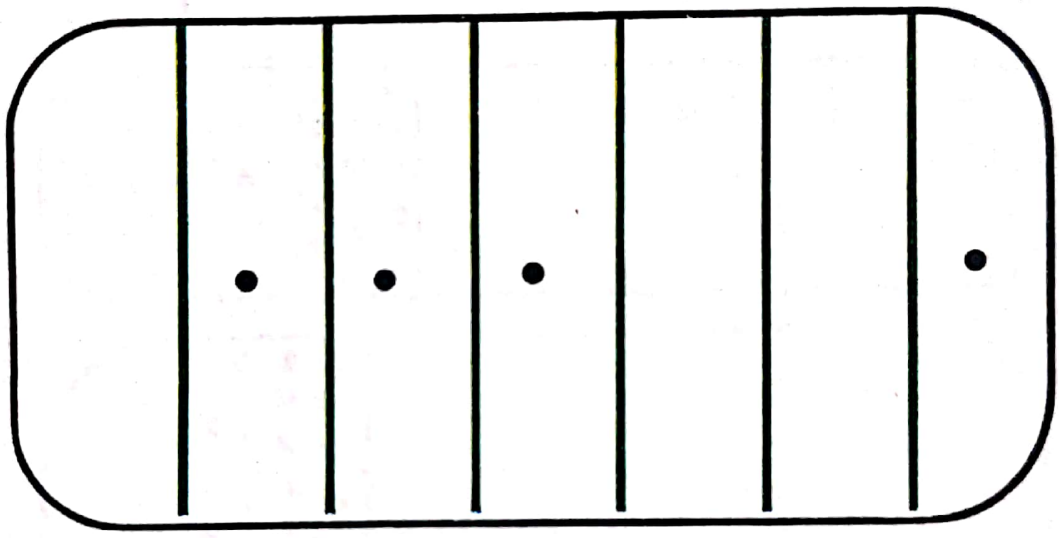
Un punct situat în prima căsuță din dreapta reprezintă un singur obiect.
Un punct situat în a doua căsuță reprezintă două obiecte.
Fiecare punct situat în a treia căsuță reprezintă două obiecte din a doua căsuță, sau patru obiecte din mulțimea dată.

Se repetă procedeul.

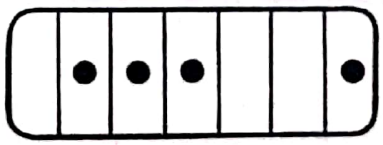


Scanned with OKEN Scanner



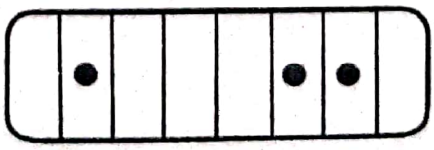


Cu patru obiecte am reprezentat numărul căutat, pentru că datele schemei

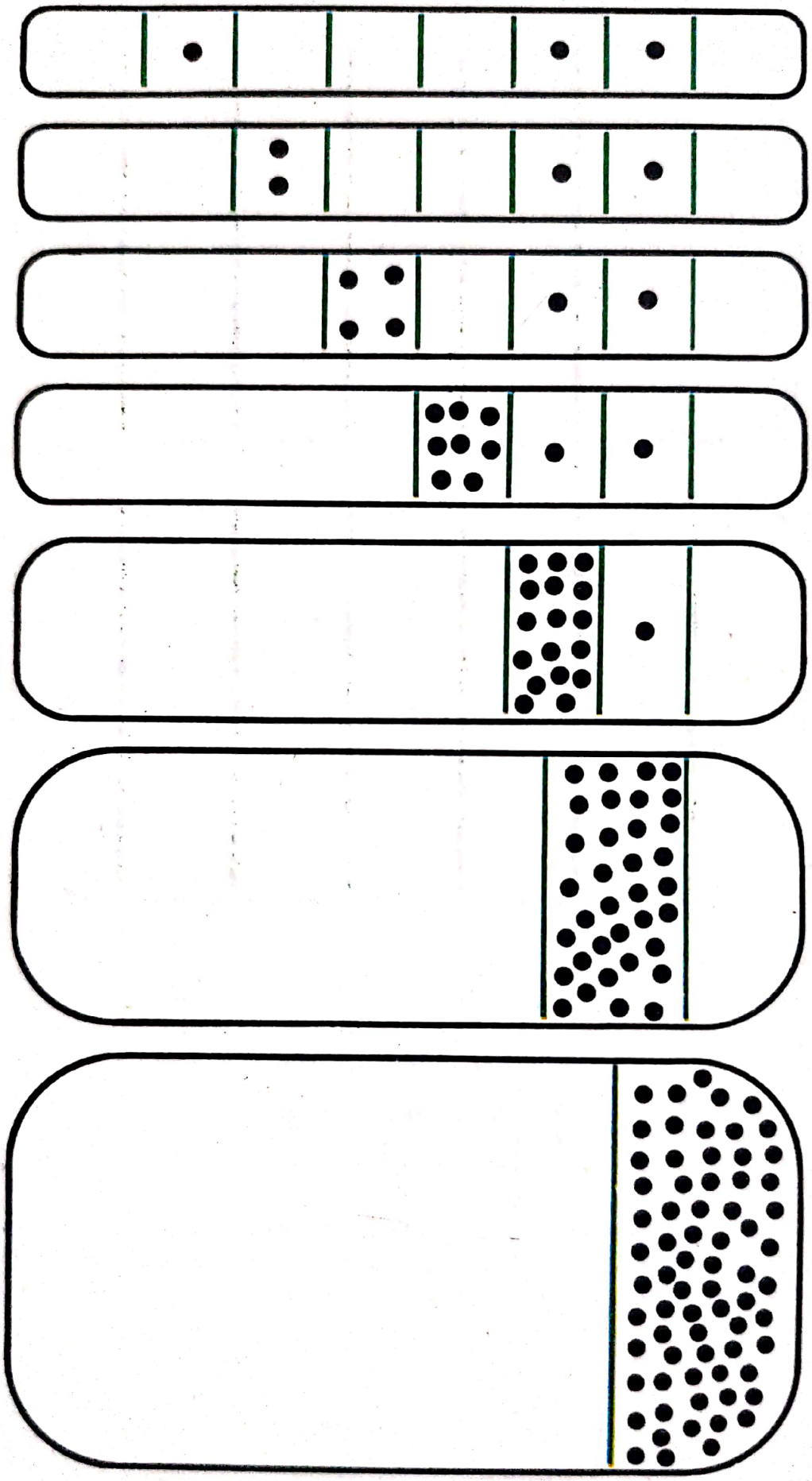


ne permit într-adevăr să refacem desenul inițial: este suficient să înlocuim succesiv fiecare element dintr-o căsuță prin două elemente din căsuța vecină, din dreapta.

Ca exercițiu, să reconstituim schema unei mulțimi care ar fi dat numărul

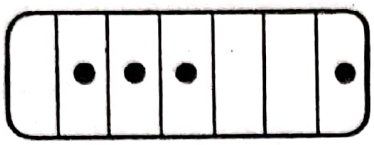


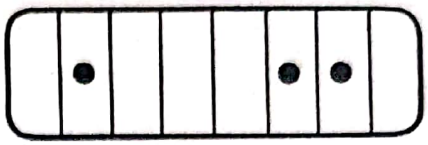
Scanned with OKEN Scanner



Scanned with OKEN Scanner

Vedem, deci, că orice număr (natural) poate fi reprezentat printr-un desen ca:





În astfel de desene, fiecare căsuță este **vidă** sau **ocupată de un singur punct.**

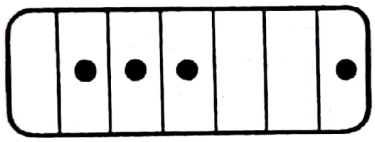
Cunoaștem numărul dacă, mergînd de la dreapta la stînga, pentru fiecare căsuță succesivă a desenului știm dacă este **vidă** sau **ocupată.**

Simplificăm aceste desene utilizînd două semne.

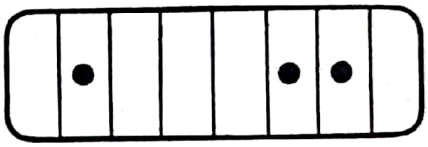
Semnul 0 pentru căsuțele vide.

Semnul 1 pentru căsuțele ocupate.

Admițînd această convenție, reprezentați numerele desenate mai sus!



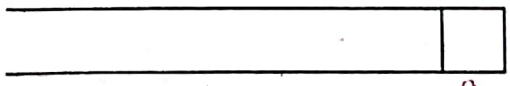
1 1 1 0 0



1 0 0 0 1 1 0

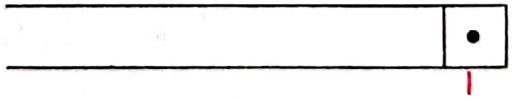
Să reprezentăm de asemenea primele numere naturale.

zero



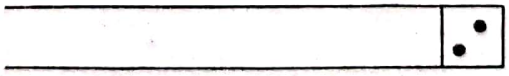
0

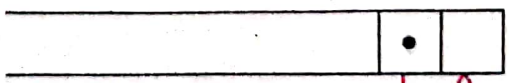
unu



1

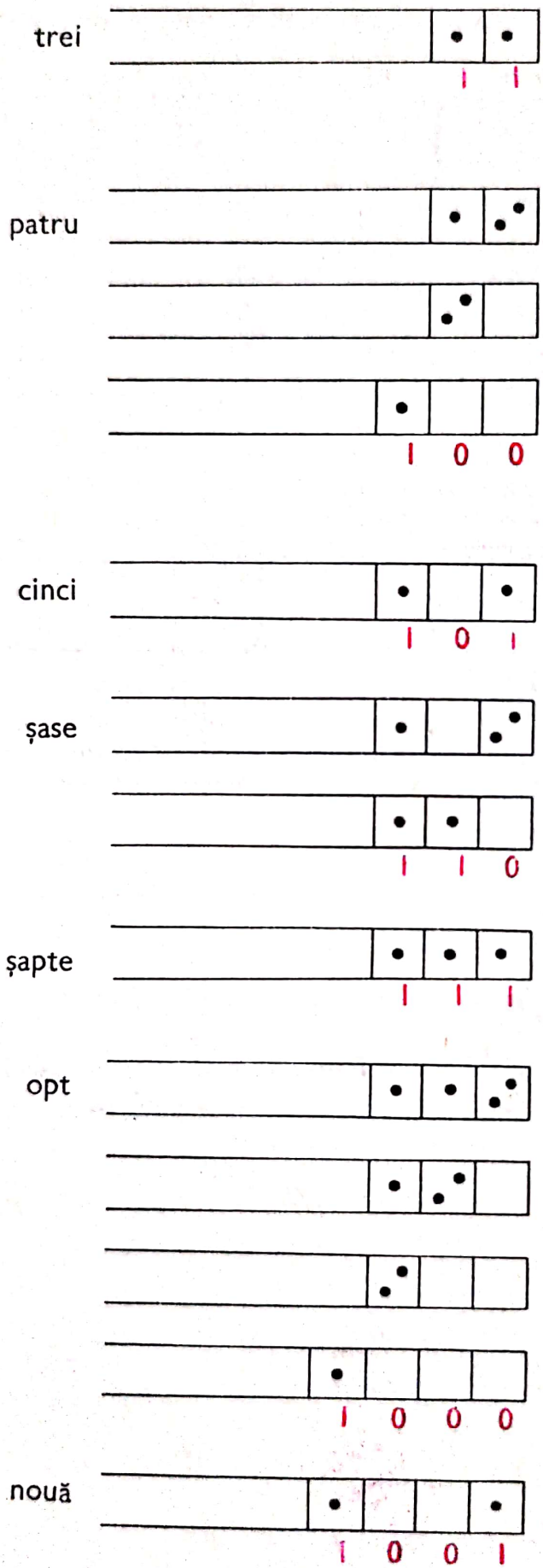
doi





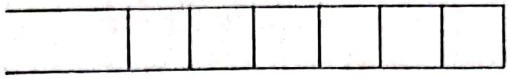
1 0

Scanned with OKEN Scanner



Scanned with OKEN Scanner

Tabla divizată în căsuțe



se numește **abacă**.

Să rezumăm și să continuăm fără desen.

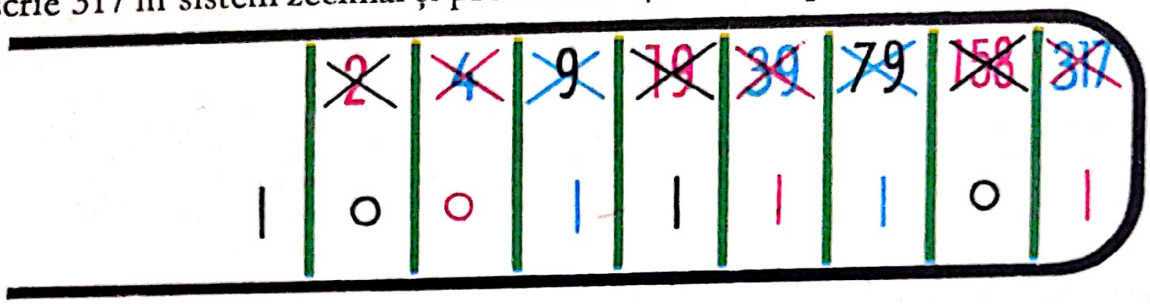
0	zero
1	unu
10	doi
11	trei
100	patru
101	cinci
110	șase
111	șapte
1000	opt
1001	nouă
1010	zece
1011	unsprezece
1100	doisprezece
1101	treisprezece
1110	patrusprezece
1111	cincisprezece
10000	șasesprezece
10001	șaptesprezece
10010	optsprezece
10011	nouăsprezece
10100	douăzeci
10101	douăzeci și unu
10110	douăzeci și doi
10111	douăzeci și trei
11000	douăzeci și patru
11001	douăzeci și cinci
11010	douăzeci și șase
11011	douăzeci și șapte
11100	douăzeci și opt
11101	douăzeci și nouă
11110	treizeci
11111	treizeci și unu
100000	treizeci și doi
100001	treizeci și trei
100010	treizeci și patru
100011	treizeci și cinci
100100	treizeci și șase
100101	treizeci și șapte
100110	treizeci și opt
100111	treizeci și nouă
101000	patruzeci
101001	patruzeci și unu
101010	patruzeci și doi
101011	patruzeci și trei
101100	patruzeci și patru
101101	patruzeci și cinci
101110	patruzeci și șase
101111	patruzeci și șapte
110000	patruzeci și opt
110001	patruzeci și nouă
110010	cincizeci
110011	cincizeci și unu
110100	cincizeci și doi
110101	cincizeci și trei
110110	cincizeci și patru
110111	cincizeci și cinci
111000	cincizeci și șase
111001	cincizeci și șapte
111010	cincizeci și opt
111011	cincizeci și nouă
111100	șaizeci
111101	șaizeci și unu

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

1. Deoarece sînteți obișnuiți cu sistemul zecimal, vă dau un număr în acest sistem, de exemplu 317, și vă cer să-l scrieți în sistemul binar.

În loc să punem 317 puncte în prima căsuță din dreapta, a abacei, vom scrie 317 în sistem zecimal și procedăm așa cum se procedează cu jetoanele:



Așezare practică:

317	1
158	0
79	1
39	1
19	1
9	1
4	0
2	0
1	1

317 = 1.0011.1101

10.[1] Transformați în sistem binar numărul (zecimal) 273.859:

273859	1
136929	1
68464	0
34232	0
17116	0
8558	0
4279	1
2139	1
1069	1
534	0
267	1
133	1
66	0
33	1
16	0
8	0
4	0
2	0
1	1

273.859 = 100.0010.1101.1100.0011

[1] Numerele de ordine ale exercițiilor din acest capitol sînt scrise în sistemul binar (not. trad.).

Scanned with OKEN Scanner

11. Transformați de asemenea în sistem *binar* numerele care se scriu astfel în sistem *zecimal*: 1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000, 1.000.000

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 10 &= 1010 \\ 100 &= 110.0100 \\ 1.000 &= 11.1110.1000 \\ 10.000 &= 10.0111.0001.0000 \\ 100.000 &= 1.1000.0110.1010.0000 \\ 1.000.000 &= 1111.0100.0010.0100.0000 \end{aligned}$$

100. Transformați în sistem *zecimal* numerele care în sistem *binar* se scriu: 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000, . . .

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 10 &= 2 \\ 100 &= 4 \\ 1000 &= 8 \\ 10000 &= 16 \\ 100000 &= 32 \\ 1000000 &= 64 \\ 10000000 &= 128 \\ 100000000 &= 256 \\ 1000000000 &= 512 \end{aligned}$$

101. Transformați in sistem *zecimal* numerele care în sistem *binar* se scriu: 11100011; 10101010; 1000001; 111101; 1000101

$$\begin{aligned} 11100011 &= 1 + 2 + 4 + 64 + 128 + 256 = 455 \\ 10101010 &= 2 + 8 + 32 + 128 = 170 \\ 1000001 &= 1 + 64 = 65 \\ 111101 &= 1 + 4 + 8 + 16 + 32 = 61 \\ 1000101 &= 1 + 4 + 64 = 69 \end{aligned}$$

110. Transformați în sistem *binar* numărul care în sistem *zecimal* se scrie:

1. 357.908.426

111. Priviți succesiunea numerelor naturale scrise în sistem binar.

Ce puteți spune de numerele pare?

Ce puteți spune de numerele divizibile cu doi?

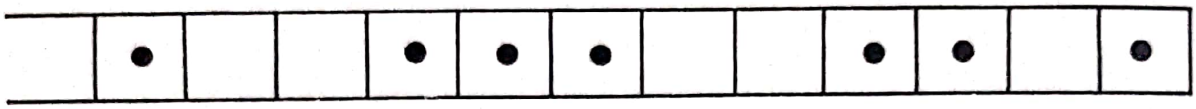
Cum procedăm ca să înmulțim un număr (scris în sistem binar) cu doi? cu patru? cu treizeci și doi?

Scanned with OKEN Scanner

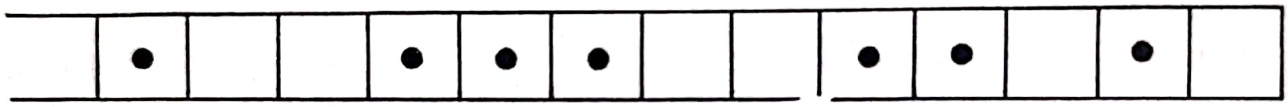
1000. Fie un număr scris în sistem binar:

1001.1100.1101

Scrieți acest număr pe abacă:



Dacă punem fiecare jeton de mai sus în căsuța vecină, din stînga, fiecare jeton va reprezenta de două ori mai mult ca înainte.
Pe baza *distributivității*, această operație se reduce la înmulțirea numărului dat cu doi.
După efectuarea acestei operații avem situația:



1.0011.1001.1010

Înmulțim un număr (scris în sistem binar) cu doi, scriind un zero la dreapta lui!
Îl înmulțim cu patru scriind două zerouri la dreapta lui.
Îl înmulțim cu opt . . ., cu șasezeci și patru . . .

1001. Consultînd lista dată mai sus, verificați în sistemul binar formulele *zecimale*:

$$56 = 7 \times 8$$
$$48 = 3 \times 16$$

1010. Scrieți în sistemul binar numărul de părți ale unei mulțimi de șapte elemente.

1011. Scrieți în sistemul binar numărul de relații ale lui A spre B, știind că A are trei elemente și B are șapte.

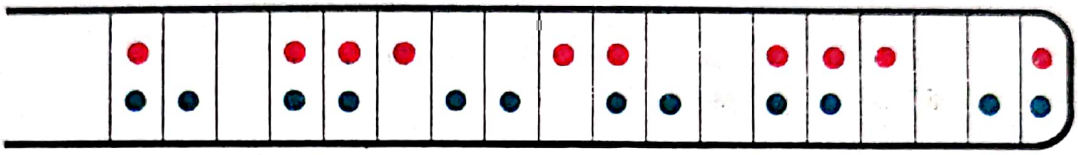
Scanned with OKEN Scanner

3 — ADUNAREA ÎN SISTEMUL BINAR

Ne propunem să adunăm numerele scrise în sistemul binar:

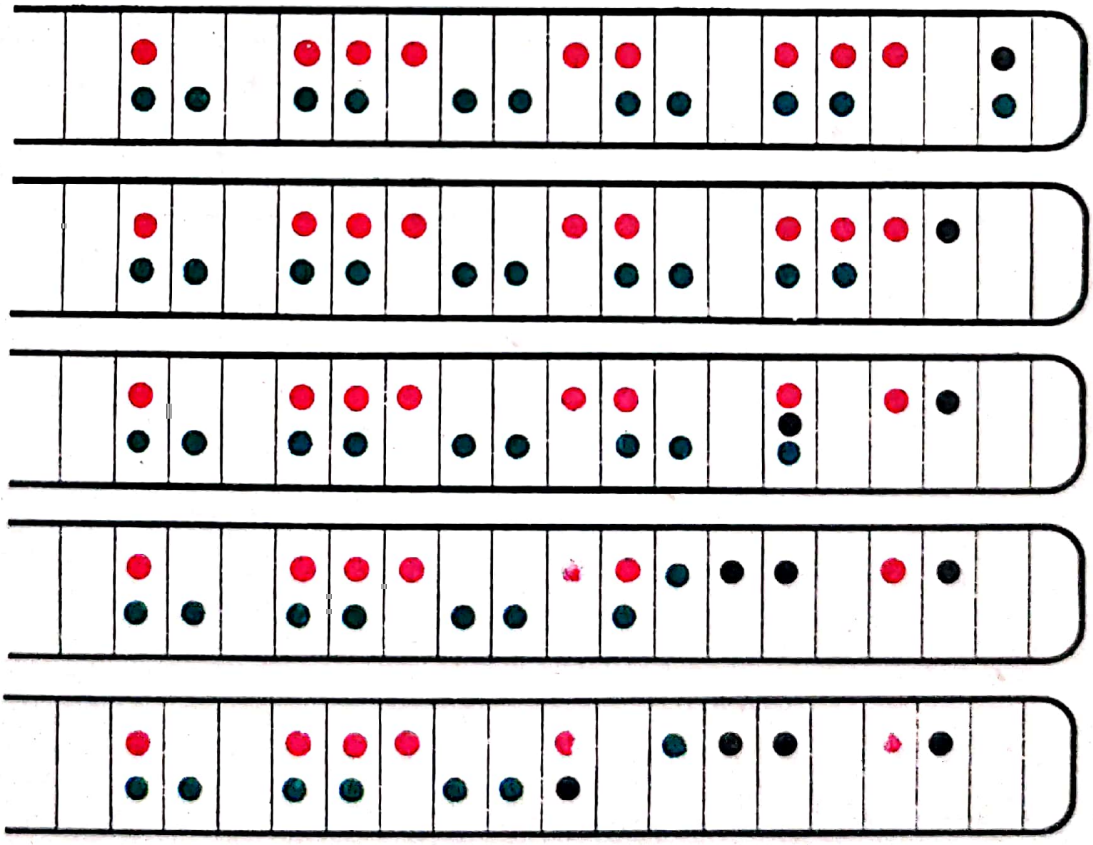
$$10011100111001001$$
$$11011011011011011$$

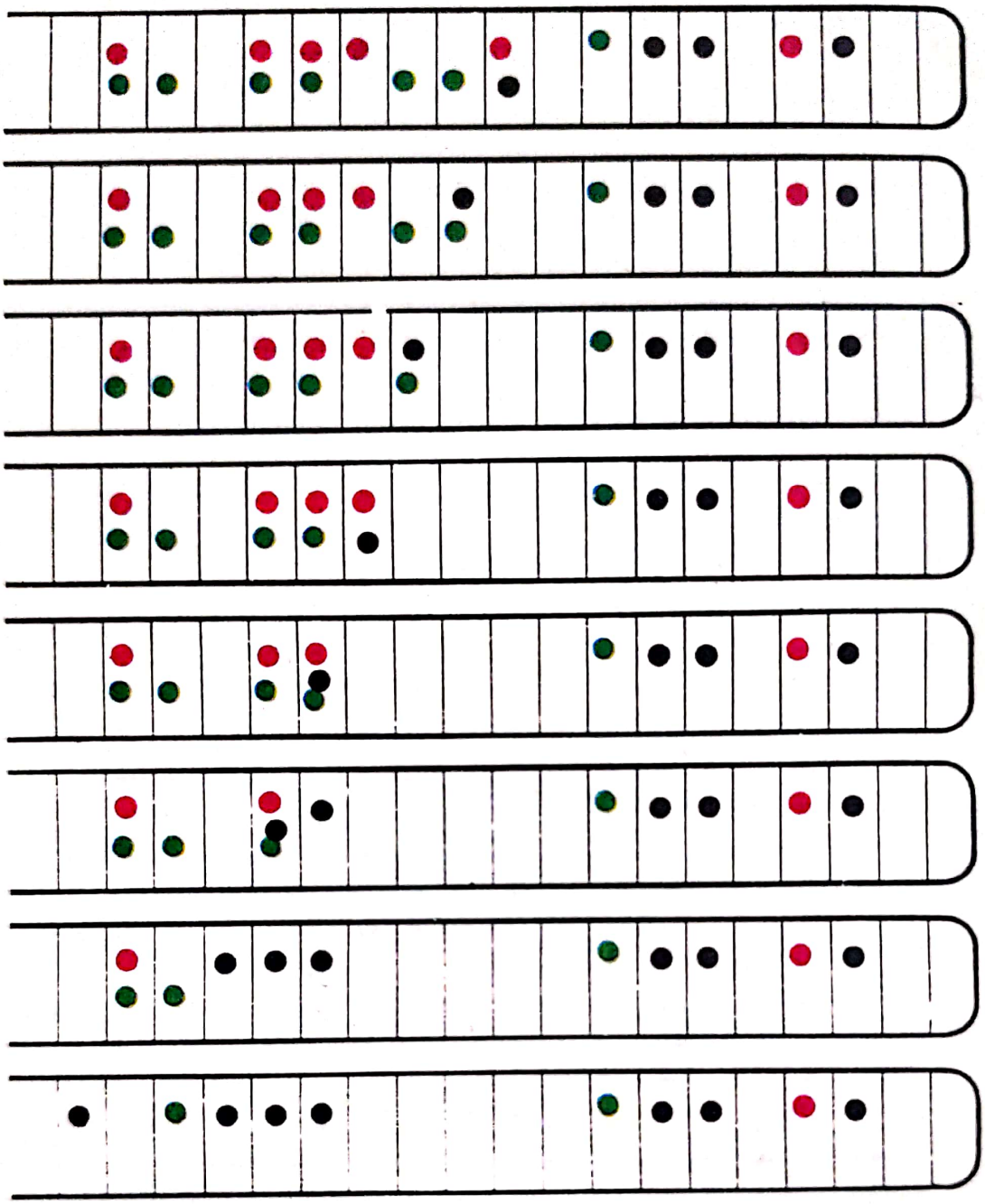
Să le scriem punînd jetoane roșii și verzi pe abacă



Să aplicăm regula sistemului binar: un jeton dintr-o căsuță reprezintă dublul unui jeton aflat în căsuța vecină de la dreapta.

Să însemnăm cu negru noile jetoane care intră într-o căsuță:

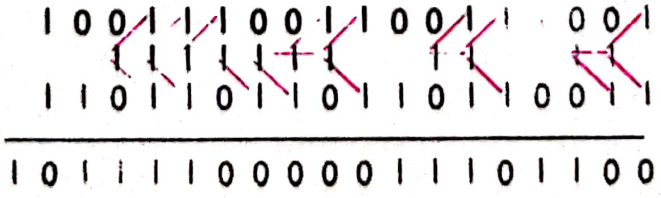




Deci

$$\begin{array}{r} 1001110011001111001 \\ + \;\; 1101101101101110011 \\ \hline 10111100000111011100 \end{array}$$

Metoda utilizată este rezumată de schema:



Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

1. Adunați în sistemul binar numerele 7 și 8

În sistem binar, 7 se scrie 111

8 se scrie 1000

Suma este deci 1111

10. Scrieți în sistem binar 45 și 187

Adunați în sistem binar.

Transformați suma în sistem zecimal.

45	1
22	0
11	1
5	1
2	0
1	1
0	

187	1
93	1
46	0
23	1
11	1
5	1
2	0
1	1
0	

$$\begin{array}{r} 10111011 \\ 101101 \\ \hline 11101000 \end{array} \quad 8 + 32 + 64 + 128 = 232$$

11. Transformați în sistem binar 263, 789, 1025.

Adunați numerele obținute. Retransformați suma în sistem zecimal.

Verificați.

100. Adunați

$$\begin{array}{r} 11111111111 \\ 1 \\ \hline 100000000000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11111111111 \\ 1111000 \\ \hline 100000111111 \end{array}$$

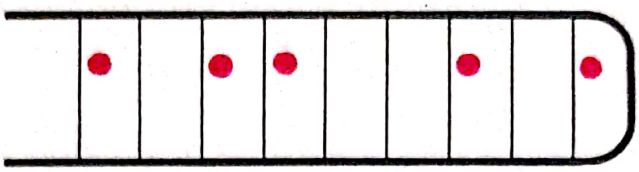
$$\begin{array}{r} 11111 \\ 1 \\ \hline 100000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11111111111 \\ 11100100 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11111111111 \\ 11111 \\ \hline 100000011110 \end{array}$$

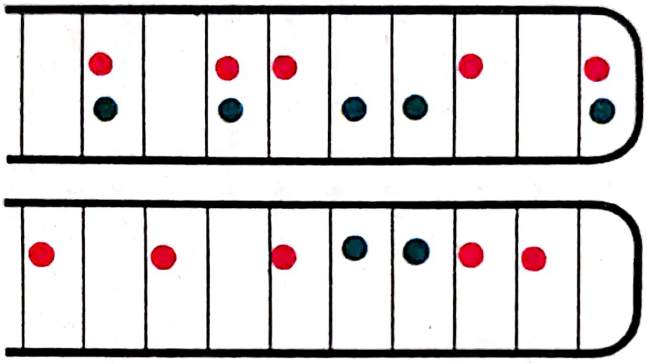
Ați putea enunța cîteva reguli de calcul binar?

4 — COMPARAREA NUMERELOR SCRISE ÎN SISTEMUL BINAR

Reprezentați un număr în sistemul binar punînd cîteva jetoane roșii pe abacă.



Reprezentați cu jetoane verzi un alt număr.
Adunați !



Suma obținută astfel este un număr mai mare decît numerele date.
În rezumat:

$$1.0110.0101 + 1.0101.1001 = 10.1011.1110$$

Deci (cap. 17, teorema 2, pag. 267)

$$1.0110.0101 < 10.1011.1110$$
$$1.0101.1001 < 10.1011.1110$$

— Ați putea să-mi spuneți care e cel mai mare număr care are cel mult șapte cifre (în sistemul binar)?

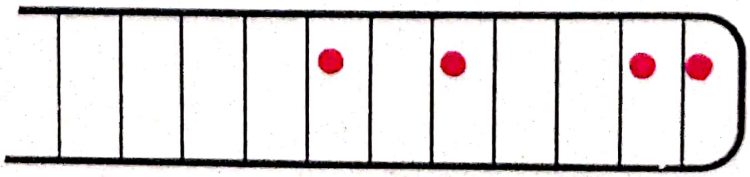
Este numărul

$$111.1111$$

— De ce?

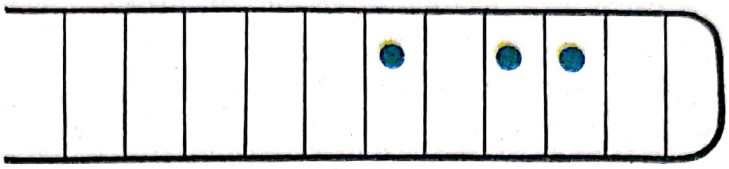
— . . .

— Orice număr de șapte cifre binare (cel mult) este reprezentat printr-un jeton și numai prin unul singur în unele din primele șapte căsuțe.



Scanned with OKEN Scanner

Pentru a obține 111.1111 este suficient să punem jetoane verzi în căsuțele rămase vide, din primele șapte.



Numărul reprezentat de jetoanele verzi este 10.1100.
Astfel

$$101.0011 + 10.1100 = 111.1111$$

Deci

$$101.0011 \leqslant 111.1111$$

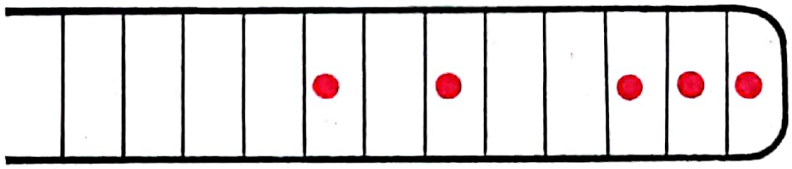
(Aplicînd tot teorema 2 de la cap. 17, pag. 267)

— Care este cel mai mic număr care are exact opt cifre binare?

— 1000.0000

— De ce?

— Orice număr care are exact opt cifre binare se notează punînd un jeton în căsuța a opta și un jeton în unele din căsuțele precedente.



De la 1000.0000 trecem deci la acest număr *a* adăugînd anumite jetoane, adică făcînd o adunare

Avem $1000.0000 + 10.0111 = 1010.0111$

De unde $1000.0000 \leqslant 1010.0111$

Care este cel mai mare din cele două numere

— Avem
111.1111 și 1000.0000
deoarece
$111.1111 < 1000.0000$
$111.1111 + 1 = 1000.0000$

Orice număr care are exact opt cifre binare este mai mare decît orice număr care are cel mult șapte cifre.

Din două numere scrise în sistemul binar, cel mai lung este cel mai mare.

Fie *a* un număr care are 17 cifre binare și *b* un număr care are 9 cifre binare.

Scanned with OKEN Scanner

— Vom avea $b < a$

— De ce?

— $b \leqslant 1.1111.1111 < 1111.1111.1111.1111 < 1.0000.0000.0000.0000 \leqslant a$

— Să comparăm, în sfîrșit, două numere care au același număr de cifre binare.

Să reprezentăm aceste numere prin jetoane roșii și verzi.

Să citim aceste numere de la stînga la dreapta.

În prima căsuță (de la stînga la dreapta) figurează un jeton roșu și un jeton verde, deoarece aceste numere au același număr de cifre.

Dacă toate celelalte căsuțe sînt vide sau ocupate de două jetoane, numerele sînt egale.

În caz contrar, există o primă căsuță în care figurează un singur jeton.

Culoarea acestui jeton va determina pe cel mai mare din cele două numere.

De exemplu:

$$11.1010.1001.1110.1101 < 11.1010.1100.0001.0101$$

Să subliniem începuturile identice ale acestor numere:

$$\underline{11.1010.}1001.1110.1101 \qquad \underline{11.1010.}1100.0001.0101$$

Știm dinainte că

$$1.1110.1101 < 100.0001.0101$$

Deci

$$11.1010.1000.0000.0000 + 1.1110.1101 < 11.1010.1000.0000.0000 + 100.0001.0101$$

adică

$$11.1010.1001.1110.1101 < 11.1010.1100.0001.0101$$

EXERCIȚII

1. Puneți în ordine următoarele numere scrise în numerație binară:

   11.0101.1011 ; 11.1111.1111 ; 11.0100.1110 ; 100.0000.0000
   11.0101.1101 ; 11.0101.0111 ; 11.0100.1110 ; 11.0101.1110

   Verificați, transpunînd aceste numere în numerație zecimală.

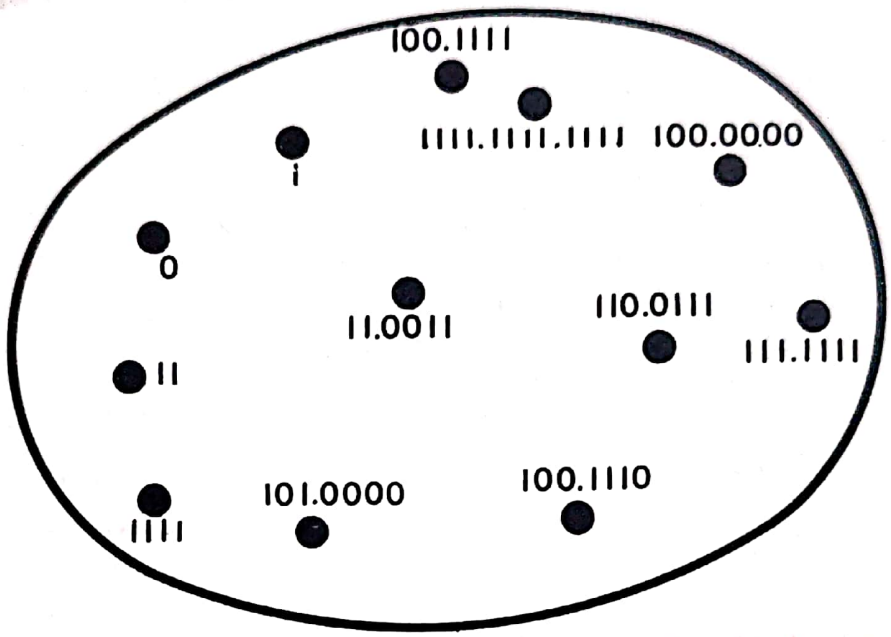
2. Scrieți, în numerație binară, cel mai mare număr de douăsprezece cifre care să aibă exact șase cifre 1.
   Scrieți, de asemenea, cel mai mic număr de douăsprezece cifre care să aibă exact șase cifre 1.

3. Cum recunoașteți multiplii lui 8 (în numerație binară)?

Scanned with OKEN Scanner

4. Scrieți, în numerație binară, cel mai mic număr de cincisprezece cifre care să aibă patru cifre 0.
Scrieți de asemenea cel mai mare număr de cincisprezece cifre care să aibă patru cifre 0.

5. Desenați un grafic al relației $\leqslant$ în mulțimea reprezentată mai jos:



6. Cel mai mare număr de douăsprezece cifre binare care are trei cifre | este divizibil cu 512.

5 — ÎNMULȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI NATURALE ÎN SISTEMUL BINAR

Ne propunem să facem înmulțirea

$$11.0101 \times 1.0110$$

Știm că

$$1.0110 = 10 + 100 + 1.0000$$

Înmulțirea este distributivă în raport cu adunarea (cap. 18, teorema 1, pag. 282).

Deci

$$\begin{aligned} 11.0101 \times 1.0110 &= 11.0101 \times (10 + 100 + 1.0000) \\ &= 11.0101 \times 10 + 11.0101 \times 100 + 11.0101 \times 1.0000 \\ &= 110.1010 + 1101.0100 + 11.0101.0000 \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dispoziție practică

$$
\begin{array}{r}
11.0101 \\
1.0110 \\
\hline
110.1010 \\
1101.01 \\
11.0101 \\
\hline
100.1000.1110
\end{array}
$$

Pentru a efectua o înmulțire în sistemul binar nu este de loc necesar să cunoaștem tabla înmulțirii.

EXERCIȚII

1. $1^{10} =$
$11^{10} =$
$111^{10} =$
$1111^{10} =$
$1.1111^{10} =$
$11.1111^{10} =$

Enunțați o regulă de calcul binar.

2. Transformați numerele 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111 în sistemul zecimal. Căutați pătratele lor și puneți-le în sistemul binar.

3. Faceți înmulțirea 12345×6789.
Transformați aceste numere în sistemul binar. Calculați produsul în sistem binar.
Transformați rezultatul în sistem zecimal.

4. Scrieți tabla lui Pitagora în sistem binar:

•	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
1	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
10	10	100	110	1000	1010	1100	1110	10000	10010
11	11	110							
100	100	1000	1100	10000	10100	11000	11100	100000	100100
101	101	1010							
110	110	1100							
111	111	1110							
1000	1000	10000							
1001	1001	10010							

5. Fericiți copii ai civilizației binare, iată tabla voastră de înmulțire!

•	1
1	1

Scanned with OKEN Scanner

LEIBNIZ
(1646—1716)

Leibniz, născut la Leipzig, a fost aproape toată viaţa sa in slujba ducilor de Hanovra.

Acest mare gînditor avea un spirit universal. A studiat istoria, dreptul, lingvistica, teologia, matematica, geologia, construcţia maşinilor de calcul, biologia, maşinile cu aburi. A studiat sanscrita şi a consacrat o parte importantă din timpul său cercetărilor genealogice pentru a apăra interesele celor care-l plăteau. A fost un călător neobosit.

Avea conştiinţa unităţii ştiinţei şi a studiat o limbă universală, care ar fi permis uşurarea descoperirilor în toate domeniile. Aceasta l-a condus la stabilirea bazelor logicii simbolice şi la introducerea unui număr foarte mare de noi simboluri matematice. În acest cadru el a introdus *calculul binar*. Cea mai mare descoperire a sa este aceea a *calculului diferenţial*, care constituie astăzi o unealtă esenţială de lucru in toate ştiinţele.

Cuvintul *funcţie* a fost introdus de Leibniz in 1694.

Scanned with OKEN Scanner

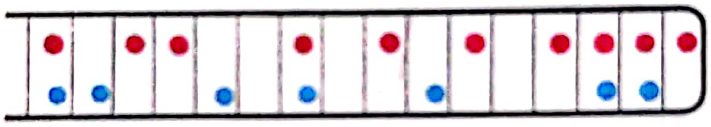
20

Numerele întregi raţionale

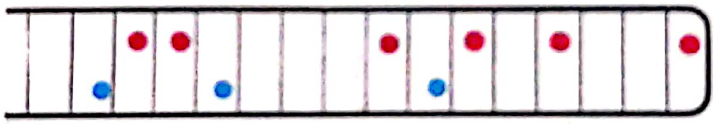
1 — O LUPTĂ DE EXTERMINARE SAU NUMERELE NEGATIVE

Pe abaca noastră, o armată de jetoane roșii și o armată de jetoane albastre vor duce o luptă necruțătoare, pînă la exterminarea completă a uneia dintre ele.

Să punem reglementar pe abacă pe combatanții celor două tabere: niciodată mai mult de un jeton de o culoare într-o căsuță.

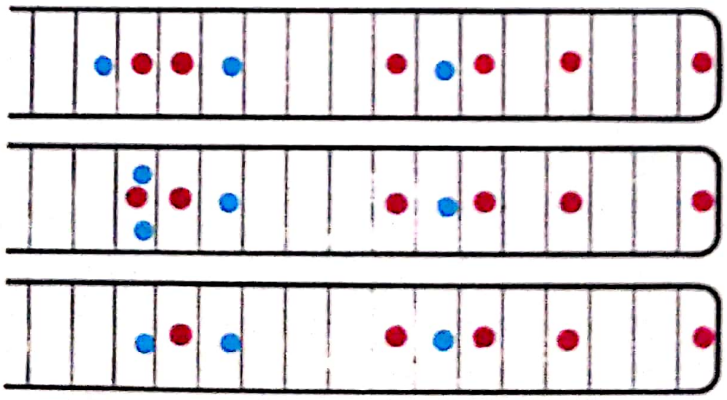


Cînd un pion roșu și un pion albastru se găsesc în *aceeași căsuță*, se omoară imediat reciproc.

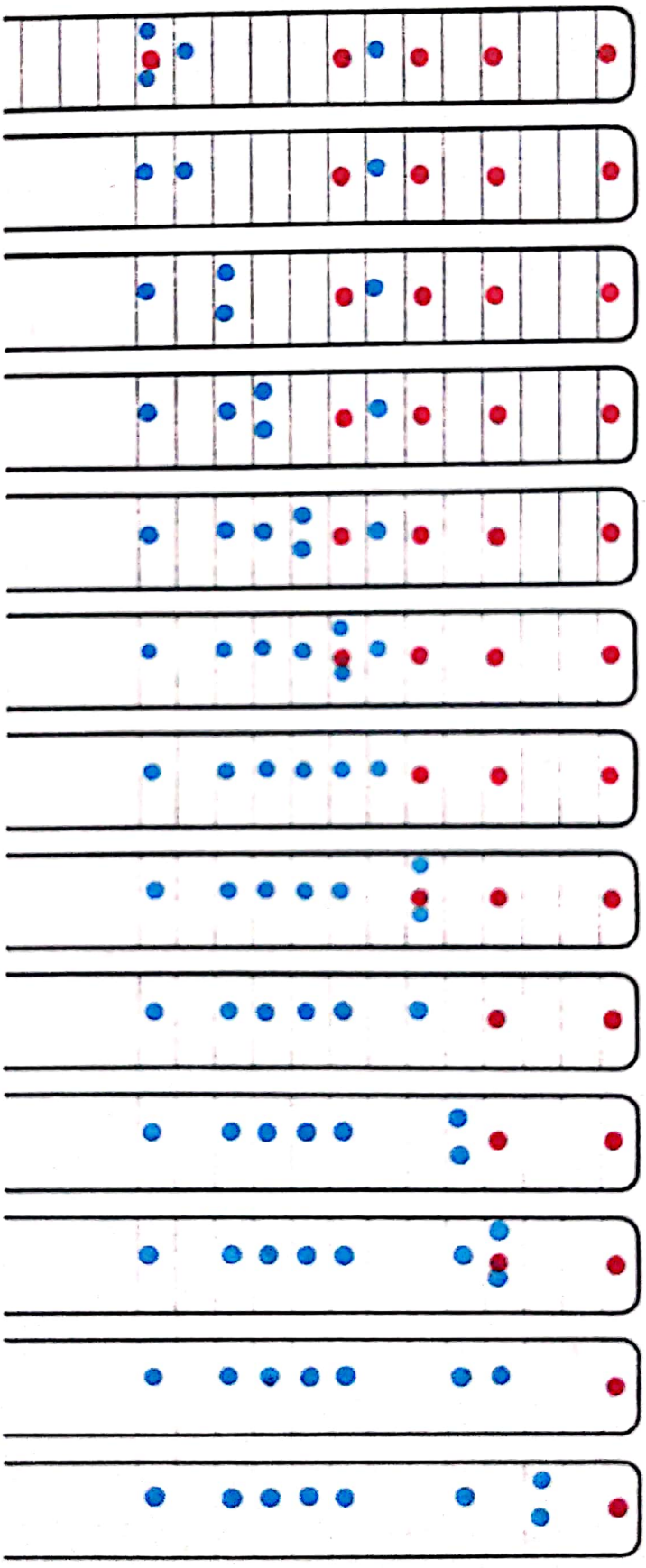


Știm că un jeton de o culoare poate fi înlocuit cu **două jetoane de aceeași culoare** situate în căsuța vecină din dreapta.

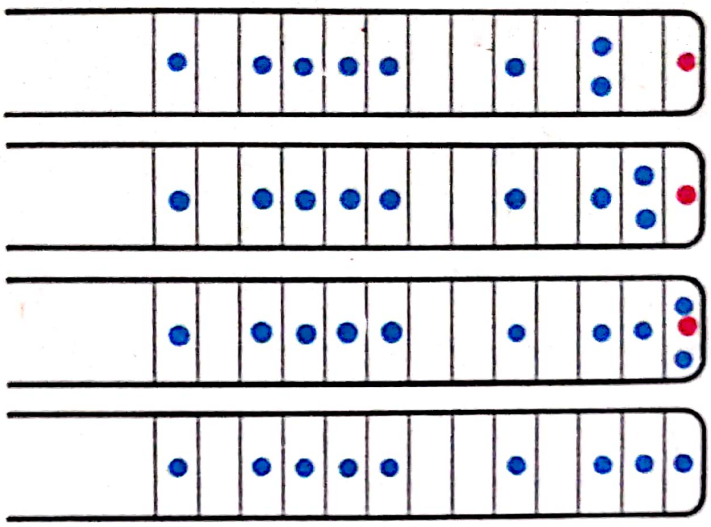
Desenele de mai jos descriu desfășurarea ostilităților.



Scanned with OKEN Scanner



Scanned with OKEN Scanner



Armata albastră a învins !

Dacă am aduna numărul definit de supraviețuitorii albaștri cu numărul definit de armata roșie inițială, am regăsi numărul albastru inițial.

Vom spune că bătălia descrisă mai sus este o

adunare de numere de semne opuse.

La intrarea lor în cîmpul de luptă, jetoanele albastre defineau numărul

1100.1010.0100.0110

Vom semnala că acest număr este reprezentat cu albastru scriind

—1100.1010.0100.0110

Un astfel de număr este numit **negativ.**

Jetoanele roșii defineau inițial numărul

1011.0010.1010.1111

Vom semnala că acest număr este reprezentat cu roșu, scriind

+ 1011.0010.1010.1111

sau prin abreviere

1011.0010.1010.1111

Astfel de numere sînt numite **pozitive.**

Numărul zero este singurul pentru care este indiferent dacă-l reprezentăm prin pioni roșii sau albaștri

$$0 = -0 = +0$$

Zero este singurul număr care este totodată pozitiv și negativ.

Rezultatul bătăliei descrise mai sus este numărul (albastru), pe care-l vom nota

— 1.0111.1001.0111

care este *suma numerelor*

— 1100.1010.0100.0110 și + 1011.0010.1010.1111

Vom scrie

$$(-\ 1100.1010.0100.0110) + (+\ 1011.0010.1010.1111) =$$
$$(+\ 1011.0010.1010.1111) + (-\ 1100.1010.0100.0110) =$$
$$-\ 1.0111.1001.0111$$

Simplificăm notarea scriind:

$$1011.0010.1010.1111 - 1100.1010.0100.0110$$

în loc de

$$(+\ 1011.0010.1010.1111) + (-\ 1100.1010.0100.0110)$$

Se pune $Z = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}$

Elementele lui Z sînt numite numere **întregi raționale.**

Numerele pozitive și negative vor fi utile ori de cîte ori sîntem în fața unor acțiuni antagoniste, deci foarte deseori.

EXERCIȚII

1.

$1101 - 1.0000 = ?$	$1101 + 1.0000 = ?$
$1.0000 - 1101 = ?$	$1.0000 + 1101 = ?$
$1101 - 1101 = ?$	$(-1101) + (-1101) = ?$
$-1101 + 1101 = ?$	$(-1101) + (-1111) = ?$

Remarcați că -1101 și -1111 înseamnă numere de același semn, reprezentate prin jetoane de aceeași culoare.
Le adunăm ca de obicei!
Mai scriem și $-1101\ -1111$ în loc de $(-1101) + (-1111)$

2.

$15 - 8 = 15 + (-8) =$	$87 - 125 =$
$25 + 8 =$	$127 + 85 =$
$8 + 15 =$	$-12 - 13 = (-12) + (-13) =$
$-15 + 8 =$	$13 + 12 =$
$-8 + 15 =$	$-5 - 8 =$

Nu uitați că scriem $-5\ -8$ pentru $(-5) + (-8)$.

3. Vă dau două numere de semne opuse.
Puteți prevedea semnul sumei lor?
Care este semnul sumelor $17 - 87$?
$5 - 12$?
$1000 - 1$?

4.

$-5 + \ldots\ldots = 8$	$\ldots\ldots + 1458 = -36$
$-17 + \ldots\ldots = 12$	$25 + \ldots\ldots = -32$
$-15 + \ldots\ldots = 17$	$-19 - 152 =$
$-13 + \ldots\ldots = 0$	$-52 + \ldots\ldots = 85$
$-5 + \ldots\ldots = 0$	$-2 - \ldots\ldots = -11$
$\ldots\ldots + 287 = 0$	

2 — SCHIMBAREA SEMNULUI

— Luați un **număr întreg rațional**

— . . .

— Să-l numim a

Atenție !

Dacă ați luat 2	$a = 2 = +2$
Dacă ați luat 1963	$a = 1963 = +1963$
Dacă ați luat — 87	$a = -87$

Nu pierdeți din vedere că a arată un **număr întreg rațional**, adică

un număr natural prevăzut cu un semn

Însemnăm cu $-a$ numărul a care și-a schimbat semnul (sau culoarea)

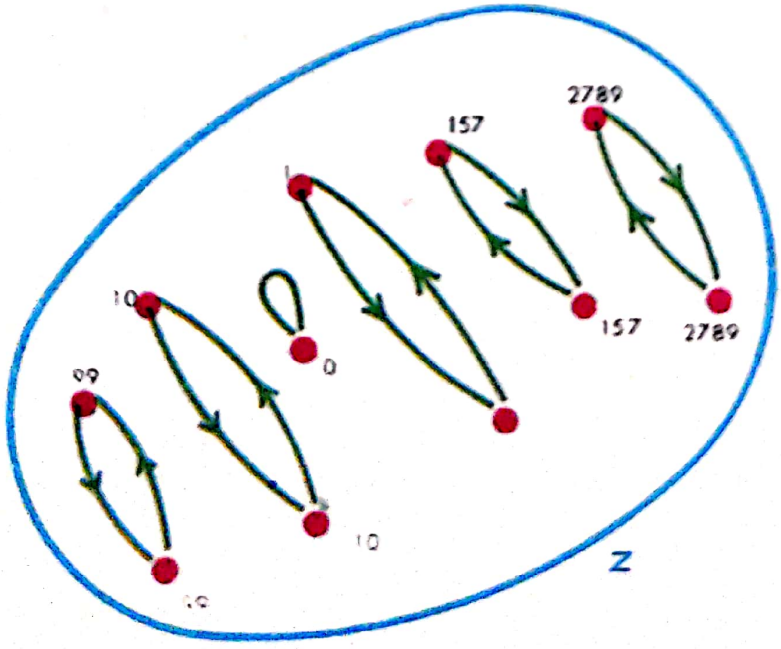
Astfel

Dacă $a = 2$:	$-a = -2$
Dacă $a = 1963$:	$-a = -1963$
Dacă $a = -87$:	$-a = +87 = 87$
Dacă $a = -3$:	$-a = 3$
Dacă $a = 0$:	$-a = 0$

$$-(-a) = a$$

Desenați cîteva săgeți ale funcției

$Z \to Z : z \to -z$



Scanned with OKEN Scanner

Remarcați că funcția este egală cu reciproca . . . aceasta fiind deci tot o funcție.

Astfel $Z \to Z : z \to -z$ este o **permutare** a lui Z.

Mai luați încă un număr întreg rațional și notați-l cu b.

Gîndiți-vă la suma $(-a) + (-b)$.

Bătălia $(-a) + (-b)$ nu este altceva decît bătălia $a + b$, dar combatanții și-au schimbat uniformele !

Rezultatul este deci același, dar cu culoarea schimbată.

$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

$$-(a + b) = (-a) + (-b)$$

Exprimăm acest lucru spunînd că **permutarea**

$$Z \to Z : z \to -z$$

respectă adunarea.

Pentru a simplifica scrierea punem

$$-a - b = (-a) + (-b)$$
$$a - b = a + (-b)$$

De unde formula

$$-(a + b) = -a - b$$

EXERCIȚII

(În aceste exerciții fiecare literă indică un număr întreg rațional)

1.

$a =$	87	$-a =$
$a =$	-13	$-a =$
$a =$	0	$-a =$
$-a =$	-1	$a =$
$-a =$	7	$a =$
$b =$	-1987	$-b =$
$-c =$	0	$c =$
$-c =$	1.000.000	$c =$

2. Luați un număr întreg rațional; notați-l cu a.

Avem iarăși

$$a - a = a + (-a) = (-a) + a = -a + a = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Acest negustor a cumpărat cafea de 200 franci. O revinde cu 150 franci. Care este **beneficiul** lui?

4. Totalul punctelor la matematică, în această școală, este de 450. Pentru a trece clasa, sînt necesare jumătate din puncte. Roger a obținut 227 puncte. Cîte puncte îi **lipsesc** ca să treacă clasa?

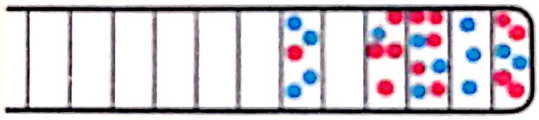
5.

$-(2+3) = -2-3$
$-(4+7) =$
$-(25+12) =$
$-(2-3) = -2+3$
$-(12-8) =$
$-(57-102) =$
$-(-25+7) = 25-7$
$-(-2+9) =$
$-(-12+3) =$

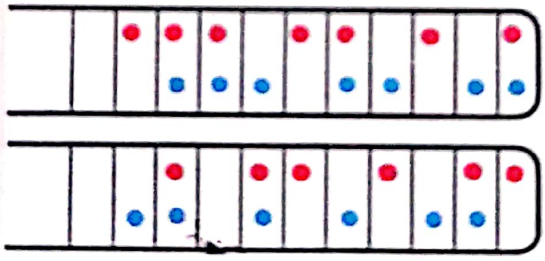
$-(-12-5) =$
$-(a+b) =$
$-(x+y) =$
$-(x-y) =$
$-(-x+y) =$
$-(-u-v) =$
$-(x+2) =$
$-(3-x) =$

6. $x = a - b \iff -x = -a + b = b - a$

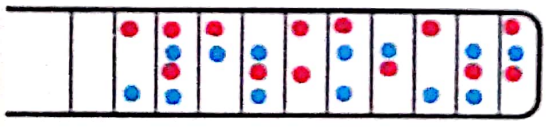
7. Care este numărul reprezentat pe această abacă?



8. Care sînt cele două numere reprezentate pe aceste două abace?



Care este suma acestor numere?
Este numărul reprezentat pe abaca de mai jos.



9. Dacă f indică permutarea $Z \to Z: x \to -x$, compusa $f^2 = f \circ f$ este transformarea identică a lui Z.

Scanned with OKEN Scanner

3 — PROPRIETĂȚILE LUI Z

Am văzut că **legea + este totdeauna definită în Z:**

Dacă fiecare din literele a, b *indică un număr întreg rațional, atunci* $a + b$ *este un număr întreg rațional.*

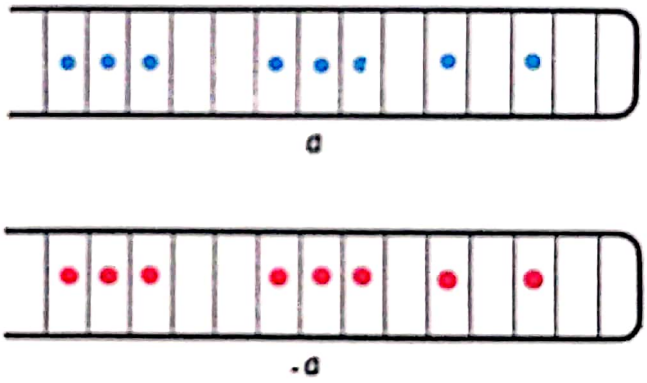
Pentru a găsi $a + b$ putem utiliza abaca. Vom reprezenta numerele pozitive cu pionii roșii, iar numerele negative cu pionii albaștri.

Dacă abaca este acoperită cu pioni de o singură culoare, aplicăm simplu legea sistemului binar. Dacă abaca este ocupată de pioni de ambele culori, bătălia se dă ca la paragraful precedent.

Avem în mod clar

$$a + b = b + a$$
$$a + o = o + a$$
$$a + (-a) = -a + a = o$$

Să amintim că $-a$ **este numărul obținut plecînd de la** a**, schimbîndu-i semnul** (sau culoarea).



Fie a, b, c trei numere întregi raționale.

Să le reprezentăm pe fiecare printr-o linie de pioni roșii sau albaștri pe o abacă mare.

Primele două linii reprezintă deci numărul $a + b$.

Cele trei linii reprezintă numărul $(a + b) + c$.

Ultimele două rînduri reprezintă numărul $b + c$.

Numărul reprezentat de toate jetoanele abacei este deci tot $a + (b + c)$.

Am arătat deci că **adunarea numerelor întregi raționale este asociativă.**

Cu alte cuvinte: dacă fiecare din literele a, b, c reprezintă un număr întreg rațional

$$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

ne va fi permis să facem economie de paranteze:

$$\boxed{a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)}$$

Am văzut că:

Dacă $a, b \in Z$	atunci $a + b \in Z$
Dacă $a, b, c \in Z$	atunci $(a + b) + c = a + (b + c)$
Dacă $a \in Z$	atunci $a + 0 = 0 + a = a$
Dacă $a \in Z$	atunci $-a \in Z$ și $(-a) + a = a + (-a) = 0$

Exprimăm printr-o singură frază toate proprietățile cuprinse în cadrul de mai sus, spunînd că

$Z, +$ este un grup

Deoarece știm în plus că adunarea este comutativă, vom preciza

$Z, +$ este un grup comutativ

Numărul 0 este numărul **neutru** al grupului $Z, +$.
Pentru orice $z \in Z$, elementul $-z$ este numit **simetricul** lui z.

EXERCIȚII

1. $\omega, +$ nu este un grup.

2. $2Z = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, 8, -8, \ldots\}$ este mulțimea numerelor care sînt reprezentate pe abacă lăsînd vidă căsuța din extremitatea dreaptă. Ce puteți spune despre suma acestor două numere?
Adunarea în această mulțime este asociativă și comutativă.
Dacă $a \in 2Z$, ce puteți spune despre $-a$?
Puteți afirma acum că $2Z, +$ este un grup comutativ.

3. $\{0\}, +$ este un grup comutativ.

Scanned with OKEN Scanner

4. (Literele reprezintă numere întregi raționale).

$-(2+5+6) = -2-5-6$

$-(2-5+6) =$ $\qquad$ $-(-5+9+217) =$

$-(7-9+11) =$ $\qquad$ $-(a-b+c-d) =$

5. Dacă fiecare din litere reprezintă un număr întreg rațional:

$$\begin{aligned} 87+2-2&=87 \\ 98-2+2&=98 \\ -57+2-2&= \\ -63-2+2&= \\ -19+21-21&= \\ 153+a-a&= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7+83-7&=83 \\ -5+97+5&=97 \\ -98+3+98&=3 \\ -99-b+b&= \\ a+b-b&= \\ b-a+a&= \end{aligned}$$

6. Dacă fiecare literă reprezintă un număr întreg rațional

$$\begin{aligned} a+b=c &\iff a=c-b \\ x+a=b &\iff x=b-a \\ x+7=2 &\iff x= \\ 9+x=7 &\iff x= \end{aligned}$$

7. Dacă fiecare literă reprezintă un număr întreg rațional

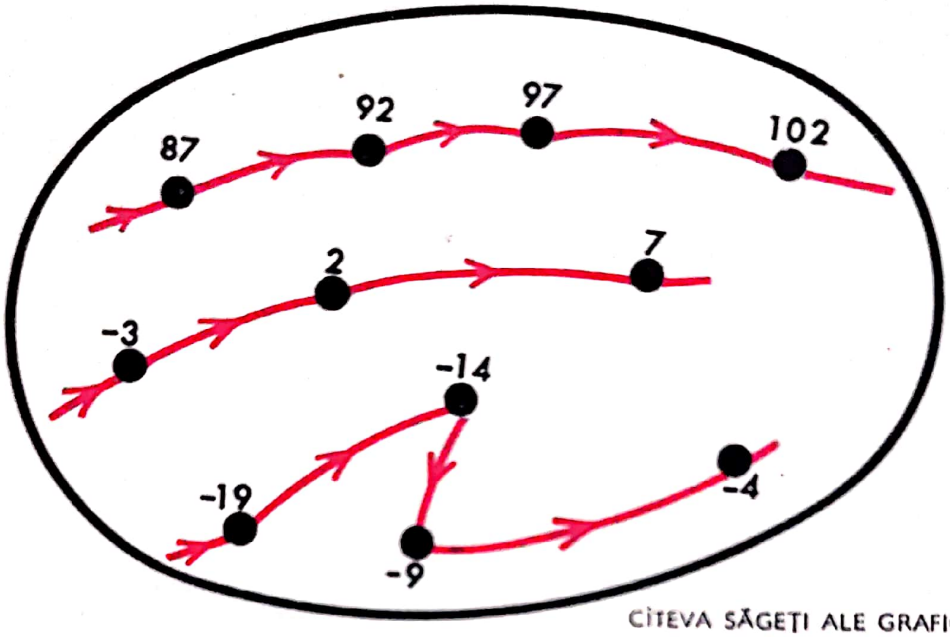
$2-x=7 \iff x-2=-7 \iff x=-7+2$

$9-x=-3 \iff \qquad \iff x=$

$-2-x=-1 \iff \qquad \iff x=$

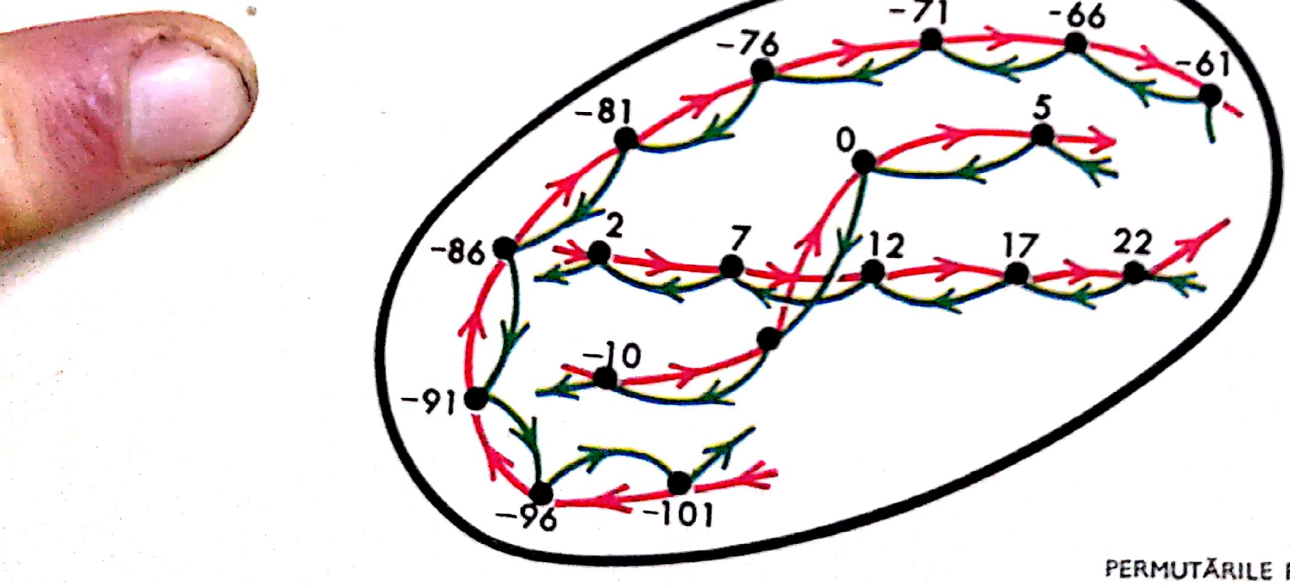
4 — ECUAȚII ÎN Z, +

Pe o diagramă reprezentați cîteva numere întregi raționale și trasați toate săgețile posibile ale funcției $Z \to Z : x \to x + 5$



CÎTEVA SĂGEȚI ALE GRAFICULUI FUNCȚIEI
$Z \to Z : x \to x + 5$
GRAFICUL 144

Care este relația reciprocă a acestor funcții?
— Este **funcția** $Z \to Z : x \to x - 5$
— Deoarece reciproca funcției $x \to x + 5$ este o funcție, $x \to x + 5$ și $x \to x - 5$ sînt **permutări reciproce.**



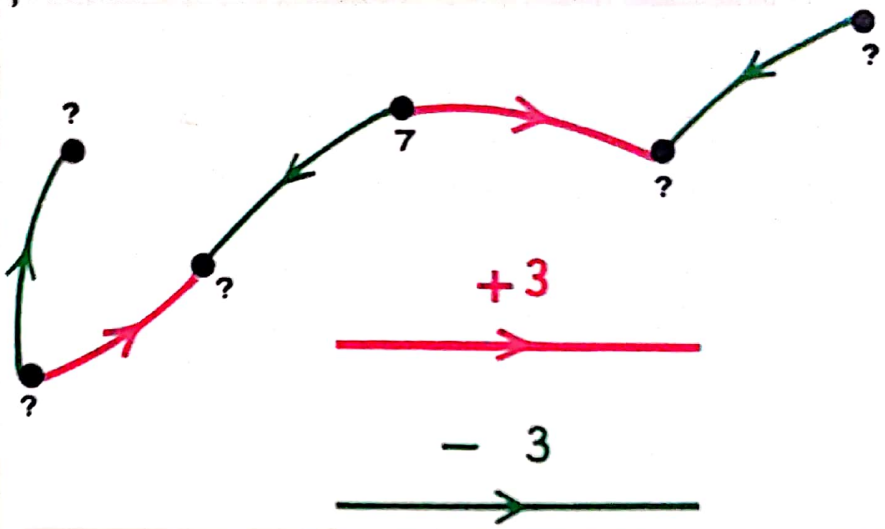
PERMUTĂRILE RECIPROCE
$Z \to Z : x \to x + 5$
$Z \to Z : x \to x - 5$
GRAFICUL 145

Scanned with OKEN Scanner

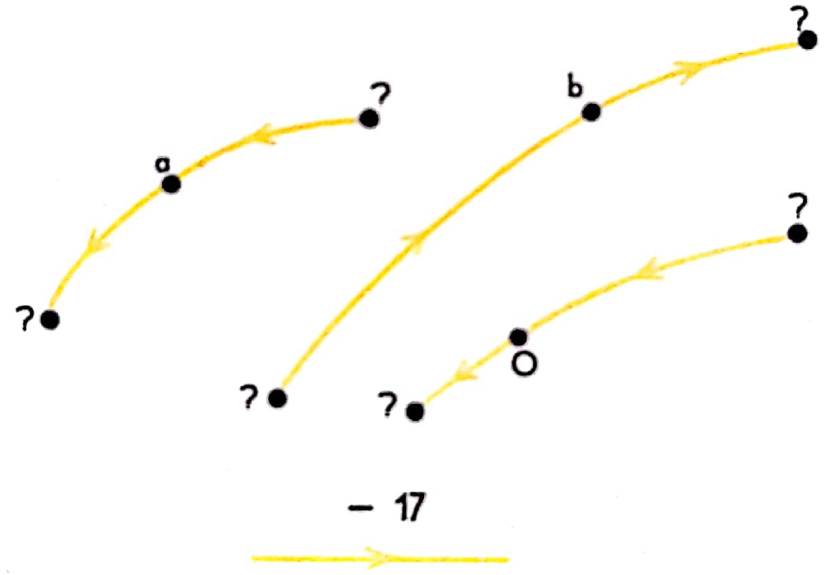
EXERCIȚII

1. Pe graficul 145, a fost omis un număr.
Îndreptați această omisiune.

2.



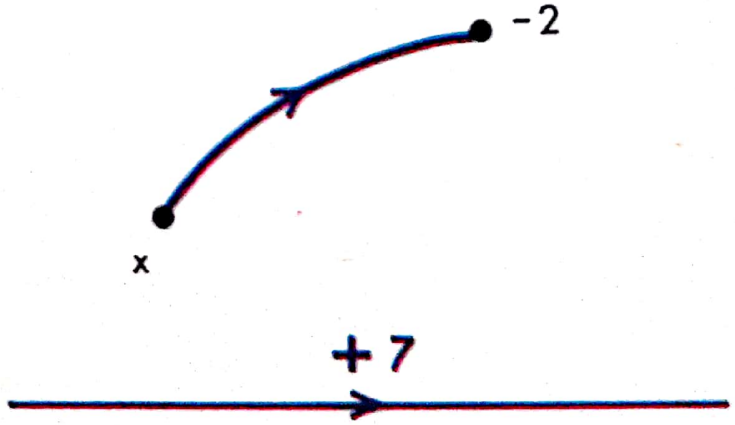
GRAFICUL 146



GRAFICUL 147

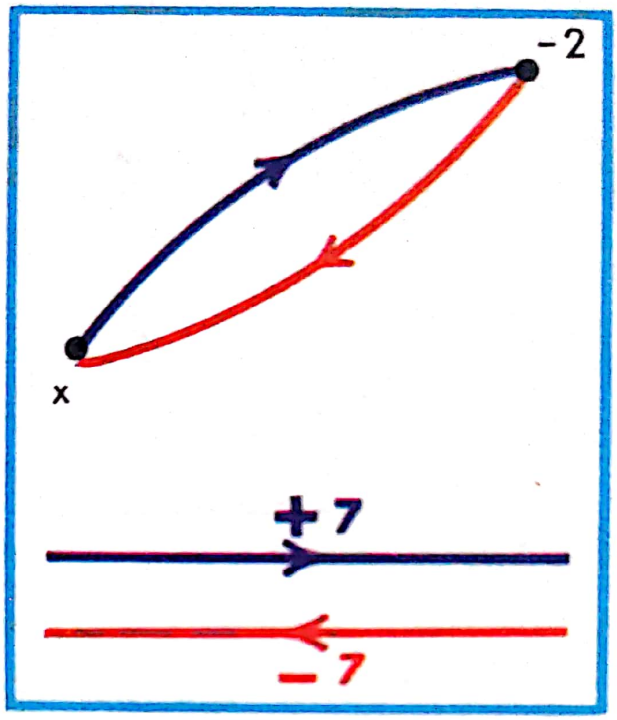
Desenați cu albastru permutarea reciprocă.

Exprimați informația $x + 7 = -2$, printr-un fragment de grafic.



GRAFICUL 148

Reprezentați relația reciprocă:



Ce concluzie trageți cu privire la x?

$$x = -2-7$$

Pe acest desen, săgeata mov arată informația

$$x+7=-2$$

Săgeata portocalie arată informația

$$x=-2-7$$

Fiecare din aceste săgeți ne permite s-o trasăm pe cealaltă.

Deci

$$x+7=-2 \iff x=-2-7$$

A trece de la

$$x+7=-2$$

la

$$x=-2-7=-9$$

înseamnă a **rezolva ecuația** $x+7=-2$

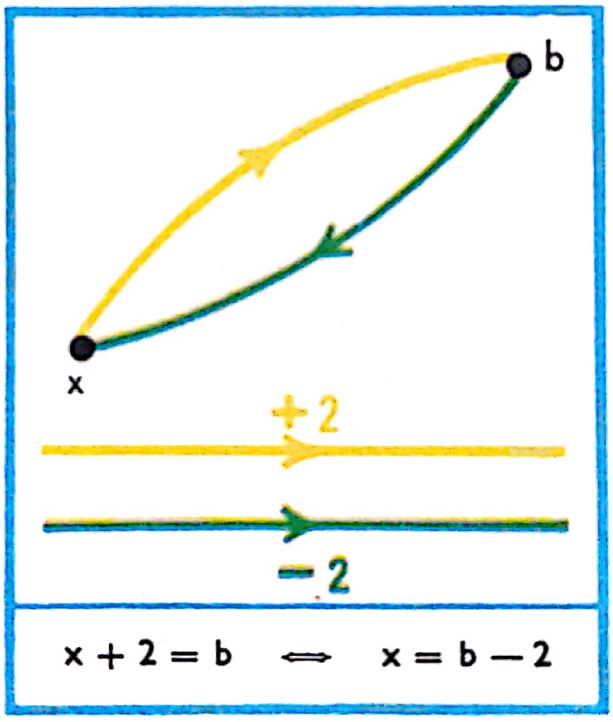
Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

În exercițiile de mai jos, literele a, b, c reprezintă numere întregi raționale

1. Rezolvați ecuațiile de mai jos

$x + 2 = 2$	$x - 2 = 2$
$x + 2 = 1$	$x - 2 = 1$
$x + 3 = 7$	$x - 3 = 7$
$x + 3 = 6$	$x - 3 = 6$
$x + 3 = 3$	$x - 3 = 3$
$x + 3 = 2$	$x - 3 = 2$
$x + 3 = 0$	$x - 3 = 0$
$x + 17 = 58$	$x - 17 = 58$
$x + 58 = 17$	$x - 58 = 17$
$x + 15 = -2$	$x - 15 = -2$
$x + 15 = 0$	$x - 15 = 0$
$x + 15 = -3$	$x - 15 = -3$
$x + 27 = 3$	$x - 27 = 3$

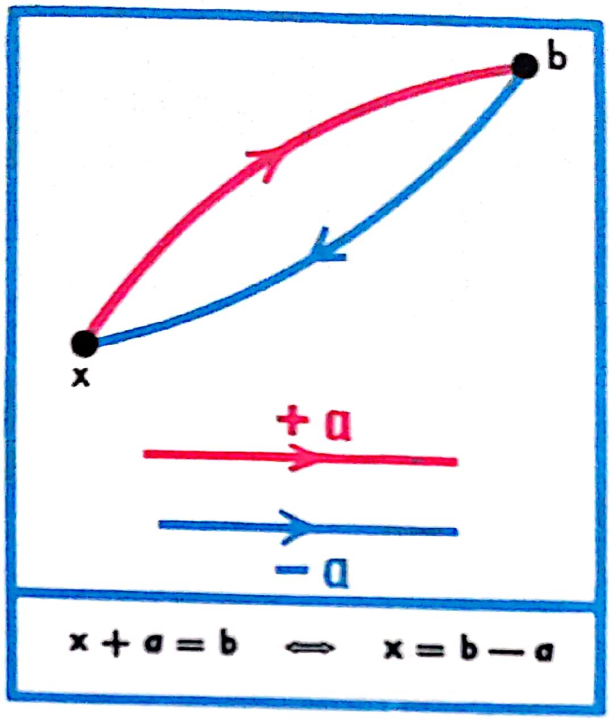


Rezolvați ecuațiile de mai jos

$x + 2 = b$	$x - 2 = b$
$x + 3 = b$	$x - 3 = b$
$x + 17 = b$	$x - 17 = b$
$x + 58 = b$	$x - 58 = b$
$x + 15 = b$	$x - 15 = b$
$x + 27 = b$	$x - 27 = b$

Scanned with OKEN Scanner

3.



Rezolvați ecuațiile

$x + a = b$
$x - a = b$
$x + a = -b$
$a + x = b$

$x + a \cdot b = c$
$x + a \cdot c = b$
$x + b \cdot c = a$
$x - a \cdot c = b$
$-x - a = b$

4. Rezolvați ecuația $-x - a = b$

$(-x - a = b \iff -x = b + a \iff x = -b - a)$

5. Rezolvați ecuațiile

$b - x = a$
$1000 - x = 7$
$ac - x = -b$
$7 = 3 - x$
$x - 7 = 9$
$x - 2 = 0$
$-13 + x = 0$
$x - (a + b) = c$
$a + b + x = c$

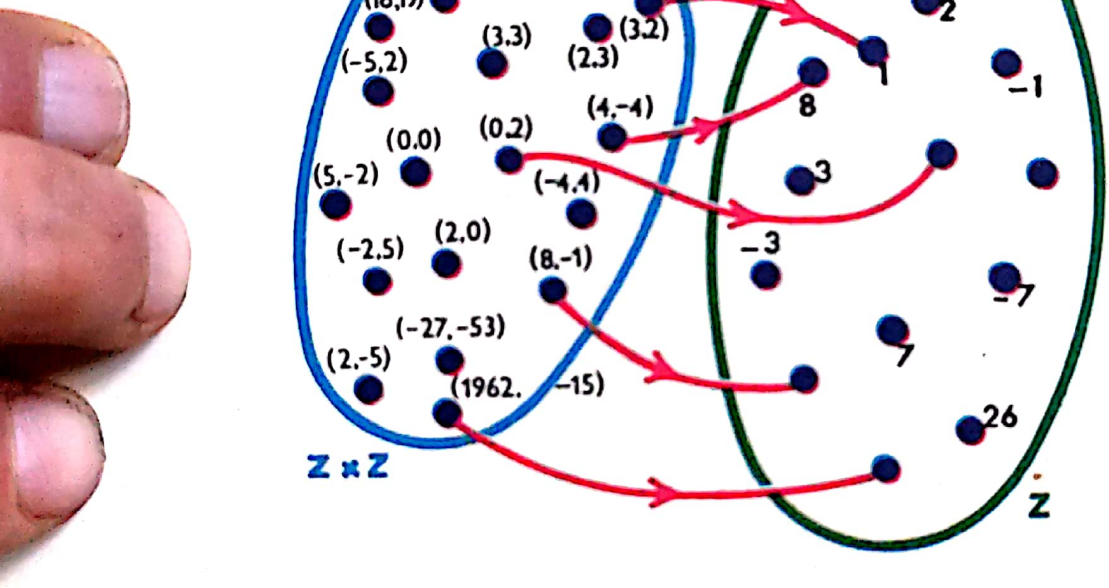
$0 = -x + 385$
$-x = 1287$
$-2 - x = -2$
$-5 = -4 + x$
$-x - 97 = 0$
$5 = -x + 1953$
$-1217 - x = -1.000.000$
$b - x = a + c$
$b - a + x = -c$

Scanned with OKEN Scanner

5 — SCĂDEREA

DEFINIȚIA 1 — *Dacă fiecare din literele* **a**, **b** *reprezintă un număr întreg rațional, numim numărul* **a — b** *diferența dintre* **a** *și* **b**. *Operația care se aplică oricărei perechi de numere întregi spre a obține diferența dintre ele, se numește scădere.*

Completați graficul de mai jos.



$Z \times Z \to Z : (x, y) \to x - y$

SCĂDEREA ÎN Z

GRAFICUL 149

EXERCIȚII

1. Completați graficul 149.

2. $1 - 0 = 1 \neq -1 = 0 - 1$.
Deci, scăderea *nu* este comutativă.
Justificați acest lucru.

Scanned with OKEN Scanner

3. Dacă fiecare din literele a, b reprezintă un număr rațional întreg

$$a = -a \iff a = 0$$
$$a - b = b - a \iff a = b$$

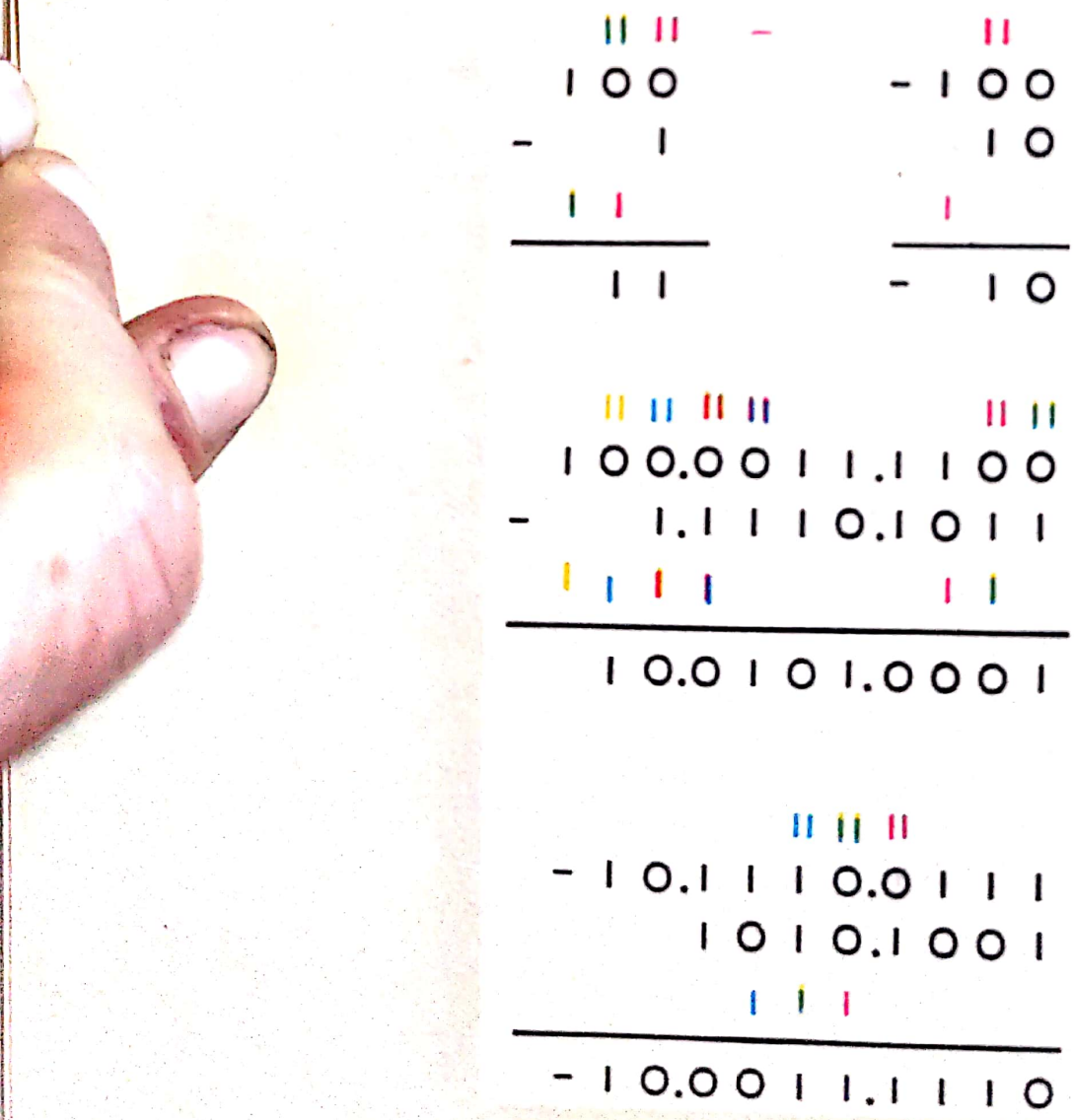
4. $1 - (1 - 1) = 1 \neq -1 = (1 - 1) - 1$
Deci scăderea *nu* este asociativă.
Explicați!

5. Dacă fiecare din literele a, b, c reprezintă un număr întreg rațional

$$a - (b - c) = (a - b) + c$$

6. $100 - 1 = 11$
$10 - 100 = -10$

7. Explicați!



6 — DEFINIȚIA ÎNMULȚIRII NUMERELOR ÎNTREGI RAȚIONALE

Dacă fiecare din literele a, b reprezintă un număr *natural*

$$a\cdot b = \underbrace{b + \ldots\ldots + b}_{a \text{ termeni}} = \underbrace{a + \ldots\ldots + a}_{b \text{ termeni}}$$

Vom mai defini de asemenea

$$a\cdot(-b) = \underbrace{-b - \ldots\ldots - b}_{a \text{ termeni}} = -\underbrace{(b + \ldots\ldots + b)}_{a \text{ termeni}} = -(a\cdot b)$$

$$(-a)\cdot b = \underbrace{-a - \ldots\ldots - a}_{b \text{ termeni}} = -\underbrace{(a + \ldots\ldots + a)}_{b \text{ termeni}} = -(b\cdot a)$$

Deci :

$$(-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -(a\cdot b) = -(b\cdot a) = (-b)\cdot a = b\cdot(-a)$$

Dacă a reprezintă un număr natural,

a înmulți un număr natural cu $-a$
înseamnă a-l înmulți cu a și a schimba semnul produsului.

EXERCIȚII

1. $(-7)\cdot 6 = 7\cdot(-6) = -(7\cdot 6) = -(6\cdot 7) = (-6)\cdot 7 = 6\cdot(-7) = -42$
2. $(-8)\cdot 9 = -72$
3. $13\cdot(-13) = -169$
4. $10\cdot(-50) =$
5. $(-15)\cdot 14 =$
6. $0\cdot(-7) = 0$
7. $(-8)\cdot 0 =$

Scanned with OKEN Scanner

Definim produsul a două numere întregi negative **generalizînd** regula precedentă:

Dacă a reprezintă un număr întreg natural,

a înmulți un număr întreg rațional cu — *a*

înseamnă a-l înmulți cu *a* și a schimba semnul produsului.

EXERCIȚII

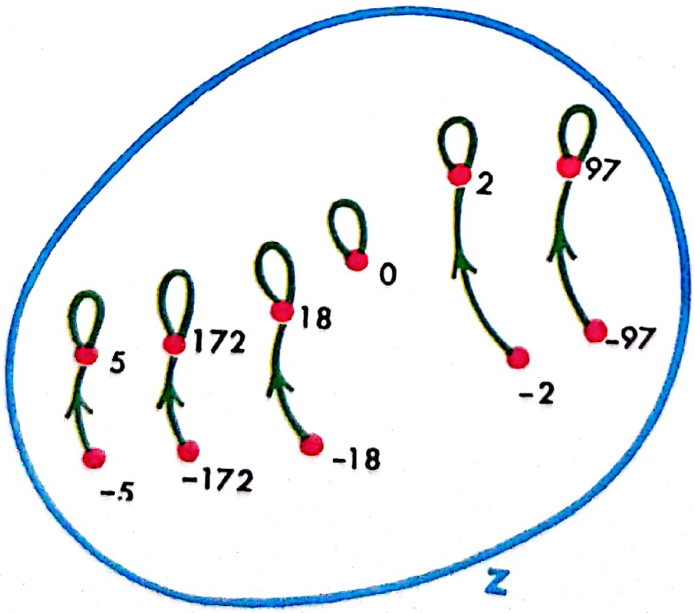
1. $(-7)\cdot(-8) = -(7\cdot(-8)) = 7\cdot 8$
2. $(-12)\cdot(-13) = 12\cdot 13 = 13\cdot 12 = (-13)\cdot(-12)$
3. $(-9)\cdot(-7) = 9\cdot 7 = 7\cdot 9 = (-7)\cdot(-9)$

Remarcați că **produsul a două numere întregi raționale este pozitiv dacă și numai dacă factorii sînt de același semn. Produsul este negativ, dacă și numai dacă factorii nu au același semn.**

DEFINIȚIA 2 — *Numim* ***valoare absolută*** *a unui număr întreg rațional, numărul natural obținut prin suprimarea semnului său. Valoarea absolută a lui* ***x*** *va fi notată* $|x|$

Astfel

$|3| = 3,\ |-7| = 7,\ |0| = 0,\ |2787| = 2787,$
$|-123.456.789.012| = 123.456.789.012.$



TRANSFORMAREA LUI Z: $Z \to Z : x \to |x|$
VALOAREA ABSOLUTĂ
GRAFICUL 150

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 3 — **Produsul a două numere întregi raționale este produsul valorilor lor absolute însoțit de semnul +, dacă factorii au același semn; de semnul —, dacă factorii n-au același semn.**

Din această definiție rezultă imediat că dacă a și b reprezintă numere întregi raționale

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Deci

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| = |b| \cdot |a| = |b \cdot a|$$

Un număr întreg rațional este determinat de valoarea lui absolută și de semnul lui.

Deoarece

$$|a \cdot b| = |b \cdot a|$$

și semnul lui $a \cdot b$ = semnul lui $b \cdot a$

deci

$$a \cdot b = b \cdot a$$

și înmulțirea numerelor întregi raționale este **comutativă.**

EXERCIȚII

1. **Pentru orice număr întreg rațional a:**

$$1 \cdot a = a = a \cdot 1$$
$$0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$$

2. **Arătați exactitatea seriei de egalități de mai jos:**

$$|(a \cdot b) \cdot c| = |a \cdot b| \cdot |c| = (|a| \cdot |b|) \cdot |c| = |a| \cdot (|b| \cdot |c|) = |a| \cdot |b \cdot c| = |a(b \cdot c)|$$

în care fiecare din literele a, b, c reprezintă un număr întreg rațional.

Scanned with OKEN Scanner

3. În tabela de mai jos, vi se dă semnul fiecăruia din numerele întregi raționale a, b, c.
Vi se cere să indicați semnul diferiților produși

a	b	c		ab	bc	$(ab)\,c$	$a\,(bc)$
+	+	+	⇒				
−	+	+	⇒				
+	−	+	⇒				
+	+	−	⇒	−	−	−	−
+	−	−	⇒				
−	+	−	⇒				
−	−	+	⇒				
−	−	−	⇒				
			⇒				

Am considerat toate cazurile posibile pentru a, b, c.
N-am stabilit noi că dacă fiecare din literele a, b, c indică un număr întreg rațional, $(a, b) \cdot c$ și $a \cdot (b \cdot c)$ au același semn?

LEMĂ — *Înmulțirea numerelor întregi raționale este asociativă și comutativă. Ea admite numărul neutru 1 și numărul absorbant* 0. Această lemă a fost stabilită prin exercițiile precedente.

EXERCIȚII

1. Calculați:

$2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot 5 \cdot (-6) =$ | $(-917) \cdot (-2) \cdot (-1) =$
$5 \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-2) =$ | $(-1) \cdot (-1) =$
$1285 \cdot (-517) \cdot 0 \cdot (-1 \cdot 111 \cdot 111) =$ | $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) =$

2. Calculați primele cinci puteri succesive ale lui 2, 3, 1, 0, −1, −2, −3.
3. **Pătratul oricărui număr întreg rațional este pozitiv.**
Cubul oricărui număr întreg rațional negativ este negativ.
Arătați exactitatea acestor leme și generalizați-le.
4. Explicați și completați

$(-x)^2 = x^2$ | $(-x)^{32} = x^{32}$
$(-x)^3 = -x^3$ | $(-x)^{1.208.407} =$
$(-x)^{17} = -x^{17}$ | $(-x)^{2.000.000.002} =$

5. Dacă fiecare din literele a, b, c indică un număr întreg rațional

$(-a)\,b = -(ab) = a(-b)$
$(-a)(-b) = ab$
$a(-b)\,c = (-a)\,bc = (-a)(-b)(-c)$

6. Dacă $g\colon Z \to Z\colon x \to |x|$, atunci $g^2 = g \circ g = g$

Scanned with OKEN Scanner

7 — INELUL Z, +, ·

Știm că

În ω : înmulțirea este distributivă în raport cu adunarea.

Vom arăta că

În Z: înmulțirea este distributivă în raport cu adunarea.

Cu alte cuvinte :

> Pentru orice $x, y, z \in Z$: $x(y+z) = xy + xz$

DEMONSTRAȚIE: Dacă $x = 0$, lema este evidentă

Să presupunem deci că $x \neq 0$

Dacă x este pozitiv, punem $x = a$

Dacă x este negativ, punem $x = -a$.

Trebuie deci să demonstrăm că pentru orice număr natural a avem :

$$a(y+z) = ay + az \text{ și } (-a)(y+z) = (-a)\cdot y + (-a)\cdot z$$

Să stabilim mai întîi prima formulă

$$a(y+z) = \underbrace{(y+z)+(y+z)+\ldots+(y+z)}_{a \text{ termeni}}$$

$$= \underbrace{(y+y+\ldots+y)}_{a \text{ termeni}} + \underbrace{(z+\ldots+z)}_{a \text{ termeni}}$$

$$= ay + az$$

Să demonstrăm a doua formulă

$$\begin{aligned}(-a)(y+z) &= -(a(y+z)) \\ &= -(ay+az) \\ &= -(ay)-(az) \qquad \text{(prima formulă)} \\ &= (-a)y + (-a)z\end{aligned}$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

Scanned with OKEN Scanner

Să recapitulăm proprietățile lui $Z, +, \cdot$, adică ale mulțimii Z a numerelor întregi raționale, prevăzută cu adunarea și înmulțirea :

1. $Z, +$ este un grup comutativ.

2. Înmulțirea definită în Z este asociativă, comutativă și distributivă în raport cu adunarea.

Exprimăm totalitatea proprietăților precedente spunînd că

$Z, +, \cdot$ este un inel comutativ.

În această expresie, cuvîntul comutativ se aplică înmulțirii.

Pentru orice număr întreg rațional z, avem

$$1 \cdot z = z$$

Exprimăm acest lucru spunînd că numărul 1 este *neutru pentru înmulțire* și că este unitatea inelului.

EXERCIȚII

1. Explicați și completați

(Literele arată numere întregi raționale)

$2 \cdot (x + 3) = 2x + 6$
$2 \cdot (x - 3) = 2x - 6$
$2 \cdot (3 - x) = 6 - 2x$
$(-2) \cdot (x - 3) = -2x + 6$
$(-2) \cdot (3 + x) = -6 - 2x$
$3 \cdot (1 - bc) =$
$(-3) \cdot (bc - 2) = -3bc + 6$
$12 \cdot (x + 3) + 5 \cdot (x - 7) = 17x + 1$
$(-6) \cdot (x - 6) + 6 \cdot (x + 6) =$
$3(x + y + z) = 3x + 3y + 3z$
$(-3) \cdot (x - y + z) =$
$6 \cdot (2x - 3y - 3z) = 12x - 18y - 18z$
$a \cdot (x + y + z) = ax + ay + az$
$a \cdot (x - y - z) =$
$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$
$(x - 1)(x + 7) =$
$(x - 2)(x - 3) =$

Scanned with OKEN Scanner

$(x + 5)(5 - x) = 25 - x^2$
$(a + b)(x + y) = ax + bx + ay + by$
$(a - b)(x - y) = ax - bx - ay + by$
$(2x + 1)(3x + 5) = 6x^2 + 13x + 5$
$(2x - 3)(5 - 4x) =$
$(2x - 1)(7 + 5x) = 10x^2 + 9x - 7$
$(5 - 8x)(5 + 8x) =$

2. Stabiliți că orice mulțime E,

$\mathcal{P}\,E, \Delta, \cap$ este un inel comutativ.

Diferența simetrică Δ joacă aici rolul adunării, iar intersecția $\cap$ pe cel al înmulțirii. Rolul lui zero este îndeplinit de $\varnothing$, iar cel al unității de E.

3. Explicați și completați.
(Literele reprezintă numere întregi raționale)

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
$(x - 1)^2 =$
$(a - b)^2 =$
$(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$
$(7 + 4y)^2 =$

4. Explicați și completați
(Literele reprezintă mulțimi)

$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$
$(A \cap B) \cup (C \cap D) =$
$(A \cup B) \cap (A \cup B) =$
$(A \cup B) \cup (A \cup B) =$
$(A \cup B) \setminus (A \cup B) =$

5. Explicați și completați
(Literele reprezintă numere întregi raționale)

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$
$(7 - y)(7 + y) =$
$(bc + 1)(1 - bc) =$

Scanned with OKEN Scanner

6. Fie $a, b, c \in Z$
Dacă $a = b \cdot c$, vom spune că b și c divid pe a, ceea ce se scrie

$$b \mid a \quad , \quad c \mid a$$

Arătați exactitatea formulelor

$$a \mid a, \quad a \mid -a, \quad -a \mid a \qquad \text{pentru orice } a \in Z$$

Ați stabilit, deci, că relația $\mid$ este reflexivă și antisimetrică
Relația $\mid$ definită în Z nu este deci o ordine.
Arătați că această relație este totuși tranzitivă.
Arătați exactitatea formulei

$$1 \mid a \mid 0 \qquad \text{pentru orice } a \in Z$$

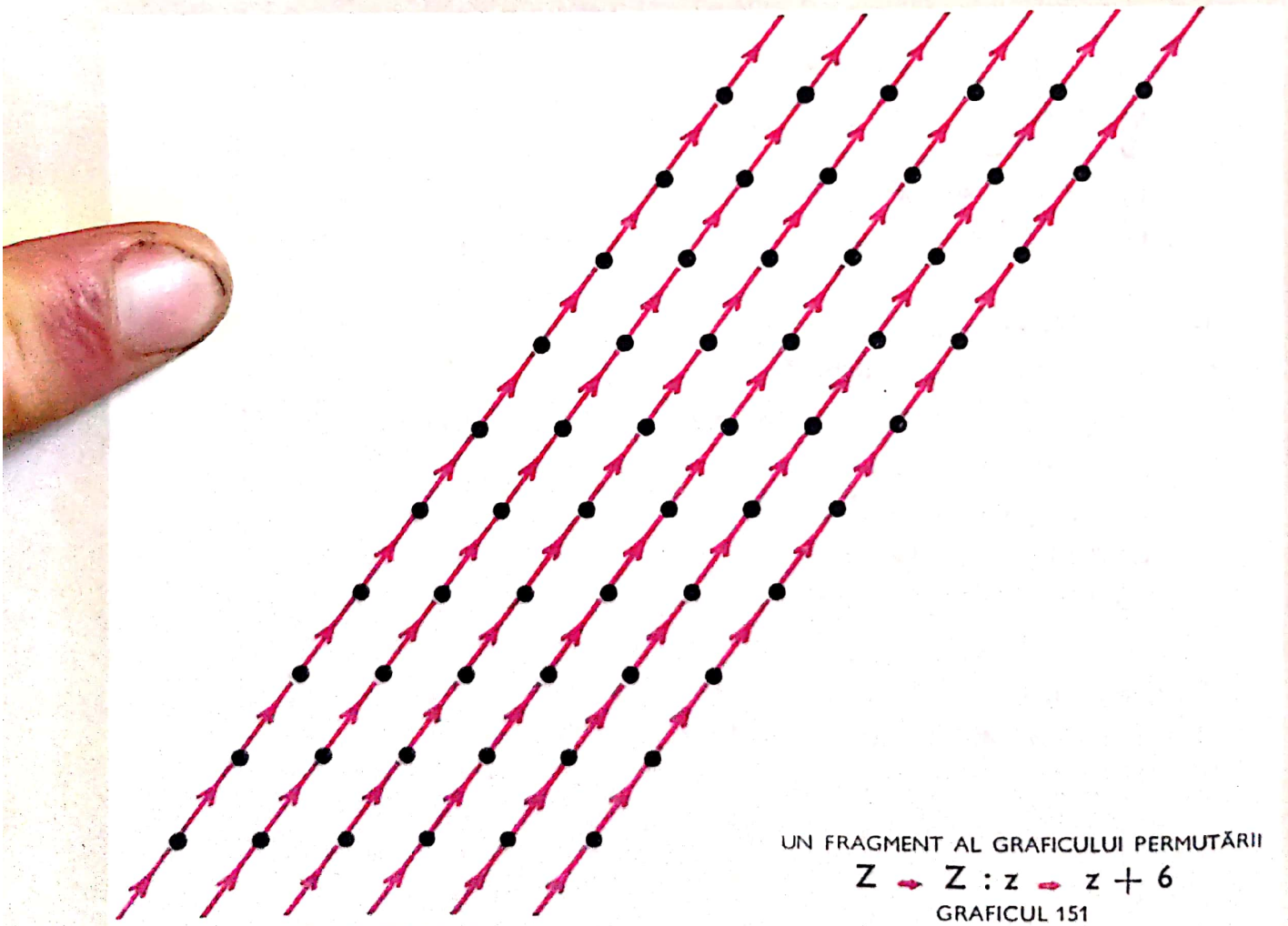
Ilustrați rezultatul precedent prin exemple numerice.

7. Dacă $x, y, z \in Z$: $x \mid y \Rightarrow x \mid yz$.

8. Dacă $d, x, y \in Z$: $d \mid x$ și $d \mid y \Rightarrow d \mid (x + y)$.

9. Dacă $d, a, b, x, y \in Z$: $d \mid x$ și $d \mid y \Rightarrow d \mid (ax + by)$.

10. Comentați graficul de mai jos



UN FRAGMENT AL GRAFICULUI PERMUTĂRII
$Z \to Z : z \to z + 6$
GRAFICUL 151

Scanned with OKEN Scanner

11. Explicați și completați.
(Literele reprezintă numere întregi raționale)

$(2a + 3b)(a - 3b) = 2a^2 - 3ab - 9b^2$
$(2a - 3b)(a - 3b) =$
$(x + y + 1)(x + 5) = x^2 + xy + 6x + 5y + 5$
$(2x - y - 6)(3x - 5) =$
$(x - y - 1)\ (1 - x) =$
$(x + y + 1)(x + y + 1) = x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2xy + 1 =$
$= (x + y + 1)^2$
$(x - y + 1)^2 =$
$(x - y - 1)^2 = x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y + 1$

12. Vi se spune că una din literele a, b reprezintă numărul 1, iar cealaltă pe -1, dar nu vi se spune care din ele este 1.
Pentru orice număr întreg rațional c, vom avea însă $abc = -c$.

13. Este noapte tîrziu și pe șoseaua pustie pe care mă găsesc știu că după următoarea stație de benzină există o bifurcație, dar am uitat dacă trebuie s-o iau la dreapta sau la stînga. Nu există nici un indicator, iar stația de benzină este ultimul loc unde aș putea cere lămuriri.
Stația de benzină este condusă de doi frați gemeni care lucrează alternativ. Unul din ei spune totdeauna adevărul, iar celălalt dă totdeauna răspunsuri mincinoase. Cu toate că nu pot distinge pe cei doi frați unul de celălalt, am posibilitatea ca, punînd numai o singură întrebare celui de serviciu, să primesc o informație care-mi va permite s-o iau pe drumul cel bun.
Ce întrebare trebuie să pun?

14. Explicați legătura dintre exercițiile 12 și 13.

15. Arătați exactitatea următoarelor formule:
este adevărat că este greșit că ...
= este greșit că este adevărat că ...
= este greșit că ...
Găsiți alte formule de acest fel.

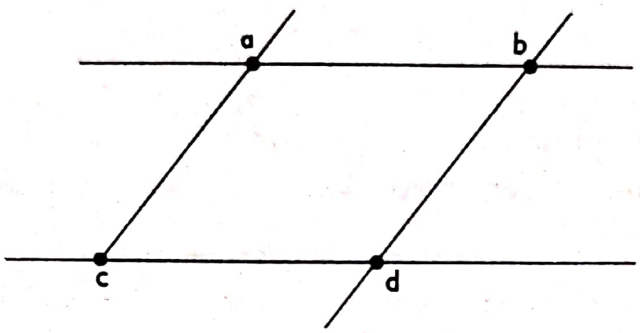
Scanned with OKEN Scanner

21

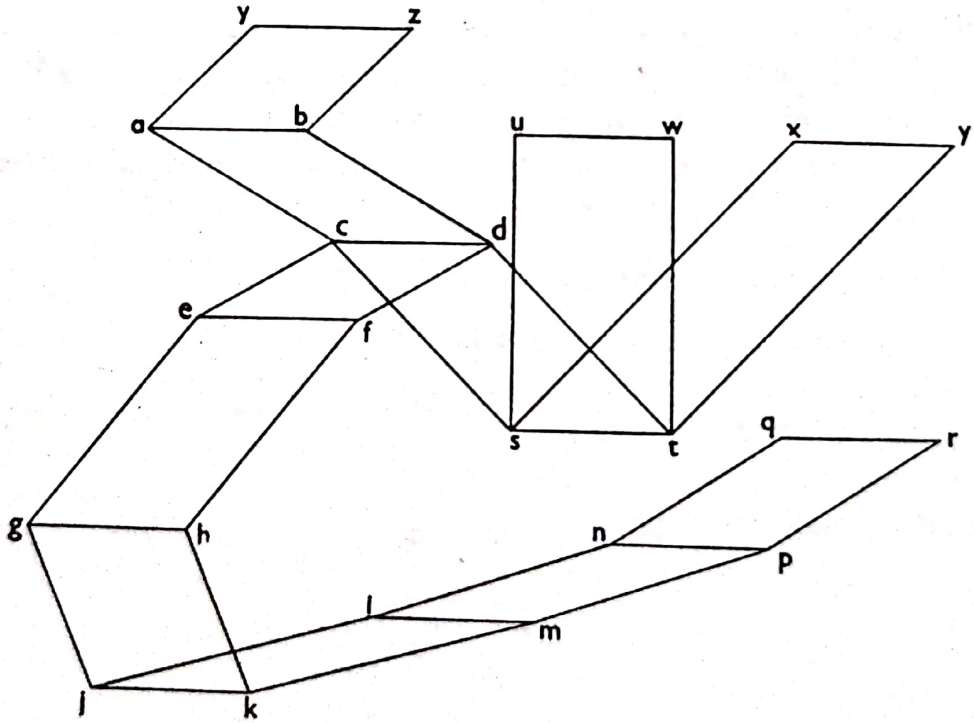
Echipolenţă

1 — PERECHI ECHIPOLENTE

Se dau două puncte, a, $b \in \Pi$.
Construiți un paralelogram $abdc$ care are $[ab]$ ca latură.



Plecînd de la perechea (a, b) ați construit o pereche (c, d).
Vom spune că perechile **(a, b)** și **(c, d)** sînt ***unite printr-un paralelogram.***
Să repetăm acest procedeu.

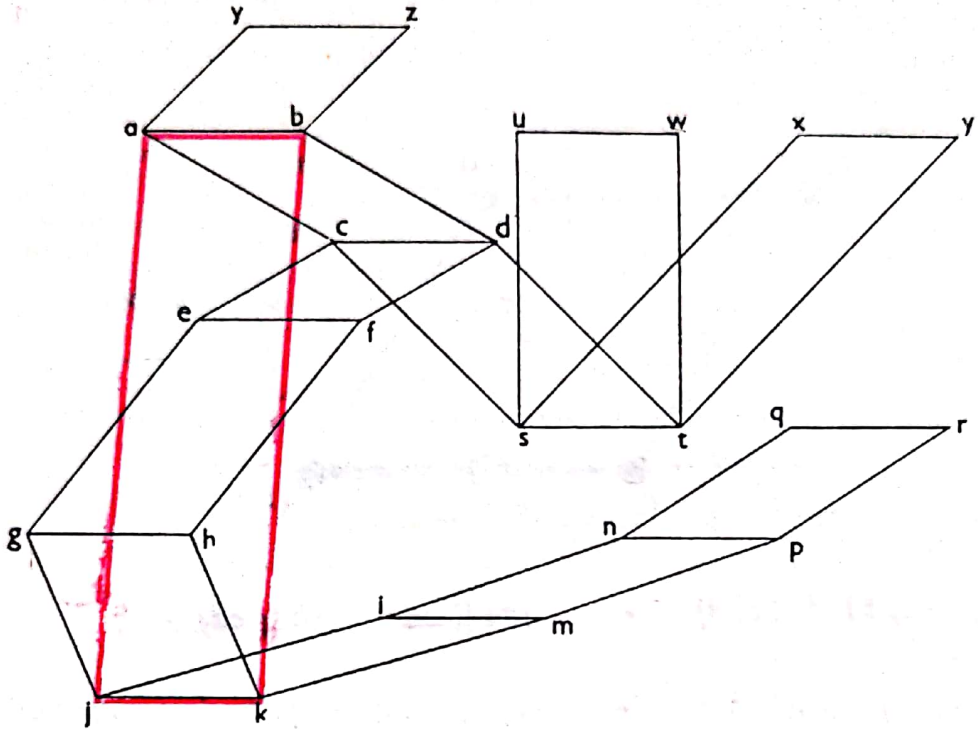


Perechile formate astfel sînt numite **echipolente,** ceea ce se scrie

$(a, b) \uparrow (c, d) \uparrow (e, f) \uparrow (g, h) \uparrow (j, k) \uparrow (l, m) \uparrow (n, p) \uparrow (q, r) \uparrow (s, t) \uparrow (u, w)$
$(a, b) \uparrow (e, f) \uparrow (x, y)$
$(a, b) \uparrow (g, h)$ etc.

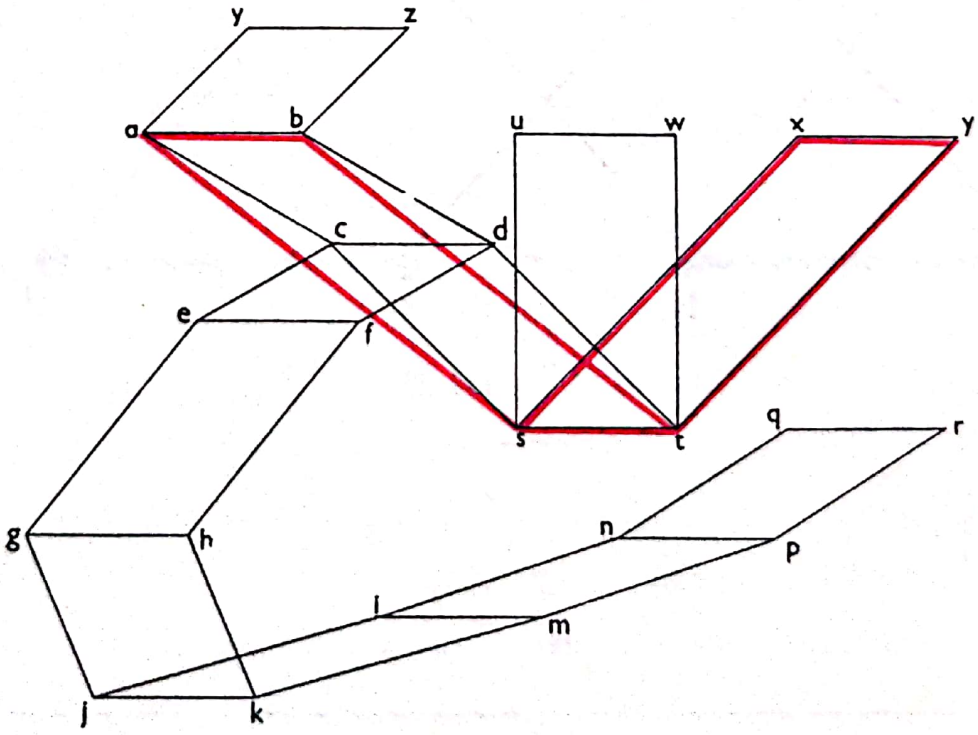
Scanned with OKEN Scanner

Examinați perechile (a, b) și (j, k)
Ele pot fi unite direct printr-un paralelogram !
Vedem acest lucru în mod *experimental*.



$(a, b) \uparrow\uparrow (j, k)$
$ab \parallel jk$
$aj \parallel bk$
$(a, j) \uparrow\uparrow (b, k)$

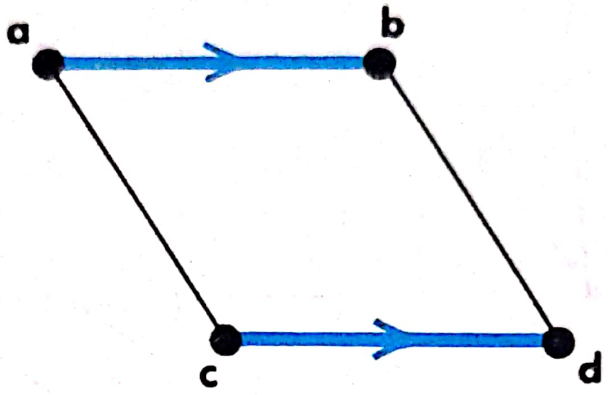
— Explicați legenda acestui desen.
— Examinați acuma cazul *perechilor aliniate* (a, b) și (x, y)
— Deoarece (a, b) și (s, t) pot fi legate printr-un paralelogram, (a, b) și (x, y) vor putea fi legate prin două paralelograme.



Scanned with OKEN Scanner

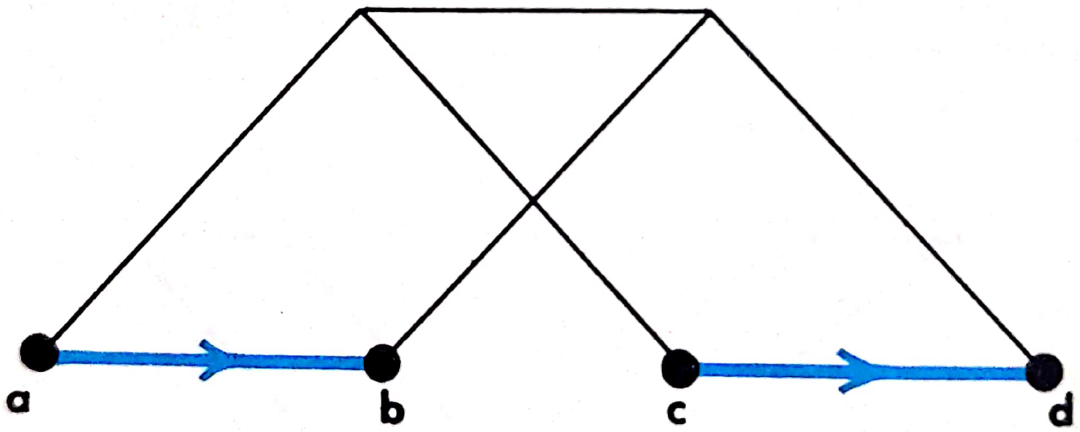
DEFINIȚIA 1

1. *Două perechi de puncte nealiniate sînt* **echipolente** *dacă și numai dacă pot fi unite printr-un paralelogram.*



$$(a, b) \uparrow (c, d) \iff (ac \parallel bd \text{ și } ab \parallel cd)$$

2. *Două perechi (neidentice) de puncte aliniate sînt echipolente dacă și numai dacă ele pot fi unite prin două paralelograme.*



$$(a, b) \uparrow (c, d)$$

3. *Vom admite de asemenea că toate perechile identice sînt echipolente*

$$(a, a) \uparrow (b, b) \uparrow (c, c) \ldots$$

și că orice pereche echipolentă cu o pereche identică este identică.

Scanned with OKEN Scanner

2 — PROPRIETĂȚILE ECHIPOLENȚEI

LEMA 1 — *Echipolența este reflexivă.*

Dacă $a \in \Pi$ avem $(a, a) \uparrow (a, a)$. (Definiția 1, alin. 3).

Dacă $a, b \in \Pi$, perechea (a, b) poate fi unită cu ea însăși prin două paralelograme. Deci $(a, b) \uparrow (a, b)$ (Definiția 1, alin. 2)

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

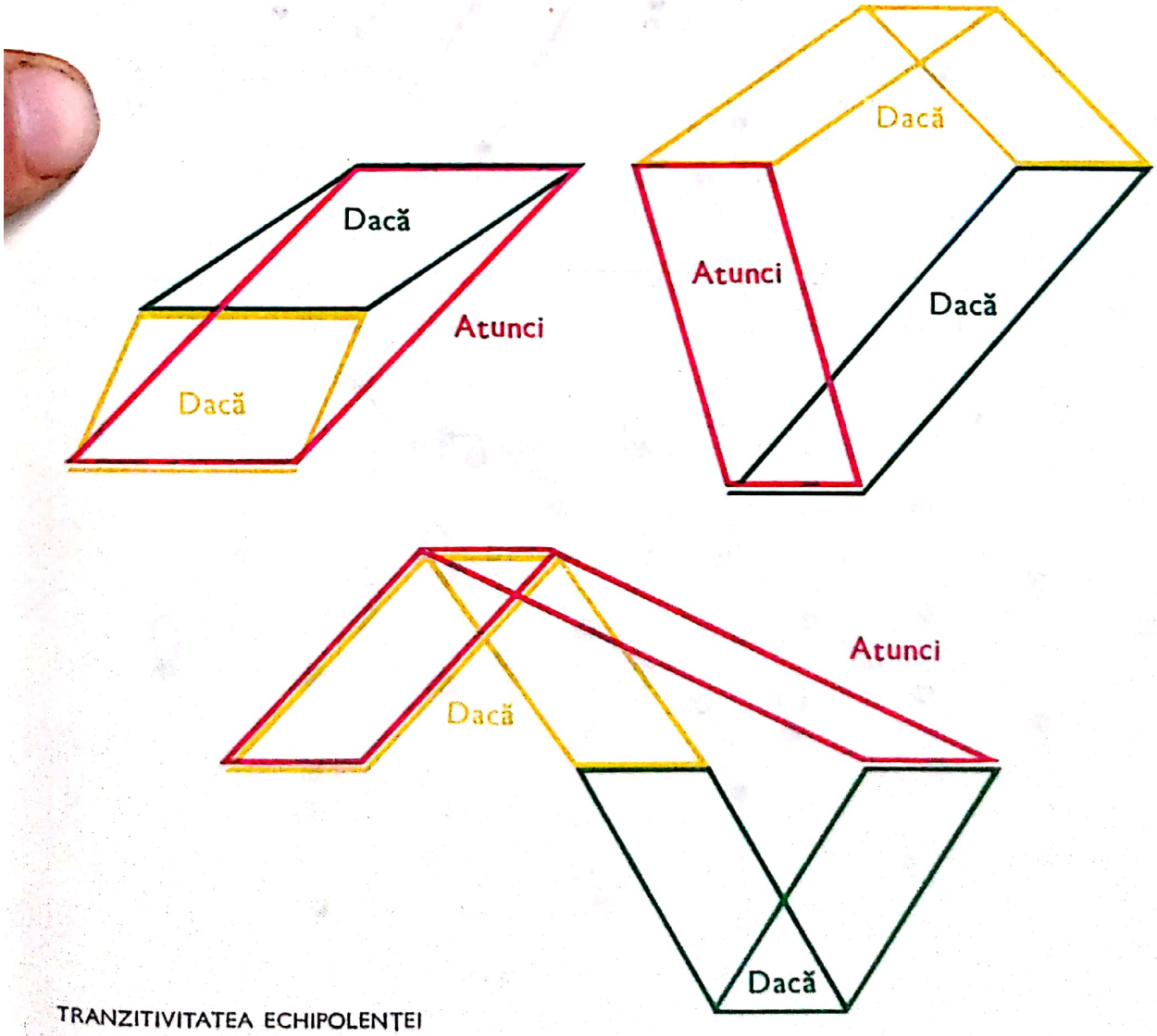
LEMA 2 — *Echipolența este simetrică.*

1. Pentru orice $a, b \in \Pi$: $(a, a) \uparrow (b, b) \Rightarrow (b, b) \uparrow (a, a)$. (Definiția 1, alin. 3).
2. Dacă $(a, b) \uparrow (c, d)$, perechea (c, d) poate fi unită cu (a, b) printr-unul sau două paralelograme. Deci (a, b) este unit cu (c, d) printr-unul sau două paralelograme.

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

Am admis « experimental» **tranzitivitatea** echipolenței.

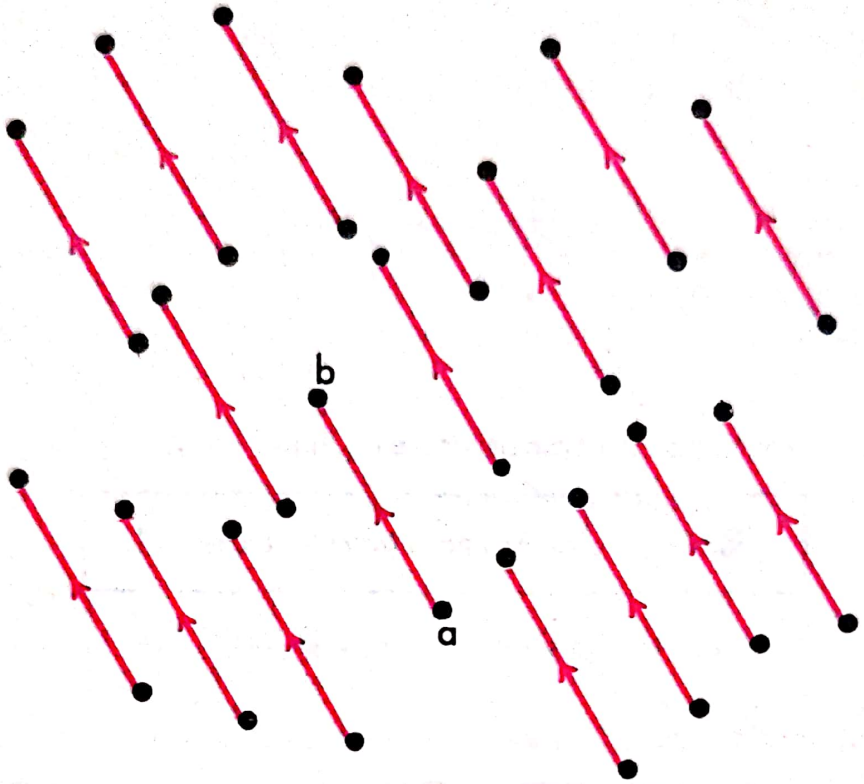
AXIOMA Π 10 — ***Echipolența este tranzitivă.***



TRANZITIVITATEA ECHIPOLENȚEI

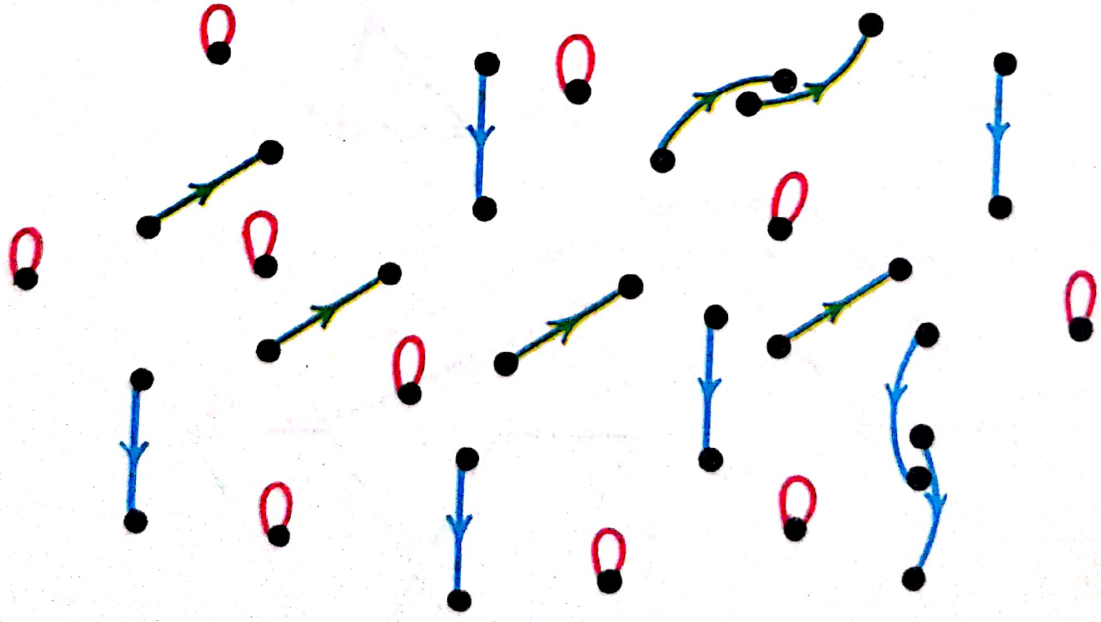
Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 1 — **Echipolența este o echivalență.**
Consecința imediată a *lemelor* 1, 2 și a axiomei Π 10.



CÎTEVA PERECHI ECHIPOLENTE
GRAFICUL 152

Vom reprezenta, de preferință, perechile echipolente prin săgeți drepte de aceeași culoare. Vom recurge la săgeți curbe atunci cînd este nevoie pentru claritatea desenului.



TREI MULȚIMI DE PERECHI ECHIPOLENTE
GRAFICUL 153

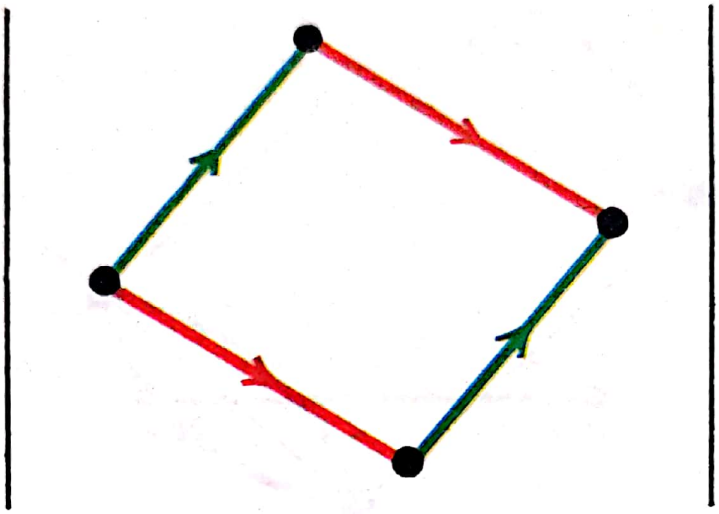
Scanned with OKEN Scanner

LEMA 3 — *Dacă punctele* a, b, c, d *nu sînt aliniate,*

$$(a, b) \uparrow (c, d) \iff (a, c) \uparrow (b, d)$$

Dacă

Atunci



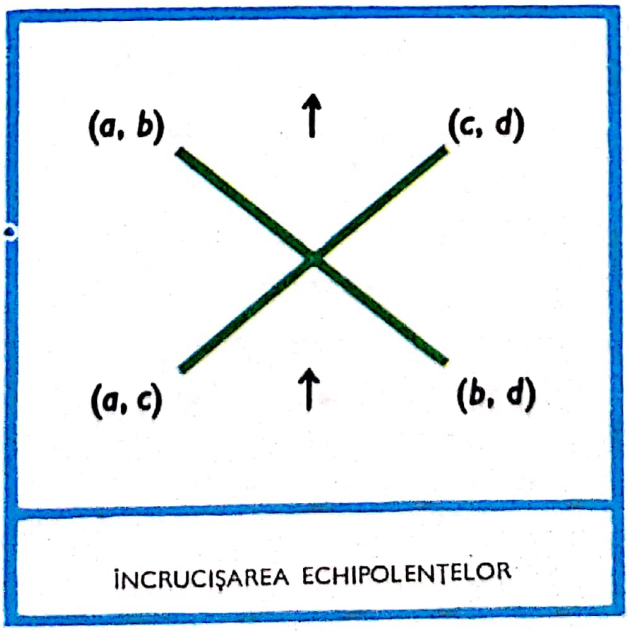
Dacă

Atunci

Vom vedea mai departe că lema 3 rămîne valabilă cînd punctele $a, b, c, d,$ sînt aliniate.

O formulă ca $(a, b) \uparrow (c, d)$ este numită, pe scurt, **echipolență.**

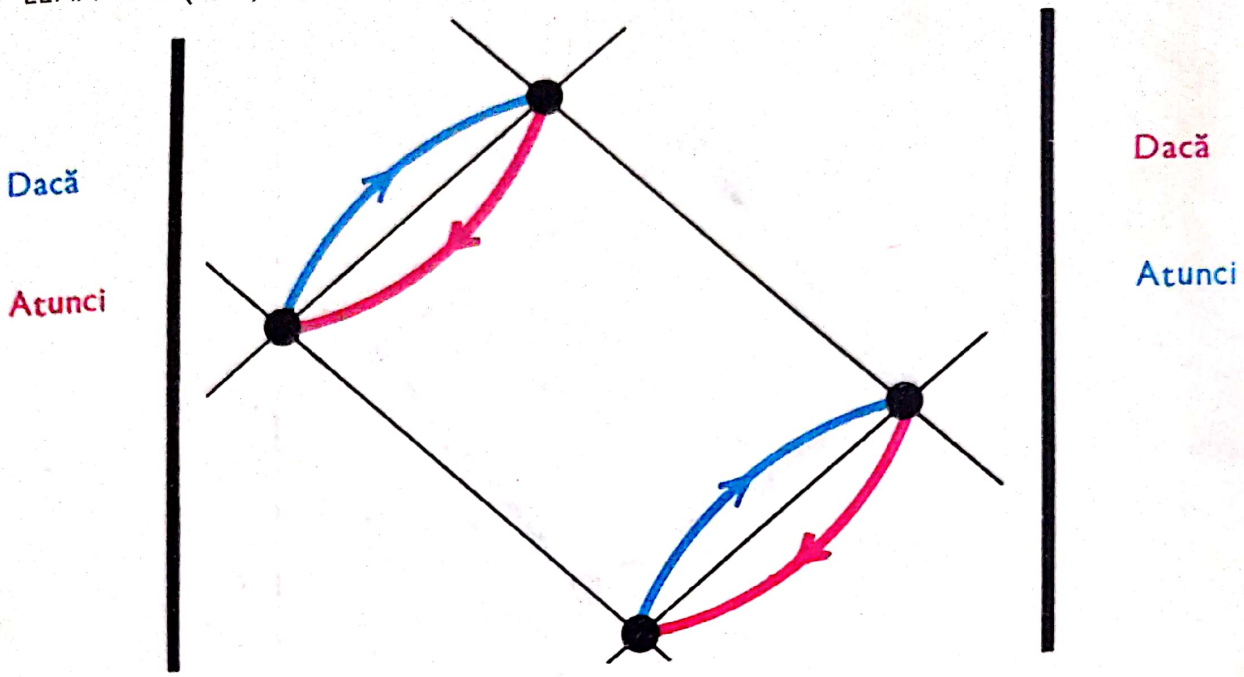
Vom spune că se trece de la $\boxed{(a, b) \uparrow (c, d)}$ la $\boxed{(a, c) \uparrow (b, d)}$ prin încrucișarea echipolenței $\boxed{(a, b) \uparrow (c, d)}$

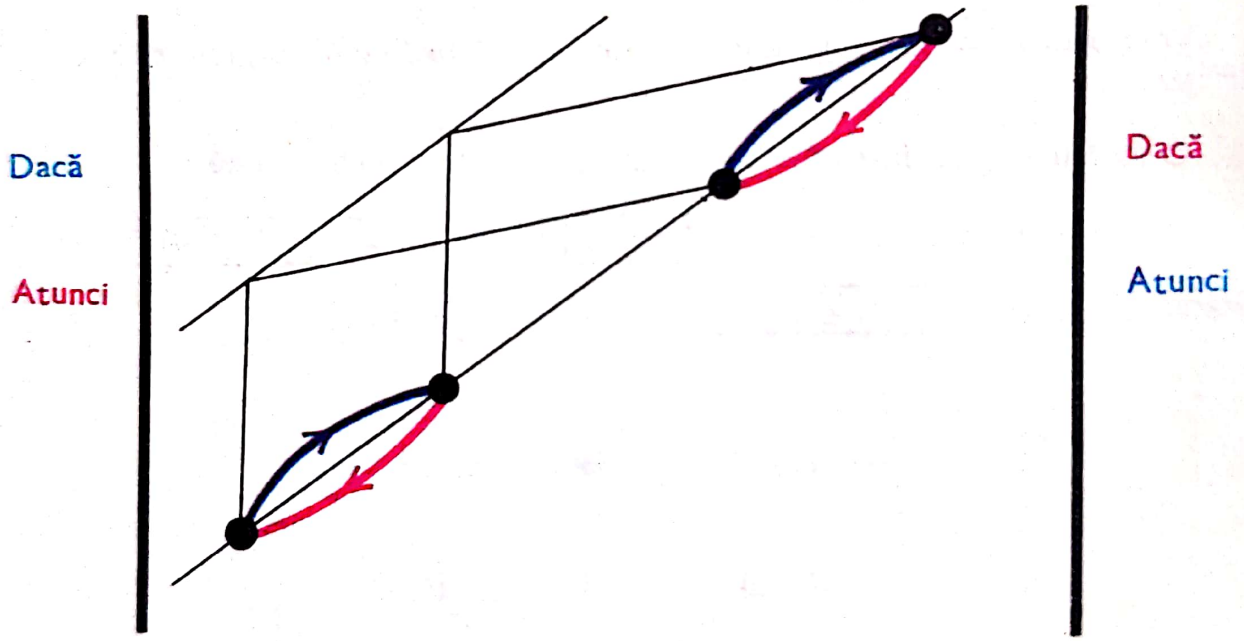


ÎNCRUCIȘAREA ECHIPOLENȚELOR

Scanned with OKEN Scanner

LEMA 4 — $(a, b) \uparrow (c, d) \iff (b, a) \uparrow (d, c)$





EXERCIȚII

1 **Dacă** $(a, b) \uparrow (c, d)$

Atunci $(x, y) \uparrow (a, b) \iff (x, y) \uparrow (c, d)$

2. Dacă două perechi sînt echipolente, orice pereche echipolentă cu una din ele este echipolentă și cu cealaltă.

3. Încrucișați echipolențele

$(a, b) \uparrow (c, d)$
$(a, c) \uparrow (b, d)$

$(x, y) \uparrow (y, z)$
$(u, v) \uparrow (w, u)$

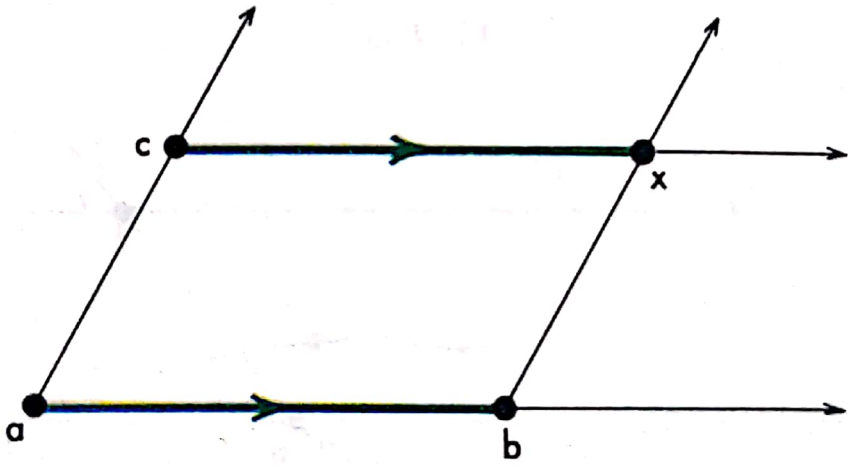
3 — CONSTRUIREA PERECHILOR ECHIPOLENTE

Iată trei puncte

Trăgînd numai paralele, construiți un punct x astfel încît

$$(c, x) \uparrow\uparrow (a, b)$$

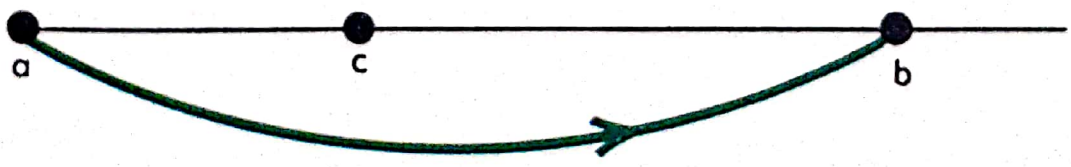
Acest punct x trebuie să fie intersecția paralelei cu ab, care conține pe c și a paralelei cu ac, care conține pe b.



Există deci un punct x și numai unul singur astfel încît

$$(a, b) \uparrow\uparrow (c, x)$$

— Vă pun aceeași problemă într-o situație întrucîtva mai grea.

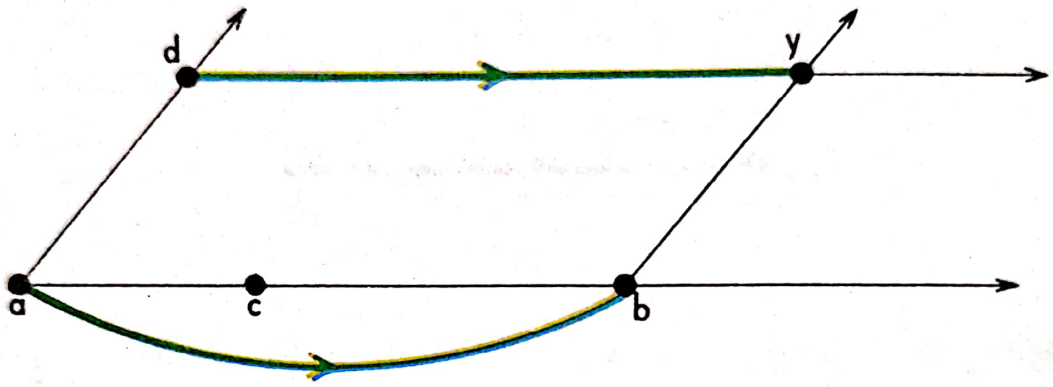


— Știți că dacă două perechi sînt echipolente, orice pereche echipolentă cu una din ele este echipolentă și cu cealaltă.

Alegeți un punct $d \notin ab$.

De data aceasta știți că există un y și numai unul singur astfel încît $(d, y) \uparrow (a, b)$.

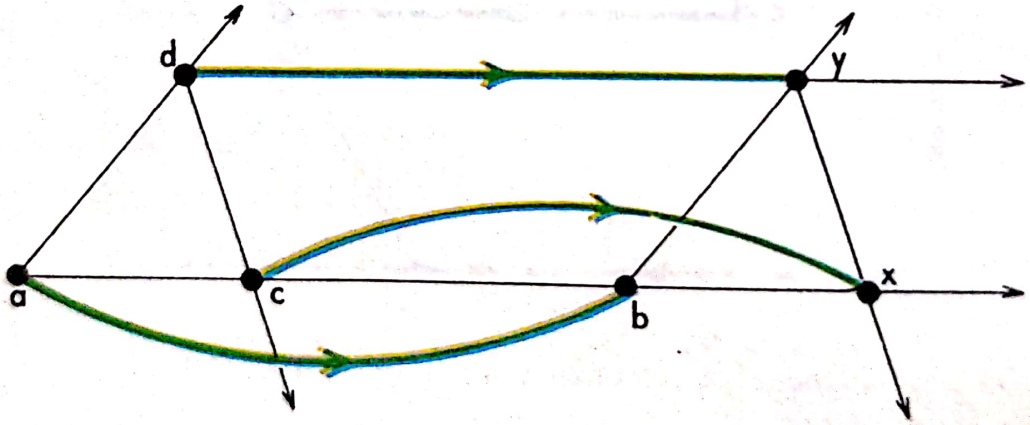
Construiți acest punct y.



Problema constă deci în găsirea lui x, astfel încît

$$(c, x) \uparrow (d, y)$$

Rezolvați-o !



Și de această dată vedem că există un punct x și numai unul singur astfel încît

$$(c, x) \uparrow (a, b)$$

Refaceți construcția precedentă pentru cazul $c = a$.

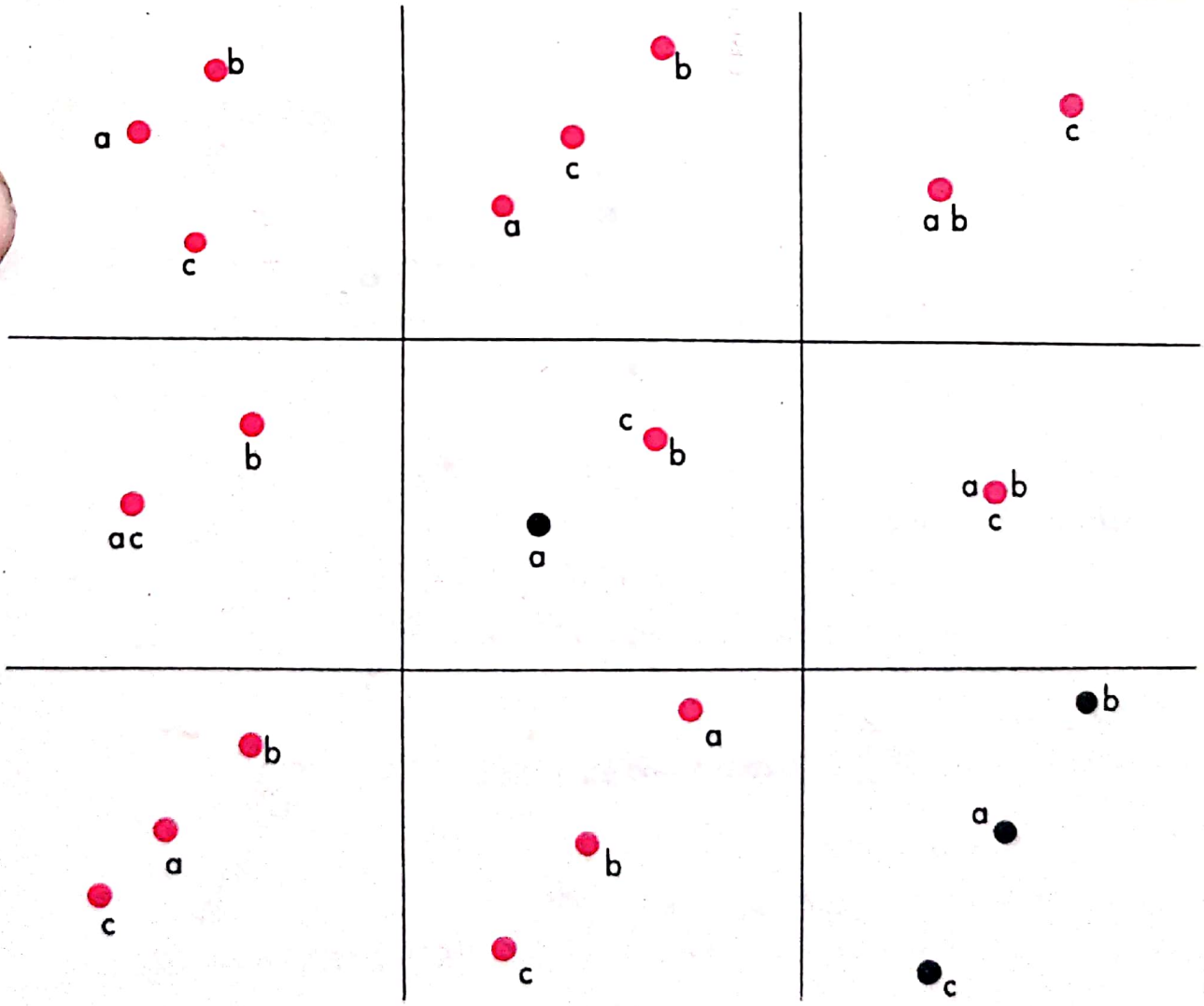
Obțineți atunci $x = b$.

EXERCIȚII

1. Dacă fiecare din literele a, b, c reprezintă un punct, există un punct y și numai unul singur astfel încît $(y, c) \uparrow (a, b)$

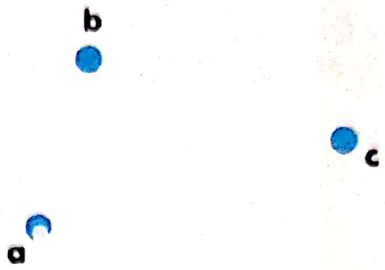
2. $(a, b) \uparrow (y, b) \Rightarrow \ldots$
Completați și explicați.

3. Așezați punctele x, y astfel încît $(c, x) \uparrow (a, b) \uparrow (y, c)$ în următoarele situații:



Scanned with OKEN Scanner

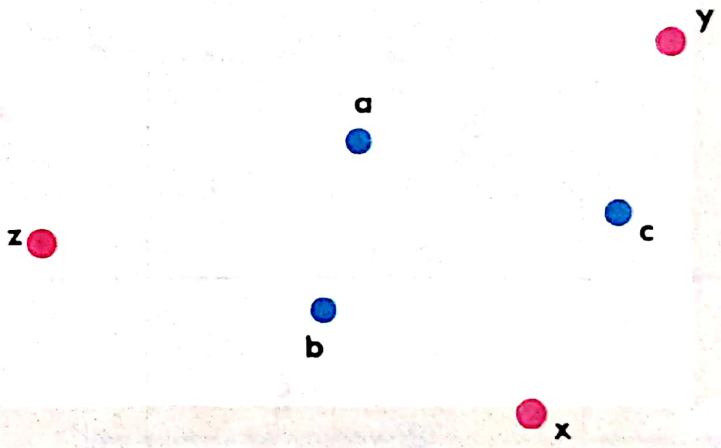
4. Iată trei puncte $a, b, c \in \mathbb{I}$



Așezați pe x, y, z astfel încît

$$(a, b) \uparrow (c, x), (b, c) \uparrow (a, y), (c, a) \uparrow (b, z)$$

Explicați această așezare.



Stabiliți formulele

$$(y, c) \uparrow (a, b), (z, a) \uparrow (b, c), (x, b) \uparrow (c, a)$$

Tripletele (a, b, c) și (x, y, z) au același sens?

5. Fie $a, b \in \mathbb{I}$ și $a \neq b$.
Construiți pe x, y, z astfel încît $(a, b) \uparrow (b, x) \uparrow (x, y) \uparrow (y, z)$.

6. Fie $a, b \in \mathbb{I}$ și $a \neq b$
Construiți pe x, y, z, u, v, w astfel încît

$$(w, v) \uparrow (v, u) \uparrow (u, a) \uparrow (a, b) \uparrow (b, x) \uparrow (x, y) \uparrow (y, z).$$

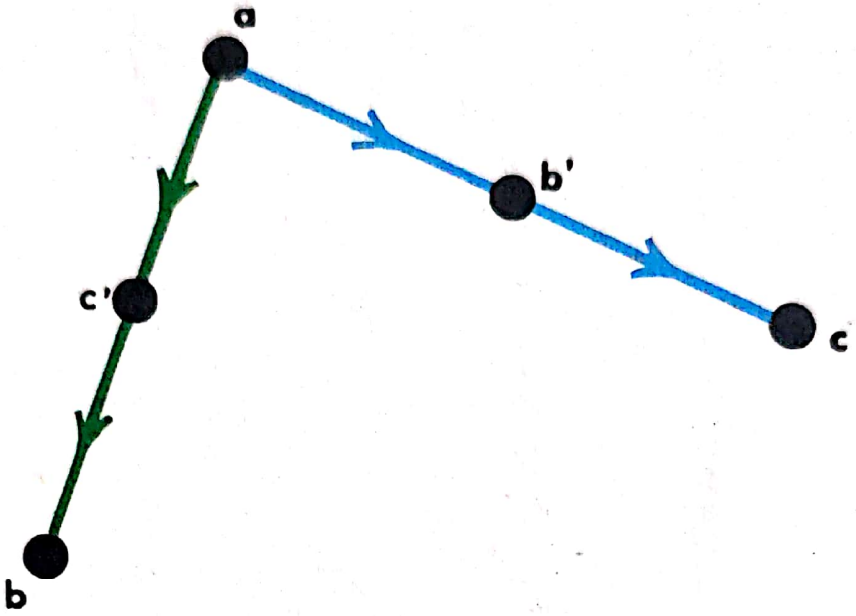
7. Dacă fiecare din literele a, b, c reprezintă un punct

$$(a, b) \uparrow (a, c) \iff b = c$$
$$(a, b) \uparrow (c, b) \iff a = c$$

Scanned with OKEN Scanner

4 — CENTRU — MIJLOC

Examinați următoarea situație

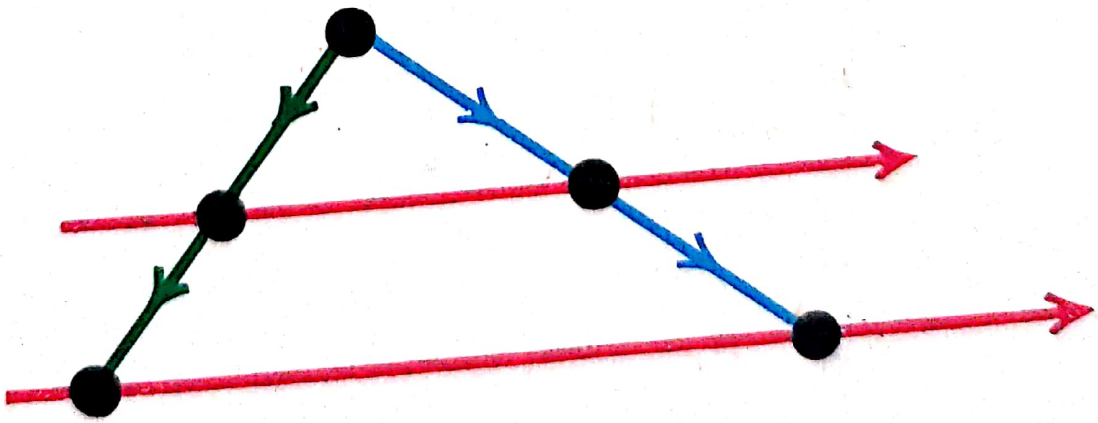


Ce echipolențe am indicat în ea?

— $(a, c') \uparrow (c', b)$ și $(a, b') \uparrow (b', c)$.

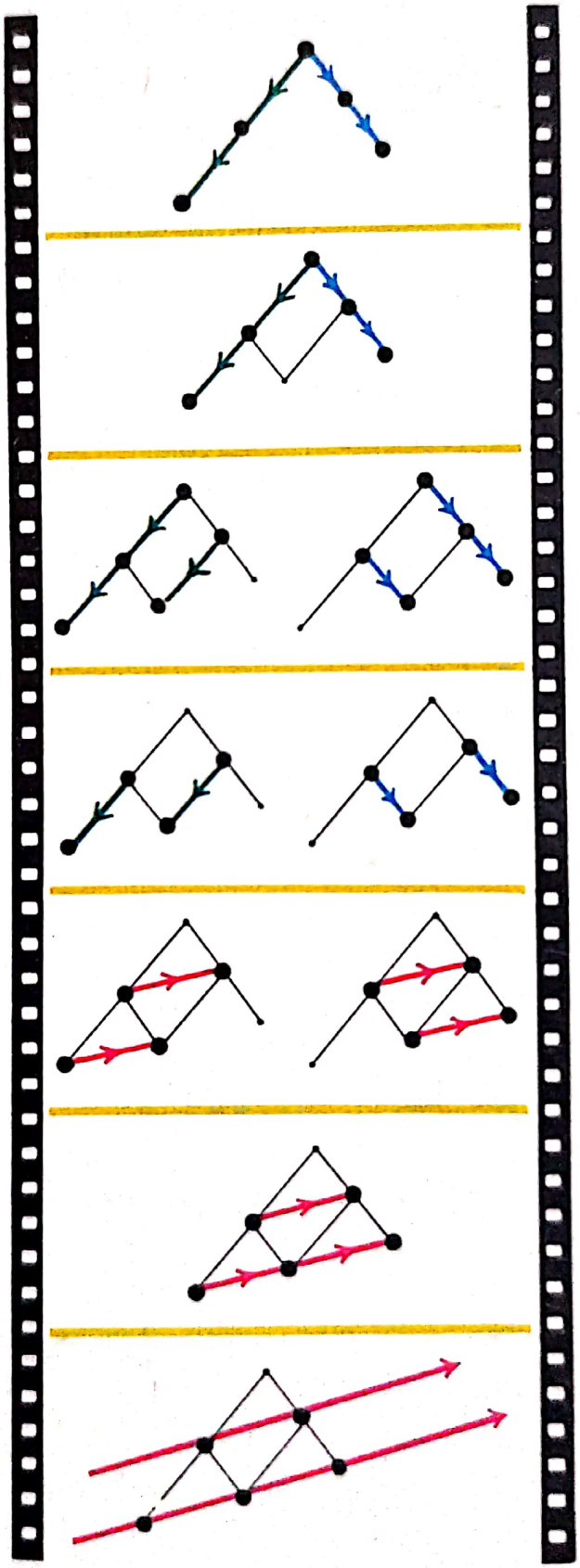
— Vom stabili că datorită acestui fapt, $b'c' \parallel bc$.

LEMA 5 — $(a, b') \uparrow (b', c)$ și $(a, c') \uparrow (c' b) \Rightarrow b'c' \parallel bc$



Dacă Dacă Atunci

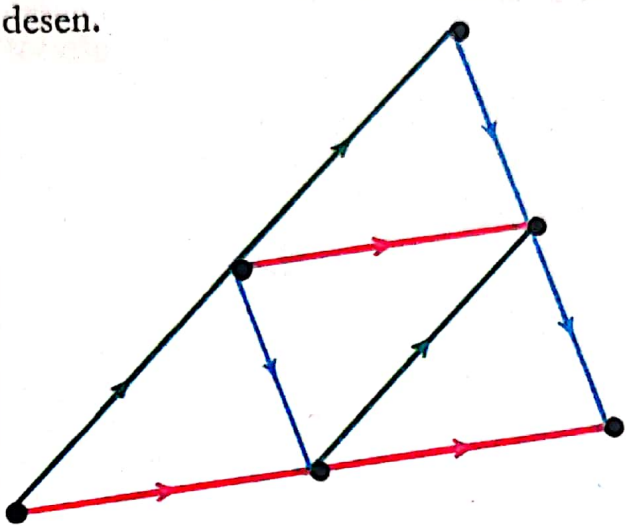
Iată filmul demonstrației.
Explicați-o !



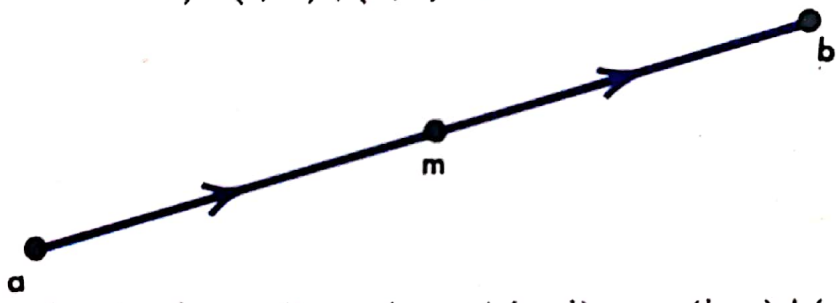
Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚIU

Comentați acest desen.



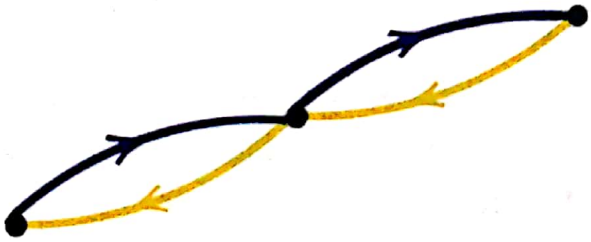
Să izolăm situația $(a, m) \uparrow (m, b)$ întîlnită de multe ori mai sus. Avem atunci $m \in ab$.



Este clar (v. lema 4) că $(a, m) \uparrow (m, b) \iff (b, m) \uparrow (m, a)$

Dacă

Atunci



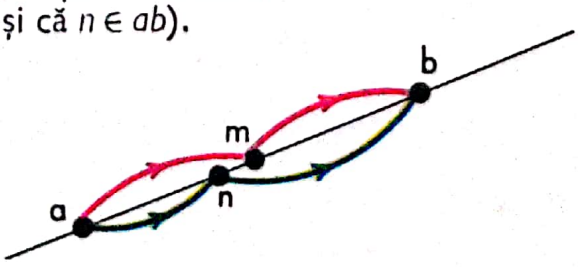
Dacă

Atunci

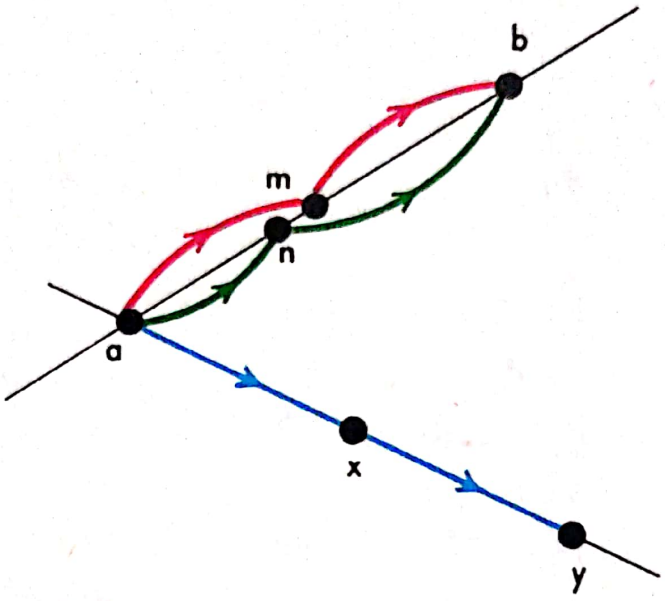
Lema 5 ne va permite să ne dăm seama numaidecît că nu există decît un singur punct m astfel încît $(a, m) \uparrow (m, b)$.

LEMA 6 — $(a, m) \uparrow (m, b)$ și $(a, n) \uparrow (n, b) \Rightarrow m = n$

Ni se dă $(a, m) \uparrow (m, b)$ și $(a, n) \uparrow (n, b)$
Să trecem aceste date pe un desen.
(Noi știm că $m \in ab$ și că $n \in ab$).



Alegeți un punct $x \notin ab$.
Construiți pe y astfel încît $(a, x) \uparrow (x, y)$



Să aplicăm de două ori lema 5.
Datele indicate de săgețile albastre și roșii ne arată că

$$x\,m \parallel y\,b$$

Datele indicate de săgețile albastre și verzi ne arată că

$$x\,n \parallel y\,b$$

Dar cum nu există decît o singură paralelă cu yb care să conțină punctul x, rezultă că $xm = xn$, de unde rezultă că $m = n$.

DEFINIȚIA 2 — *Dacă* $(a, m) \uparrow (m, b)$, *spunem că* m *este* ***centrul*** *perechii* $\{a, b\}$ *sau că este* ***mijlocul*** *segmentului* $[a, b]$

Această definiție ne permite să formulăm astfel lema 5.

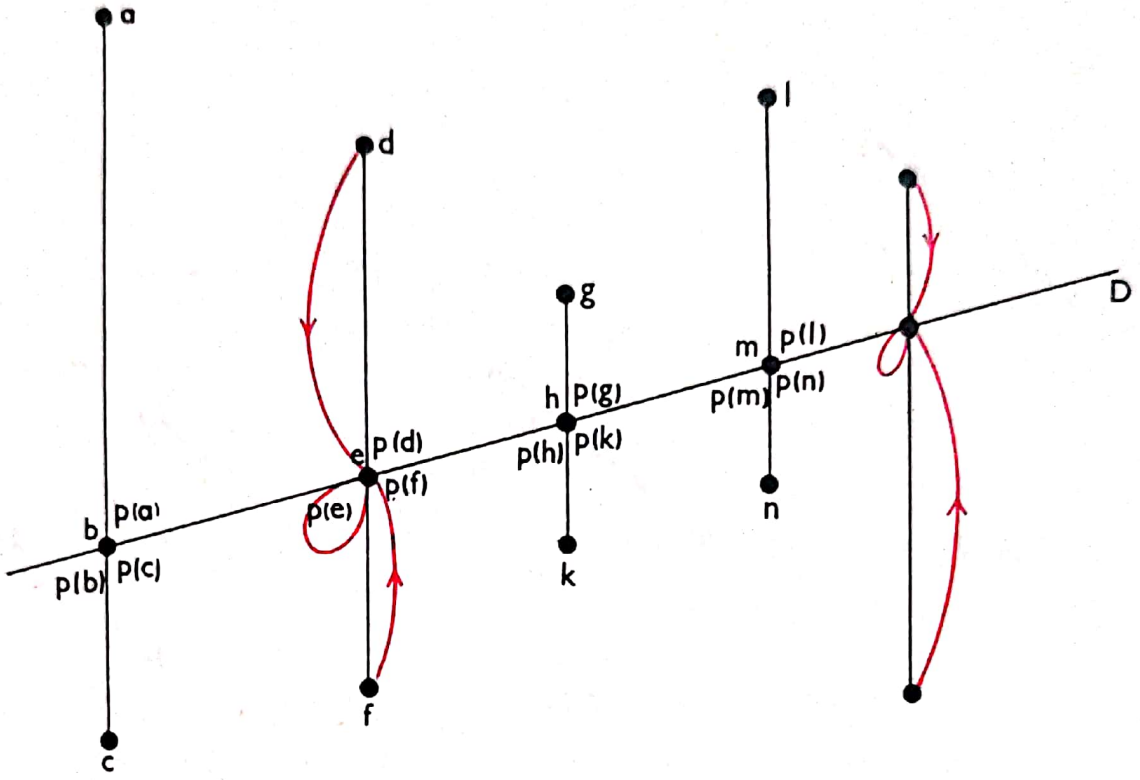
LEMA 5 — *Orice dreaptă pe care se află mijloacele a două laturi ale unui triunghi este paralelă cu a treia latură.*

EXERCIȚIU

Pentru orice $x, y \in \Pi$ să notăm cu $c(x, y)$ centrul perechii $\{x, y\}$.
Am definit în felul acesta o aplicație $c: \Pi \times \Pi \to \Pi$.
Avem $c(x, x) = x$. Funcția $c: \Pi \times \Pi \to \Pi$ este o aplicație *pe* și nu o aplicație *în*.

5 — PROIECȚII PARALELE DE PERECHI ECHIPOLENTE

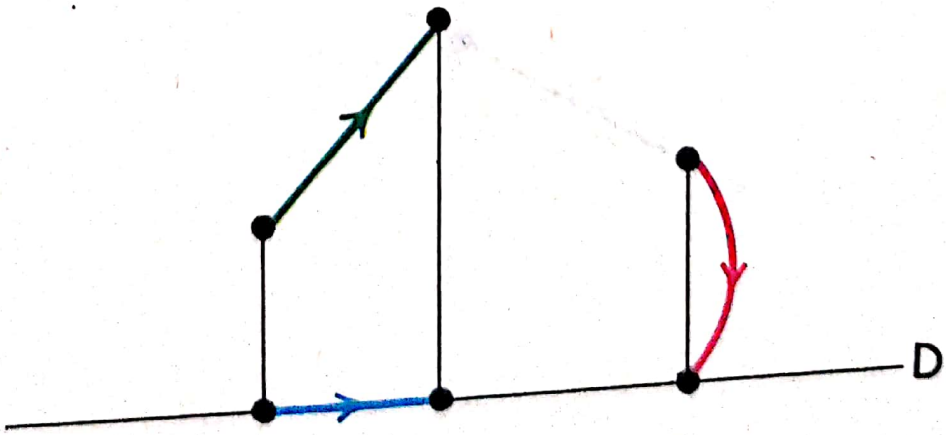
Fie p o proiecție paralelă a planului Π pe dreapta D.



P: PROIECȚIA PARALELĂ : $\Pi \rightarrow$ D

Dreptele paralele cu *ab* sînt **proiectantele** proiecției.

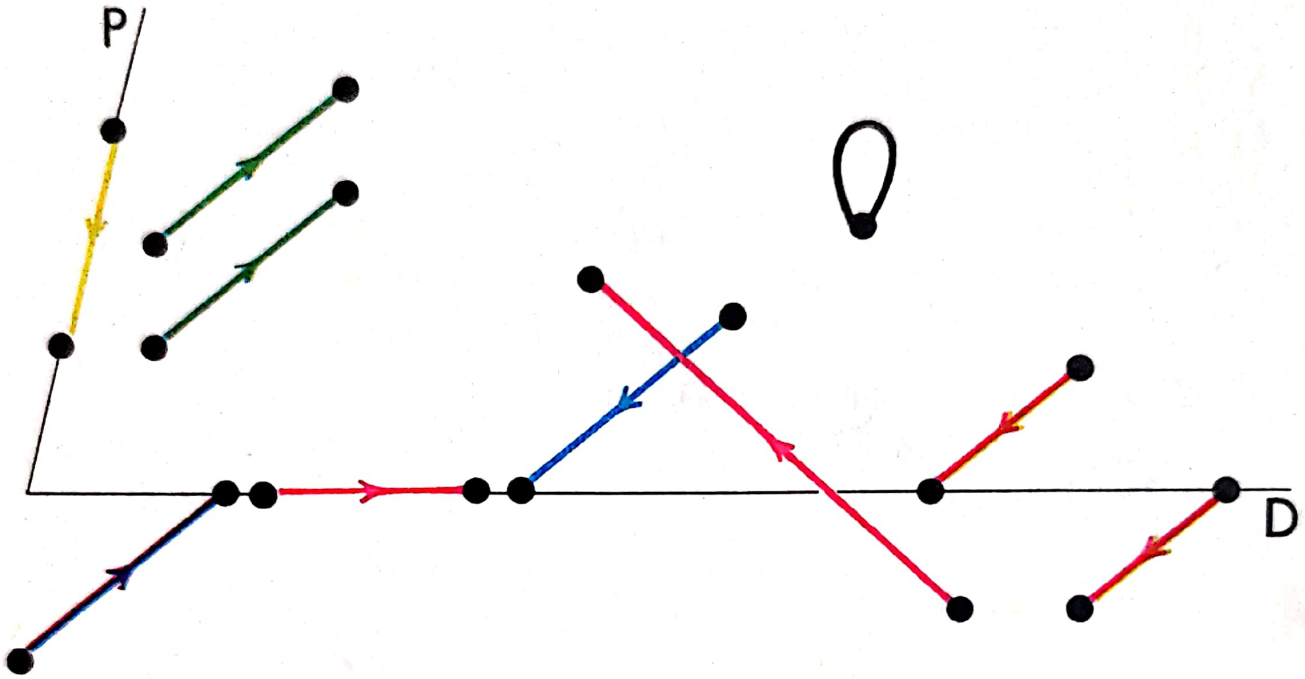
DEFINIȚIA 3 — *Pentru orice* $a, b \in \Pi$, *perechea* $(p(a), p(b))$ *este numită proiecția perechii* (a, b) *pe* D.



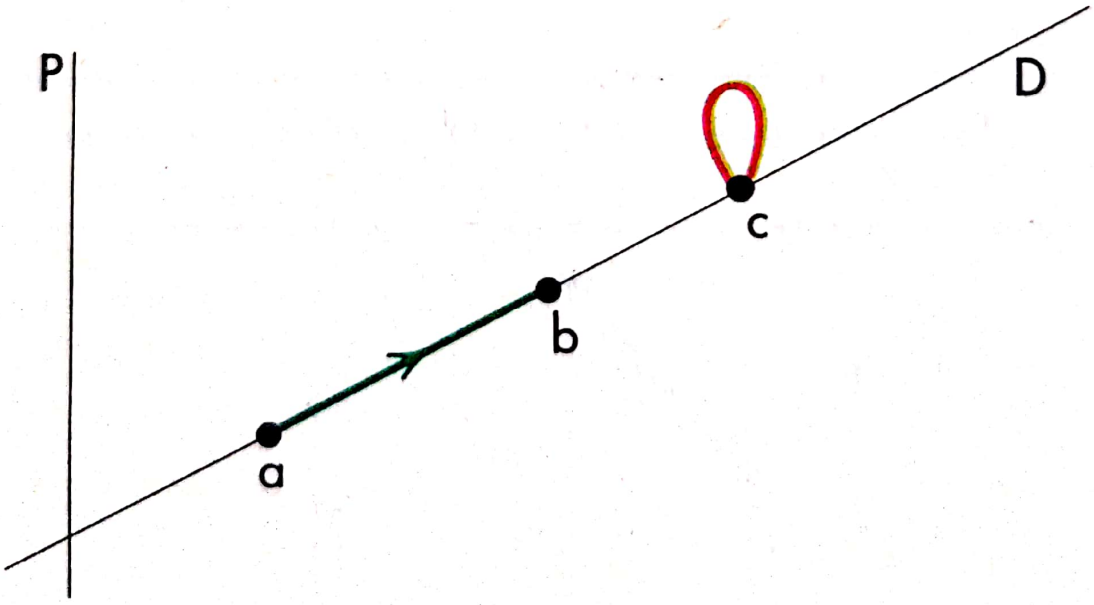
PERECHE ȘI PROIECȚIA EI

EXERCIȚII

1. Proiectați perechile de mai jos pe dreapta D, paralelă cu P.



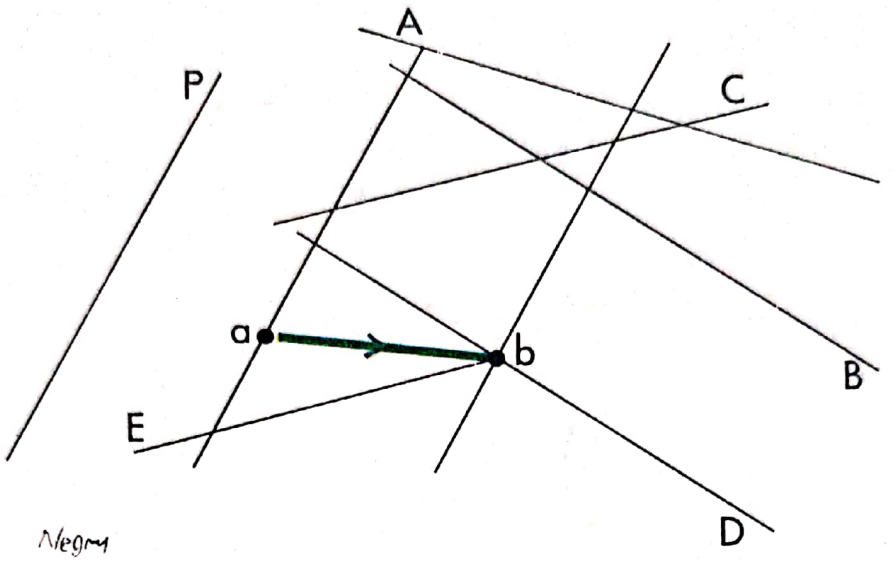
2. Care sînt perechile a căror imagine este (a, b) prin proiecția $\Pi \to D$, paralelă cu P?



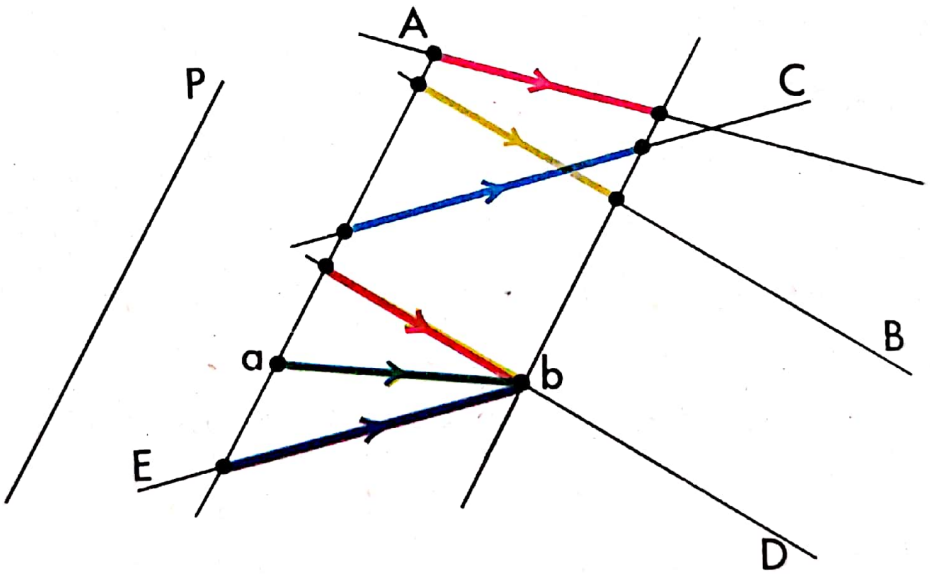
Care sînt perechile a căror imagine este (c, c) prin aceeași proiecție?

Scanned with OKEN Scanner

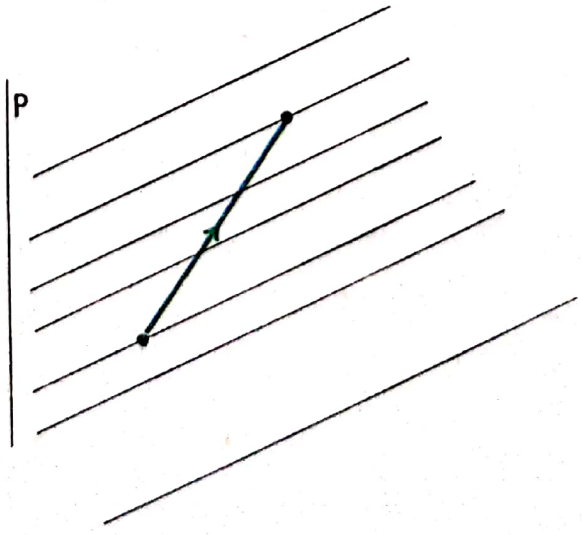
Proiectați perechea (a, b) paralel cu P pe dreptele A, B, C, D, E.



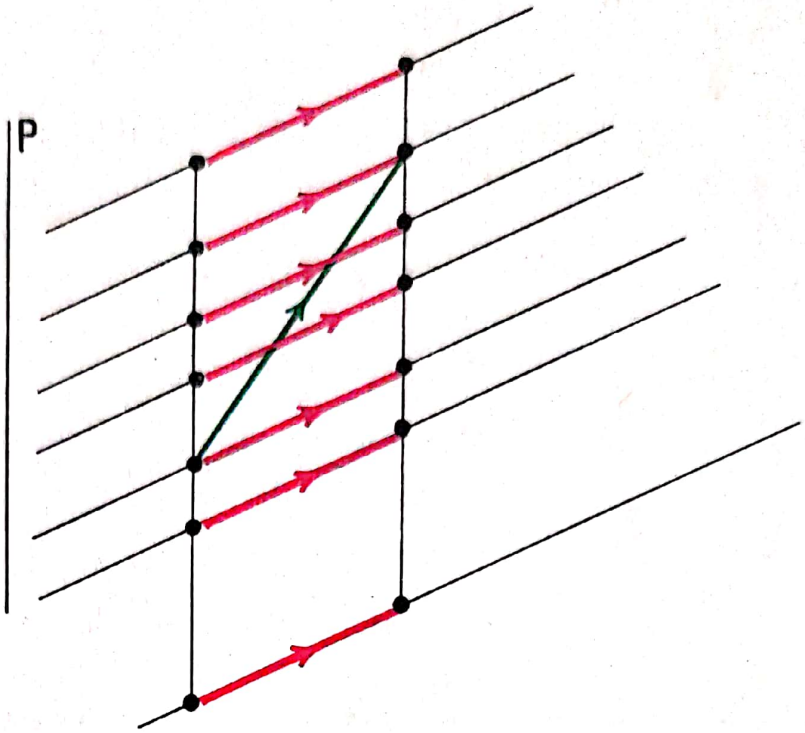
Iată



Proiectați această pereche, paralel cu P, pe aceste drepte paralele.

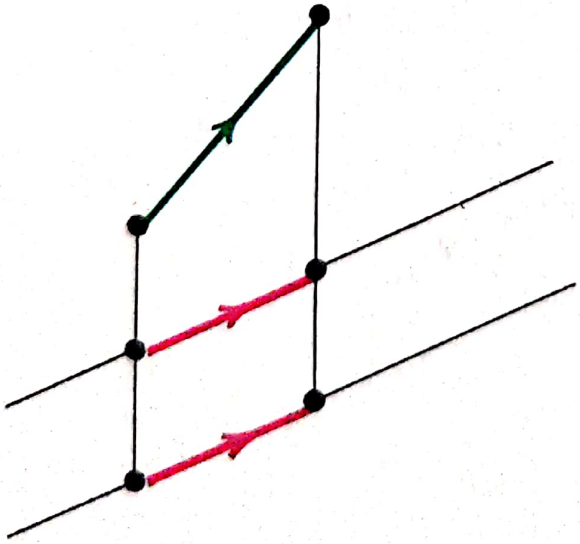


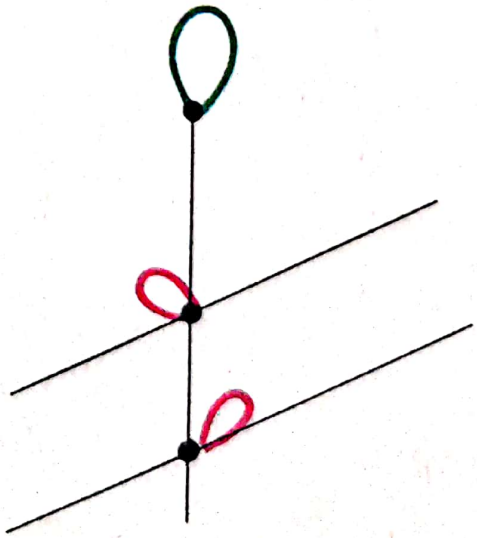
Iată



Ce remarcați?
— Aceste proiecții sînt echipolente.
— De ce?
— ...
— Răspunzînd acestei întrebări ați stabilit

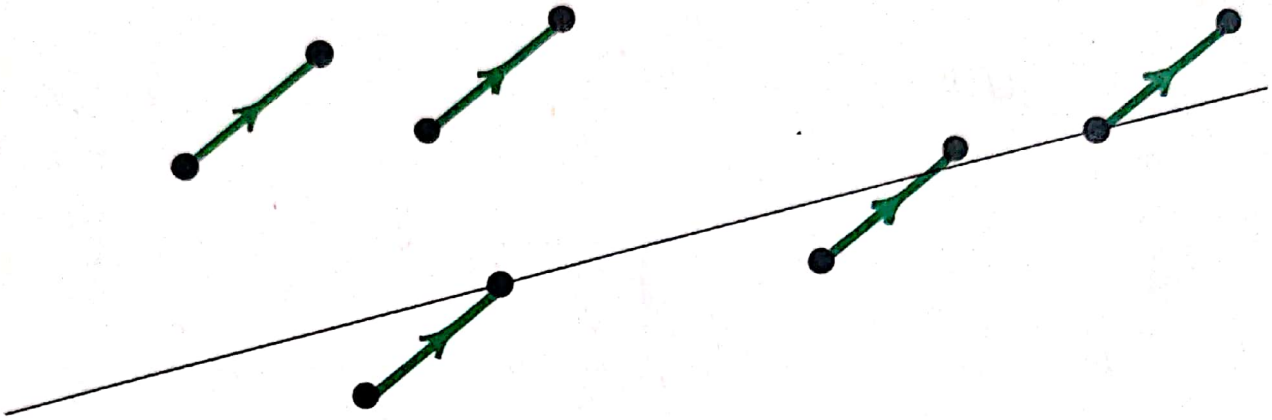
LEMA 7 — *Proiecțiile unei perechi, paralel cu o dreaptă, pe drepte paralele sînt echipolente.*





Scanned with OKEN Scanner

Am proiectat astfel o pereche, paralel cu P, pe drepte paralele.
Să proiectăm acum perechi echipolente, paralel cu P, pe D.

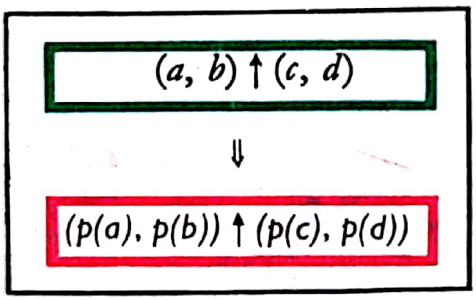


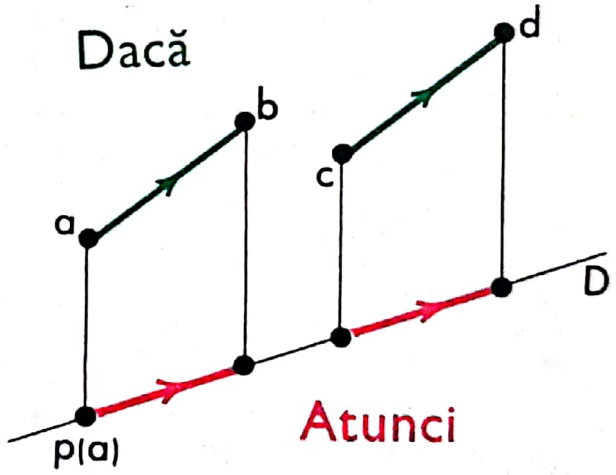
Ce observați?

LEMA 8 — *Proiecțiile paralele ale unor perechi echipolente, pe o dreaptă, sînt echipolente.*

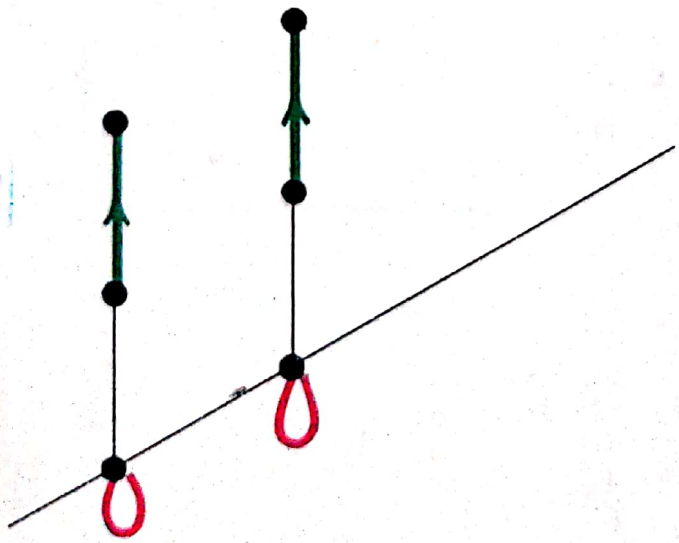
Fie o proiecție paralelă

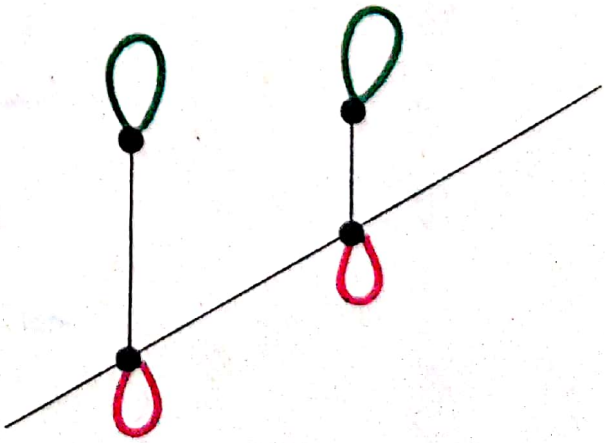
$$p : \Pi \to D$$





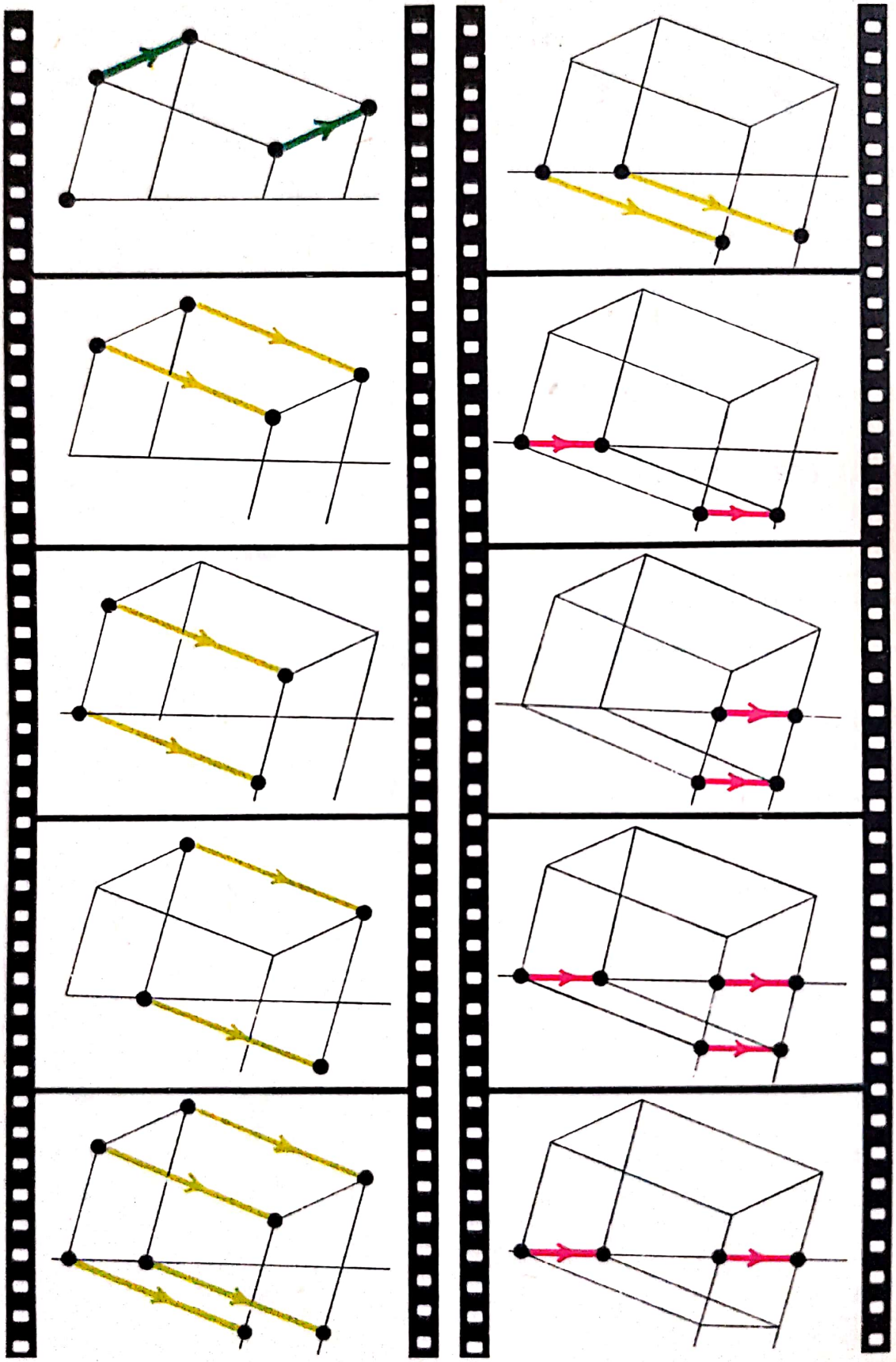
Cazuri particulare în care această lemă este absolut evidentă.





Scanned with OKEN Scanner

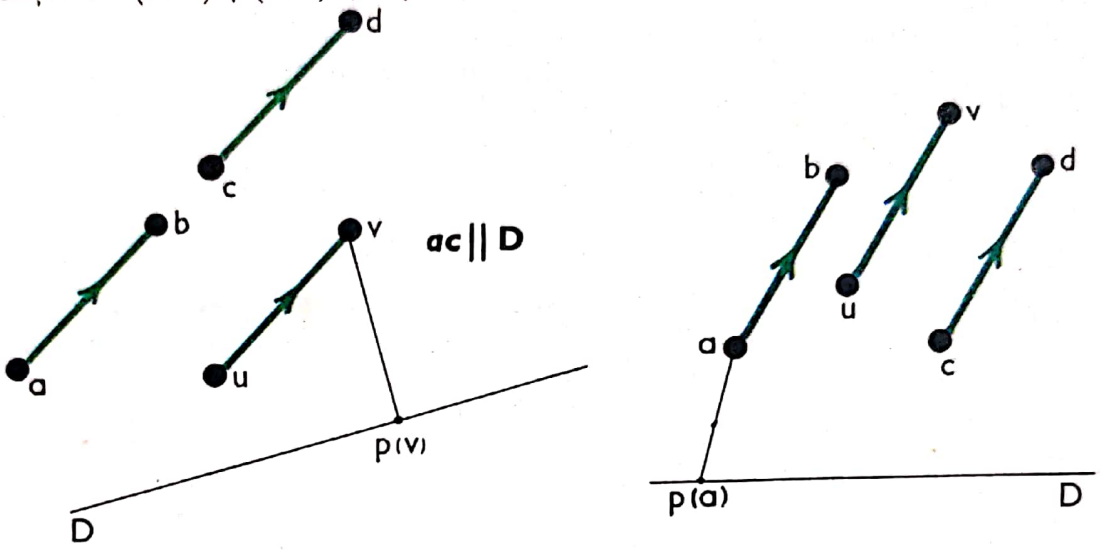
Iată filmul demonstrației (atunci cînd *a* și *b* nu aparțin unei aceleiași *proiectante* a proiecției).



Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația, al cărei film îl vedeți mai sus, este aplicabilă în toate situațiile în care a, b, c, d nu sînt în linie dreaptă, iar $ac \nparallel D$.

Dacă a, b, c, d sînt în linie dreaptă sau dacă $ac \parallel D$, folosim o pereche auxiliară (u, v) echipolentă cu (a, b) și (c, d) și astfel încît demonstrația precedentă să se aplice echipolențelor $(a, b) \uparrow (u, v)$ și $(u, v) \uparrow (c, d)$.



a, b, c, d COLINEARE

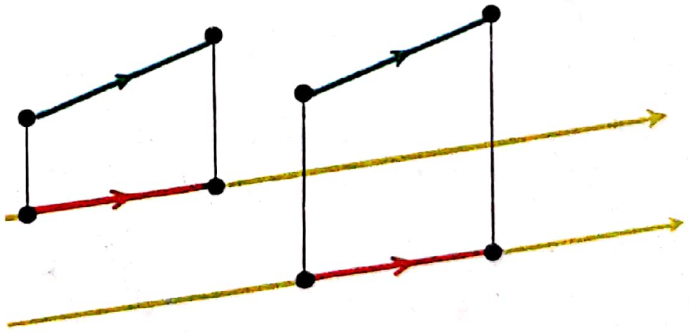
Pe baza demonstrației filmată mai sus

$$(a, b) \uparrow (u, v) \Rightarrow (p(a), p(b)) \uparrow (p(u), p(v))$$
$$(u, v) \uparrow (c, d) \Rightarrow (p(u), p(v)) \uparrow (p(c), p(d))$$

ca urmare a tranzitivității echipolenței ($\uparrow$), tragem concluzia $(p(a), p(b)) \uparrow (p(c), p(d))$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

TEOREMA 2 — **Proiecțiile paralele ale unor perechi echipolente pe drepte paralele sînt echipolente.**



Dacă Dacă Atunci

Această teoremă rezultă din lemele 7 și 8.

Faceți o demonstrație amănunțită și reprezentați-o printr-un film.

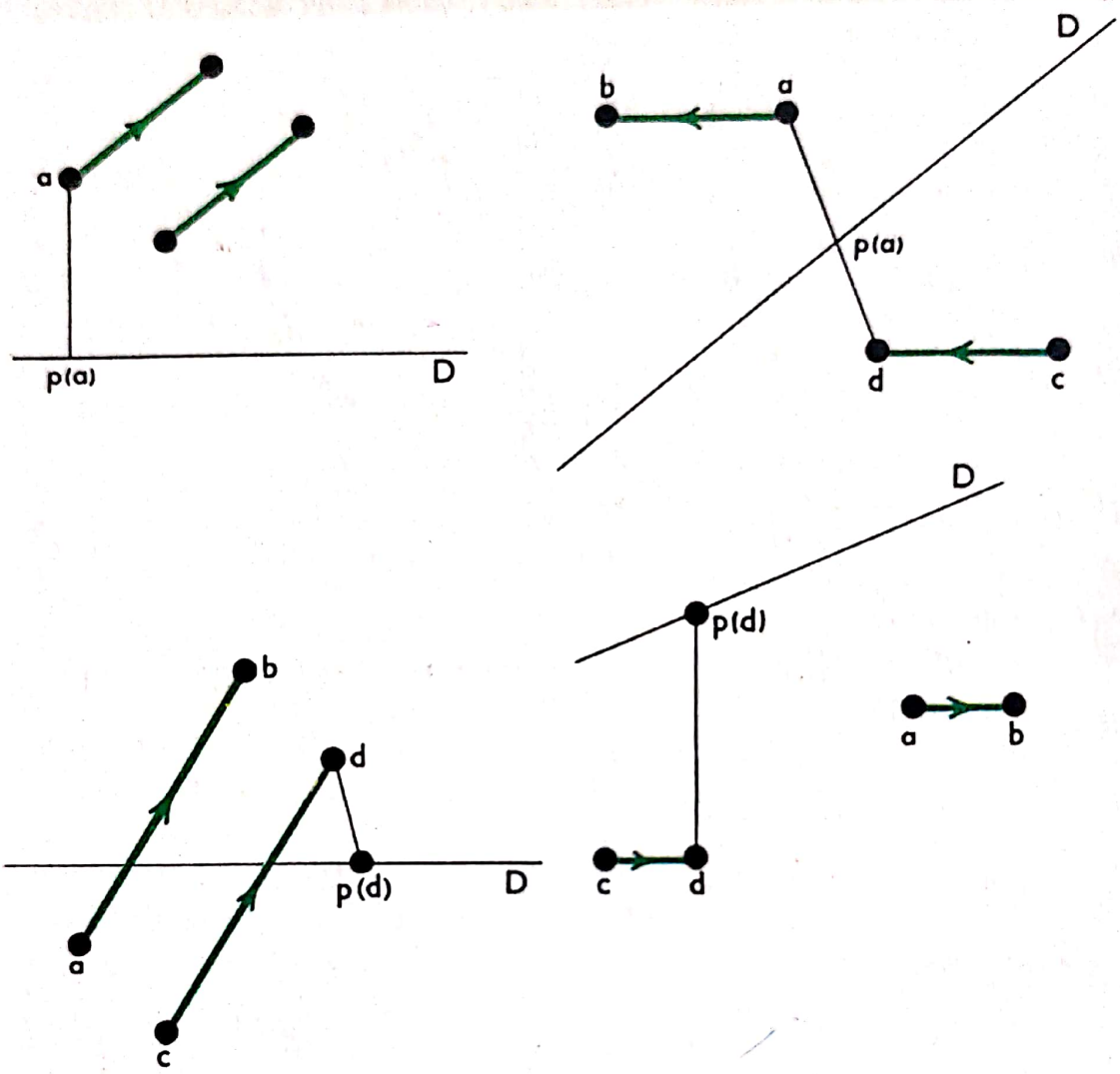
Indicați la fiecare etapă lemele folosite.

Pe scurt

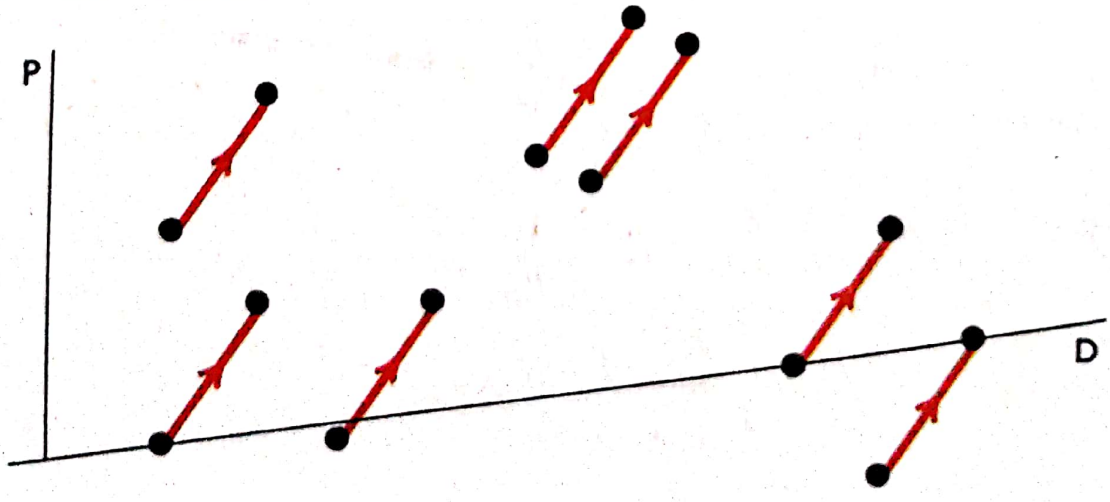
TEOREMA 2 — **Proiecțiile paralele respectă echipolența.**

EXERCIȚII

1. Desenați filmul demonstrației de la pag. 362 în următoarele situații.

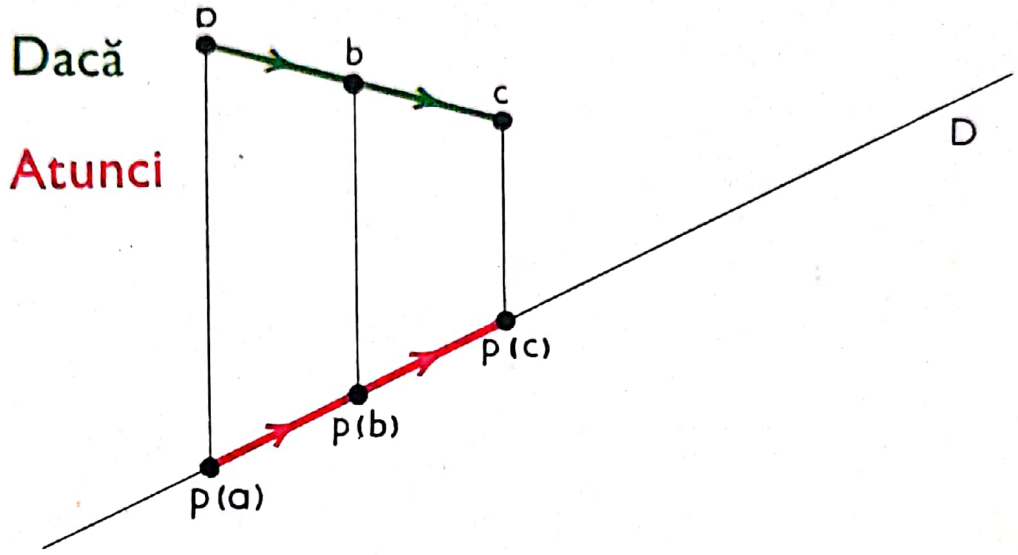


2. Prin convențiile noastre obișnuite, arătați ceea ce știți despre proiecțiile acestor perechi echipolente, pe D, paralel cu P.



6 — APLICAȚII

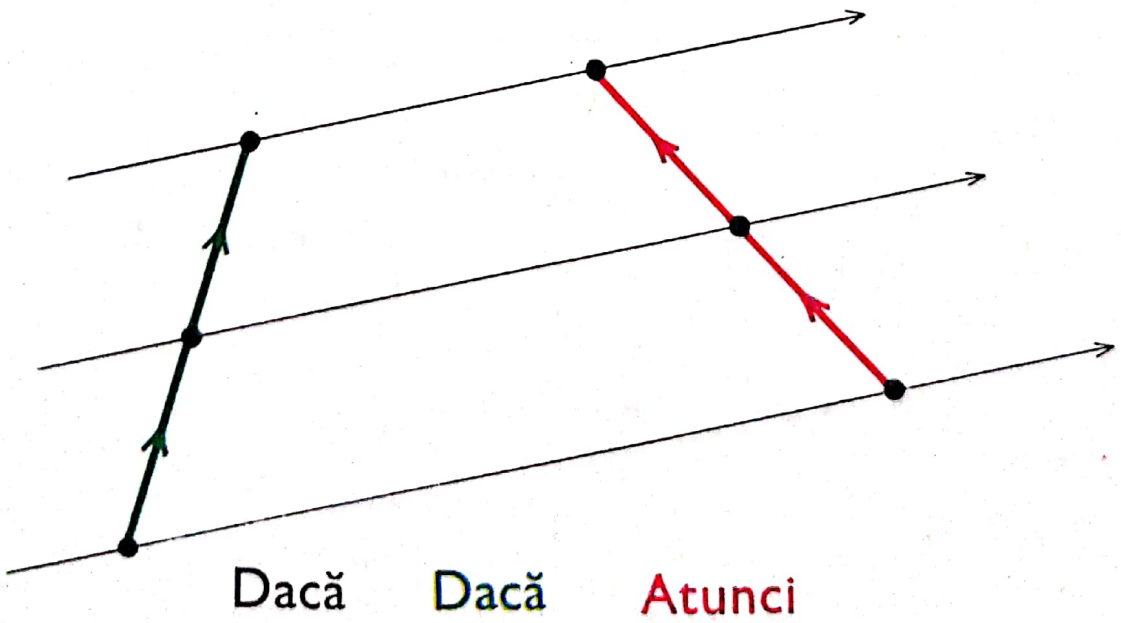
1. PROIECȚIA PARALELĂ p: II → D



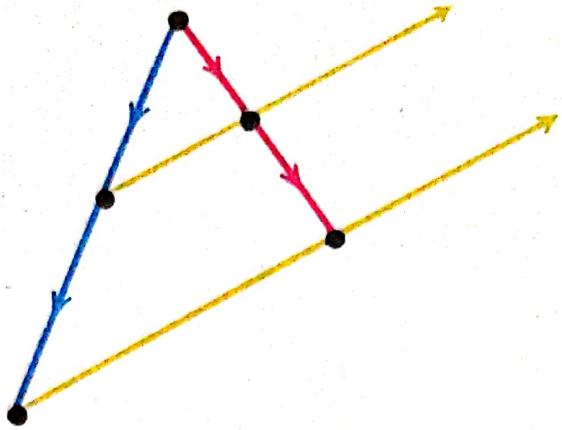
$$(a, b) \uparrow (b, c) \Rightarrow (p(a), p(b)) \uparrow (p(b), p(c))$$

Proiecțiile paralele respectă mijlocul.

2. Enunțați și explicați



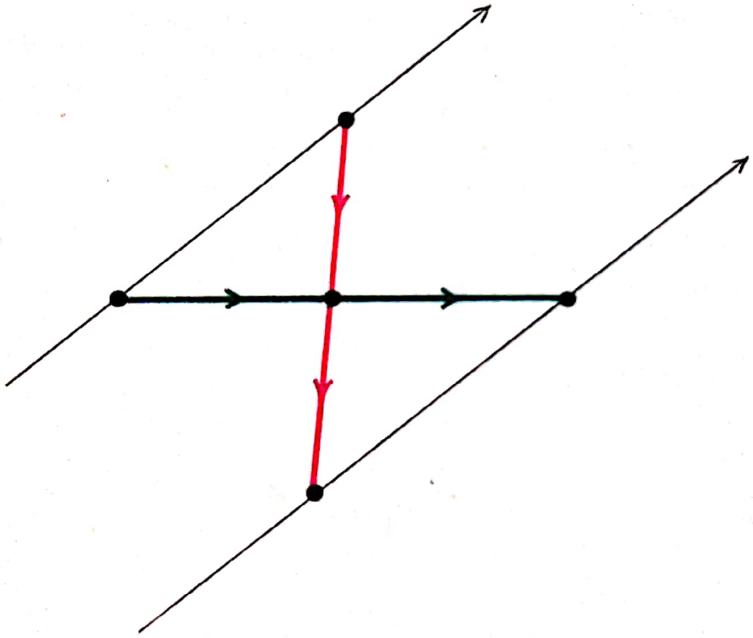
3.



Dacă Dacă Atunci

Enunțați și demonstrați lema sugerată de acest desen !

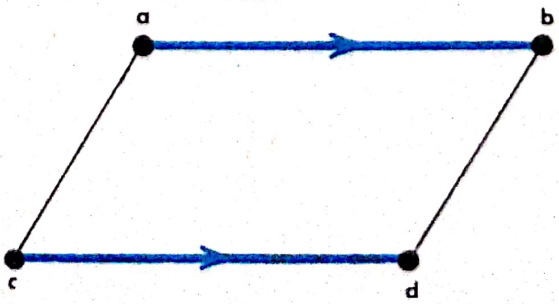
4. Enunțați și demonstrați



Dacă Dacă Atunci

5. PARALELOGRAM

Încă o aplicație foarte simplă a teoremei 2.
Iată perechi echipolente nealiniate.

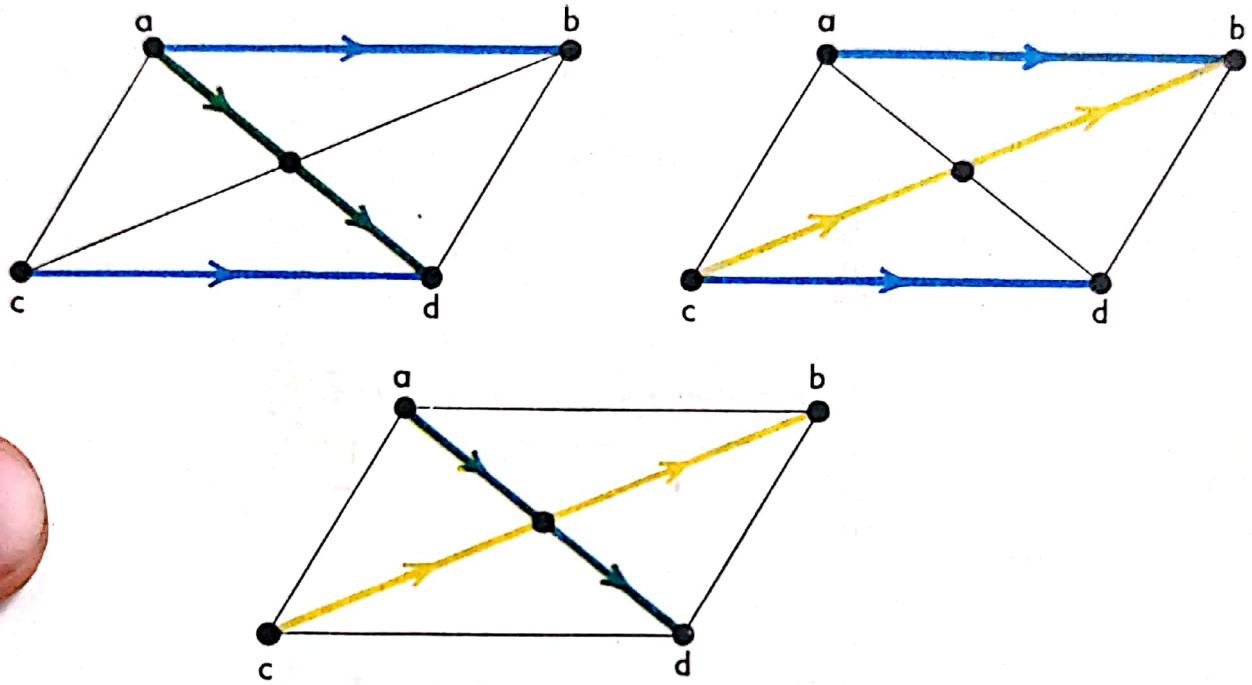


Scanned with OKEN Scanner

Proiectați aceste **perechi echipolente**

pe ad paralel cu bc | pe bc paralel cu ad

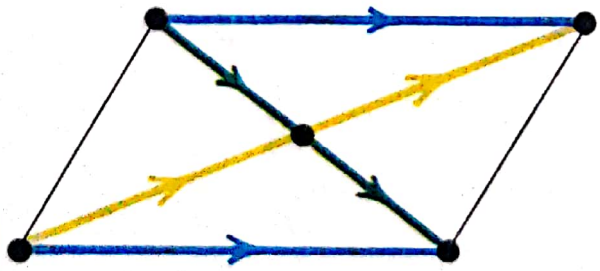
și indicați, în mod obișnuit, proiecțiile echipolente.



Am stabilit deci lema.

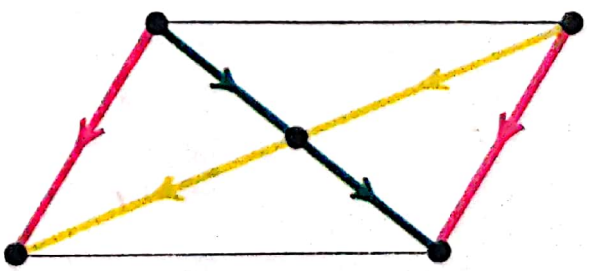
LEMA 9 — Dacă punctele a, b, c, d nu sînt aliniate

$(a, b) \uparrow (c, d)$	$\Rightarrow$	$[a, d]$ și $[b, c]$ au același mijloc
$(a, c) \uparrow (b, d)$	$\Rightarrow$	$[a, d]$ și $[b, c]$ au același mijloc.



Dacă

Atunci Atunci



Dacă

Atunci Atunci

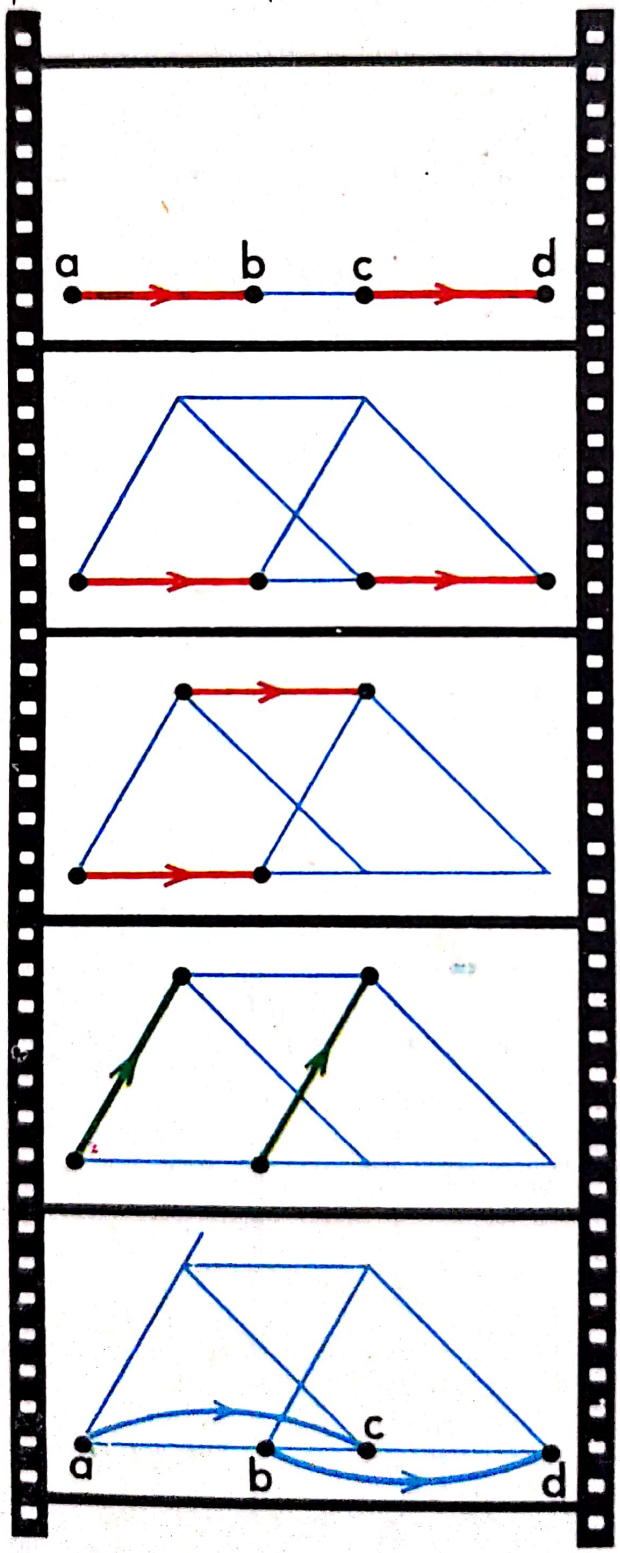
Scanned with OKEN Scanner

7 — ÎNCRUCIȘAREA ECHIPOLENȚELOR

TEOREMA 3 — $(a, b) \uparrow (c, d) \iff (a, c) \uparrow (b, d)$

DEMONSTRAȚIE: Această teoremă a fost stabilită cînd punctele a, b, c, d nu sînt aliniate (lema 3, pag. 347).

Iată filmul demonstrației atunci cînd punctele sînt aliniate.



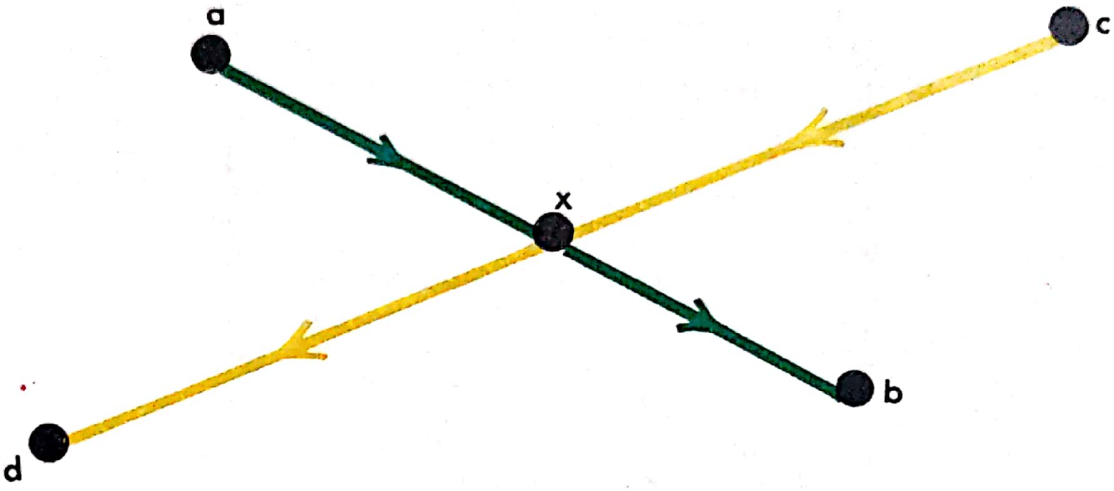
se încrucișează ! lema 3

se proiectează teorema 2

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

1. Examinați următoarea situație:



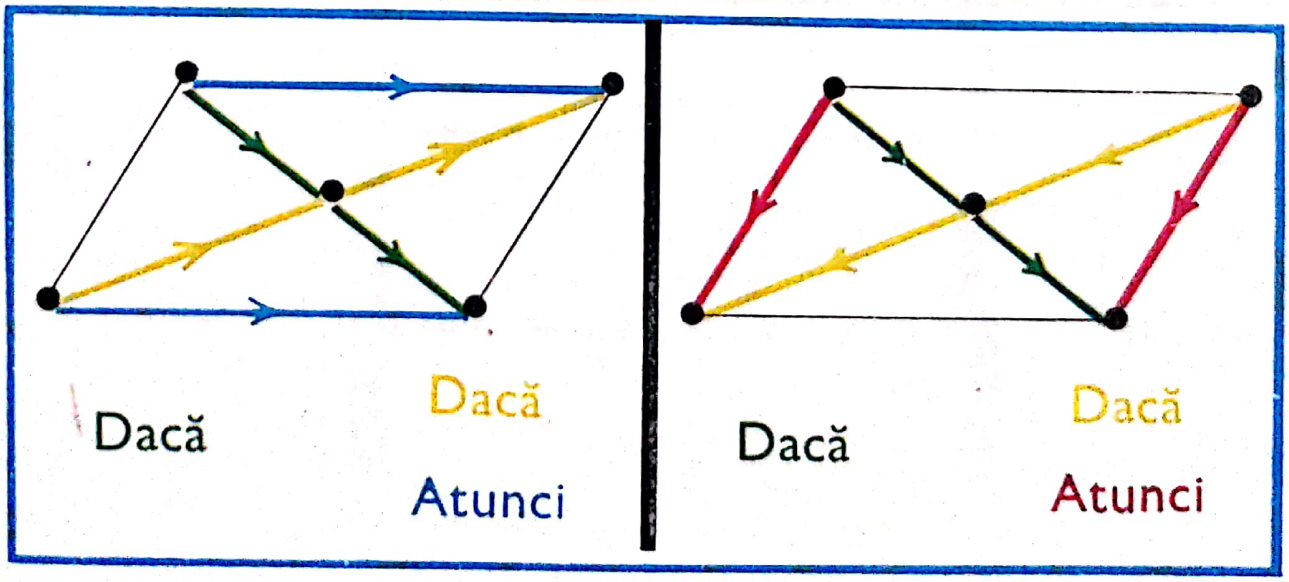
— Care este informația dată de acest desen?
— $(a, x) \uparrow (x, b)$ și $(c, x) \uparrow (x, d)$
— Cum mai putem formula acest lucru utilizînd noțiunea de centru sau de mijloc?

$\{a, b\}$ și $\{c, d\}$ au același centru.
$[a, b]$ și $[c, d]$ au același mijloc.

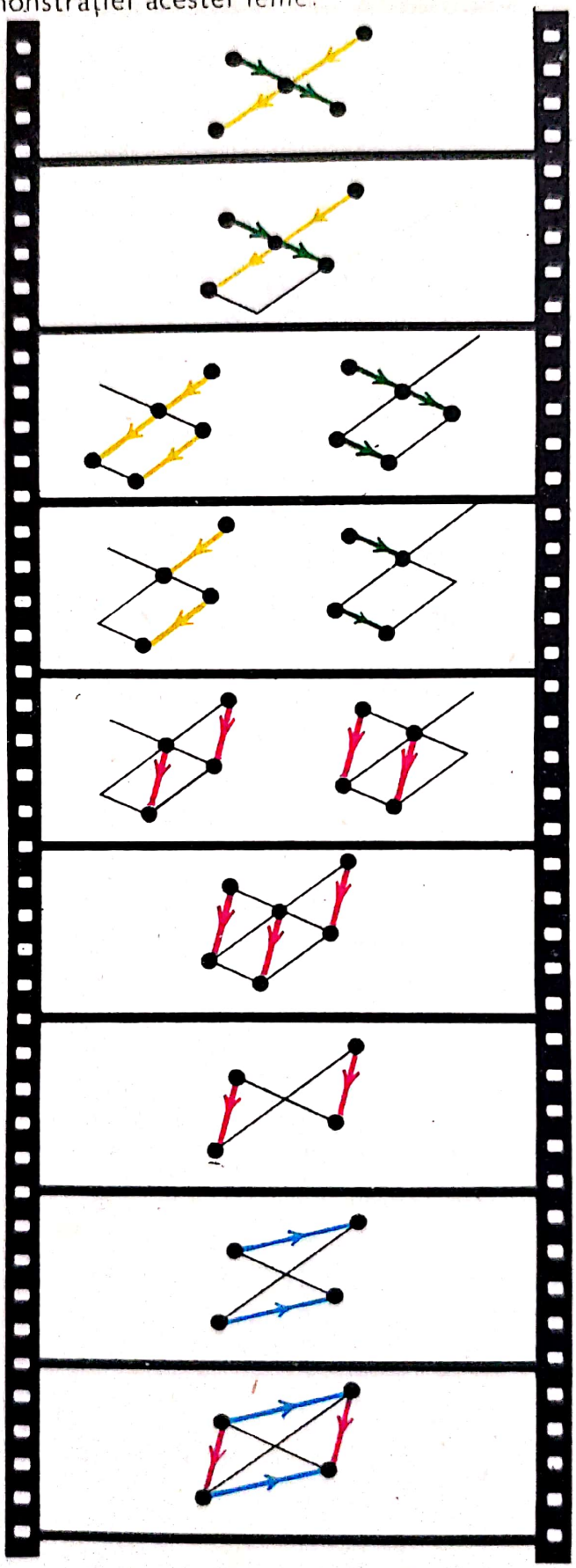
LEMA 10 — *Dacă punctele* **a, b, c, d** *nu sînt aliniate*

[ad] și **[bc]** au același mijloc	⇒	**(a, b) ↑ (c, d)**

[ad] și **[bc]** au același mijloc	⇒	**(a, c) ↑ (b, d)**

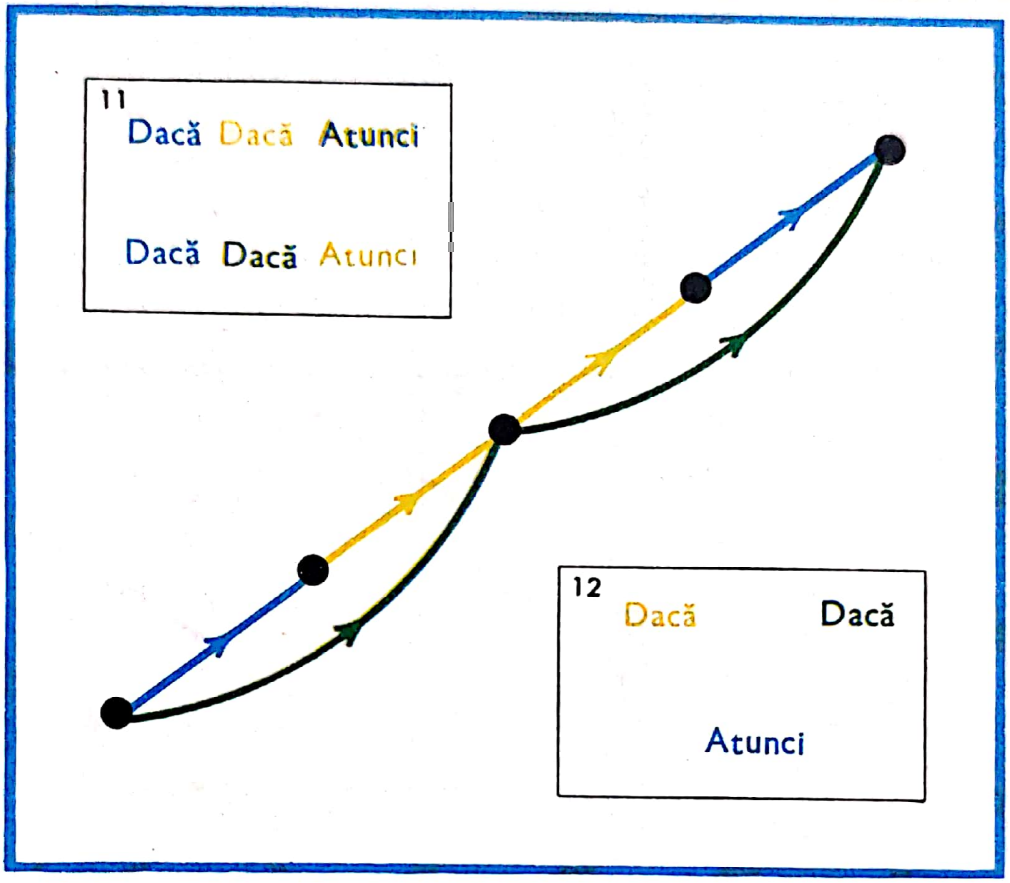


Iată filmul demonstrației acestei leme.



Scanned with OKEN Scanner

Vom stabili că lemele 9 și 10 rămîn valabile atunci cînd punctele sînt aliniate.



LEMA 11 — *Dacă punctele* **a, b, c, d** *sînt aliniate*

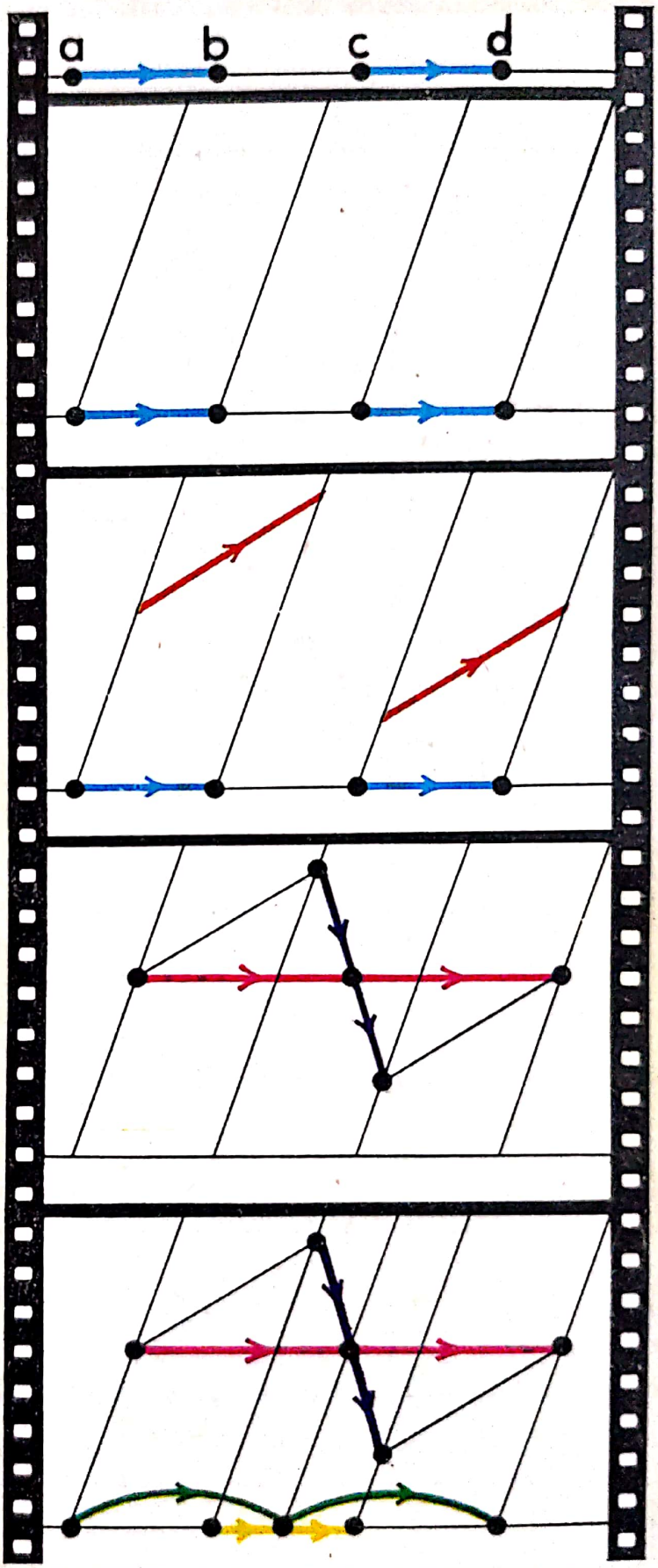
$(a, b) \uparrow (c, d)$	$\Rightarrow$	**[a, d]** și **[b, c]** au același mijloc.

De asemenea

$(a, c) \uparrow (b, d)$	$\Rightarrow$	$[a, d]$ și $[b, c]$ au același mijloc.

Scanned with OKEN Scanner

Iată un film care demonstrează această lemă.



Se proiectează vectorii echipolenți albaștri pe drepte paralele și se aplică teorema 2.

Se aplică lema 9.

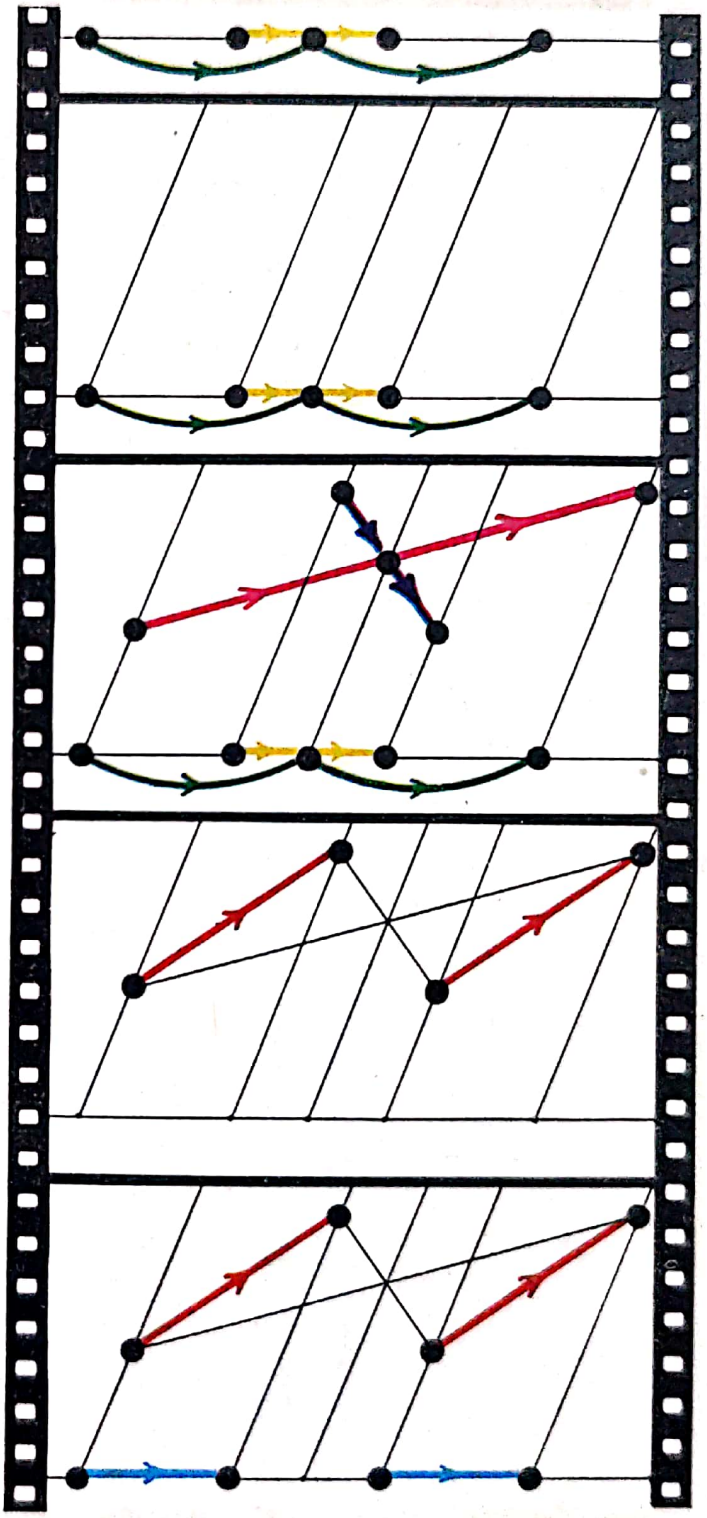
Se aplică teorema 2

Scanned with OKEN Scanner

LEMA 12 — *Dacă punctele* **a, b, c, d** *sînt aliniate*

$[a, d]$ și $[b, c]$ *au același mijloc* $\Rightarrow (a, b) \uparrow (c, d)$
$[a, d]$ și $[b, c]$ *au același mijloc* $\Rightarrow (a, c) \uparrow (b, d)$

Iată un film care stabilește această lemă.



Se aplică teorema 2.

Se aplică lema 10.

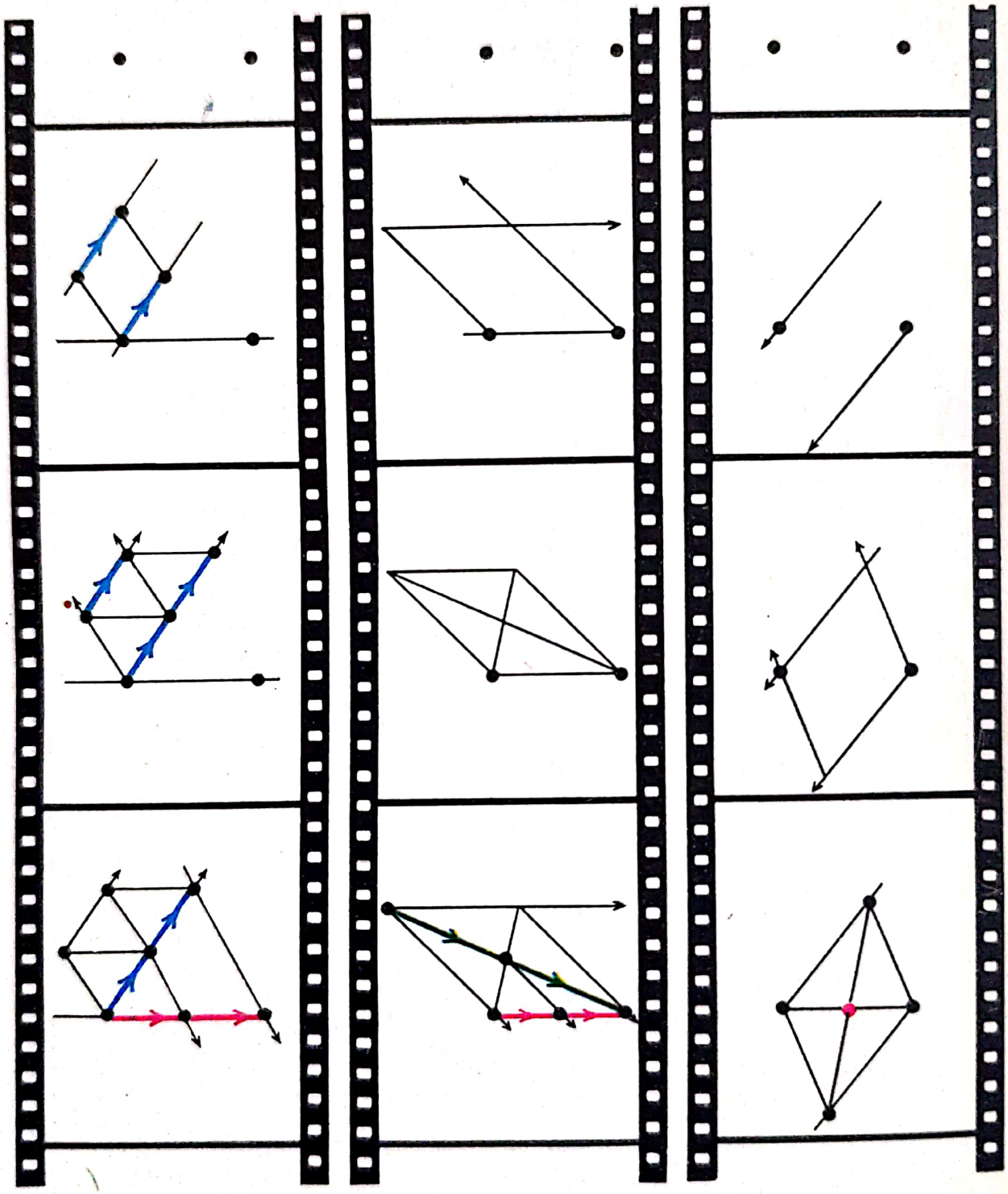
Se aplică teorema 2.

3. $(a, b) \uparrow (c, d) \iff [ad]$ și $[bc]$ au același mijloc $\iff (a, c) \uparrow (b, d)$.

Scanned with OKEN Scanner

8 — CONSTRUCȚII

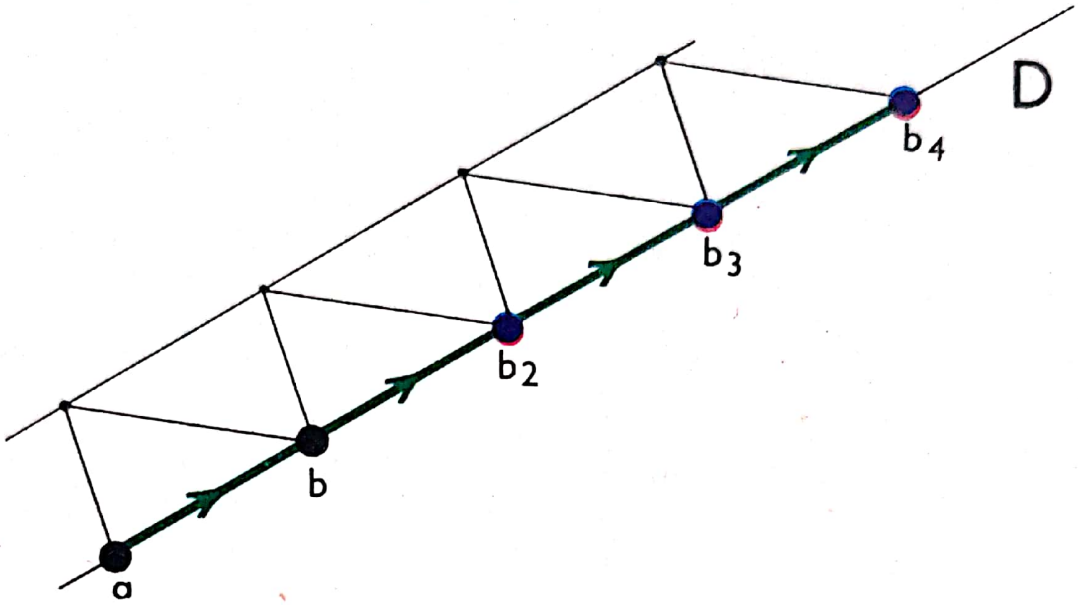
1. Aceste trei filme ne dau trei metode de a construi centrul unei perechi *ducînd paralele*.



Explicați și arătați exactitatea construcțiilor prezentate în aceste filme.
Veți observa că ultima metodă este cea mai expeditivă.
Primele două metode sînt însă foarte instructive, după cum veți vedea mai jos.

Scanned with OKEN Scanner

2. Iată două puncte a, b.
Construiți b_2, b_3, b_4, . . . astfel încît
$(a, b) \uparrow (b, b_2) \uparrow (b_2, b_3) \uparrow (b_3, b_4) \uparrow \ldots$

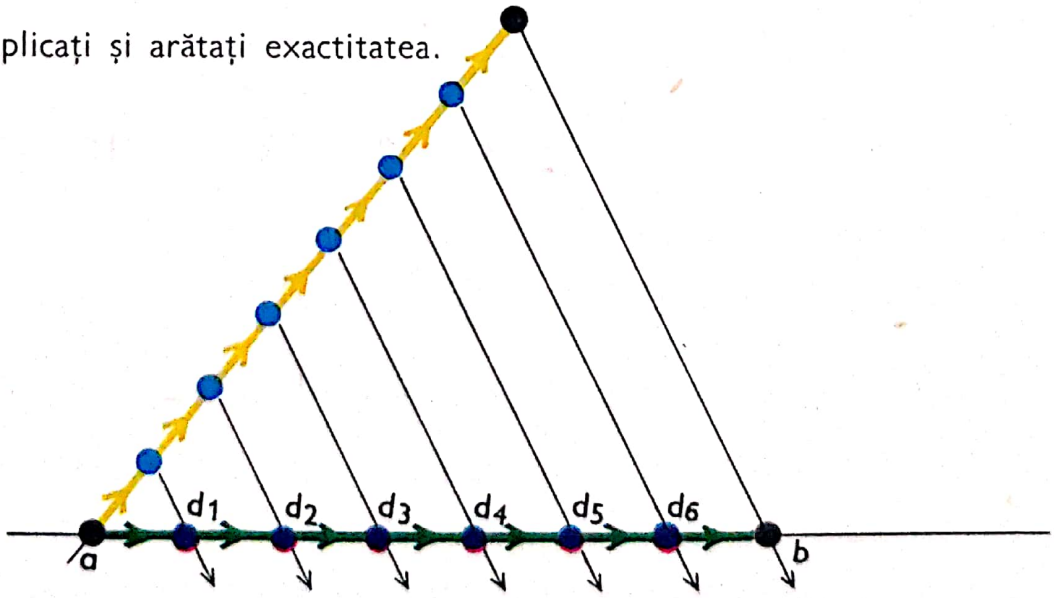


Explicați și arătați exactitatea.
Am schițat astfel o **gradare a dreptei.**
Prelungiți această gradare în ambele sensuri.

Vom utiliza de aici înainte drepte gradate fără să amintim ***construirea gradației.***

3. Iată punctele a și b.
Construiți punctele d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, astfel încît
$(a, d_1) \uparrow (d_1, d_2) \uparrow (d_2, d_3) \uparrow (d_3, d_4) \uparrow (d_4, d_5) \uparrow (d_5, d_6) \uparrow (d_6, b)$

Explicați și arătați exactitatea.

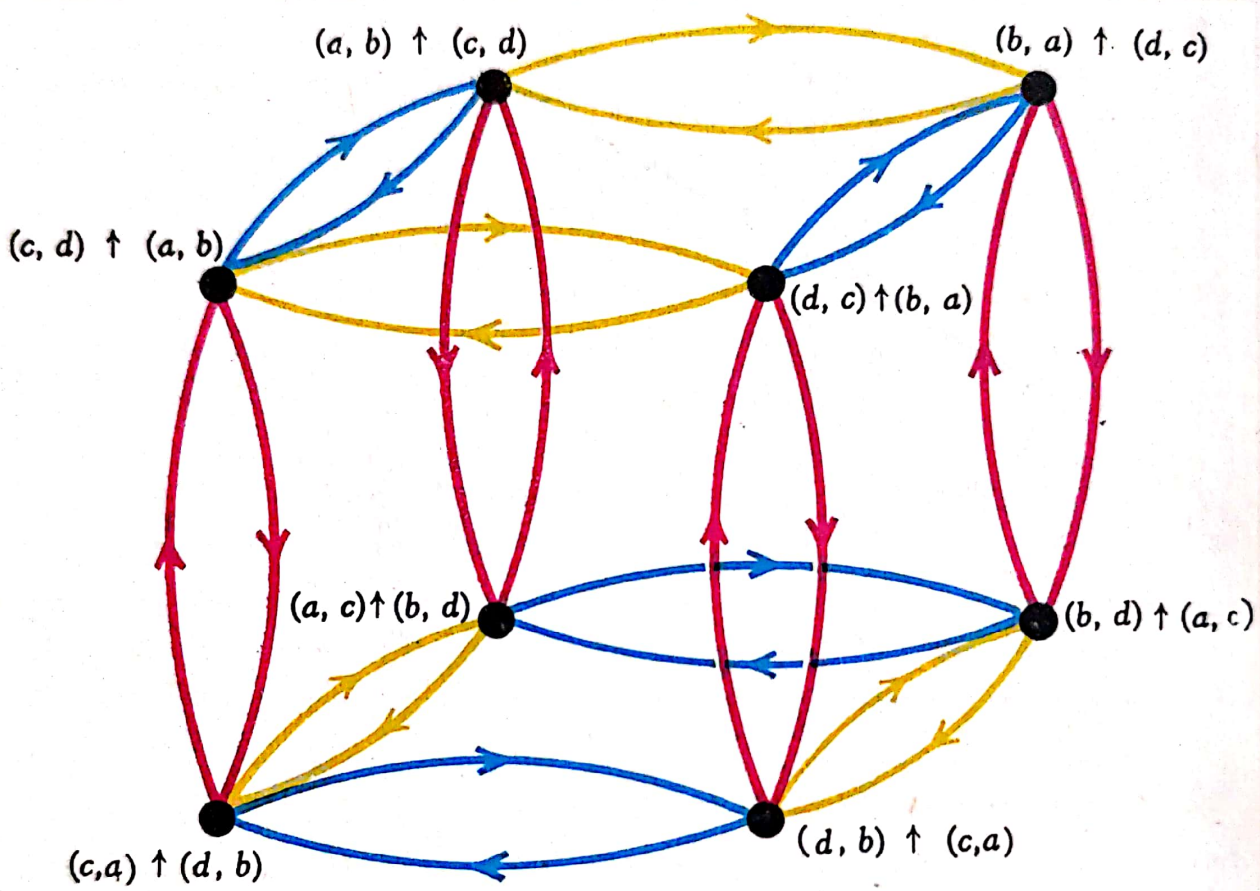


Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

1. Am văzut trei moduri de a transforma o echipolență într-o nouă echipolență:

f: $(a, b) \uparrow (c, d) \to (c, d) \uparrow (a, b)$ (lema 2)
g: $(a, b) \uparrow (c, d) \to (b, a) \uparrow (d, c)$ (lema 4)
h: $(a, b) \uparrow (c, d) \to (a, c) \uparrow (b, d)$ (teorema 3)



TRANSFORMĂRILE ECHIPOLENȚELOR
GRAFICUL 154

— f, g, h sînt permutări ale mulțimii E din cele 8 formule care figurează pe desenul de mai sus.
Să numim i transformarea identică a lui E.

Stabiliți: $i \circ i = i$, $f \circ i = i \circ f = f$, $g \circ i = i \circ g = g$, $h \circ i = i \circ h = h$,
$f \circ f = g \circ g = h \circ h = i$,
$f \circ g = g \circ f$, $g \circ h = h \circ f$, $f \circ h = h \circ g$.

Din aceasta deduceți: $f \circ g \circ f = g$, $g \circ h \circ f = h$, $f \circ h \circ g = h$
$g \circ f \circ g = f$, $h \circ g \circ h = f$, $h \circ f \circ h = g$.

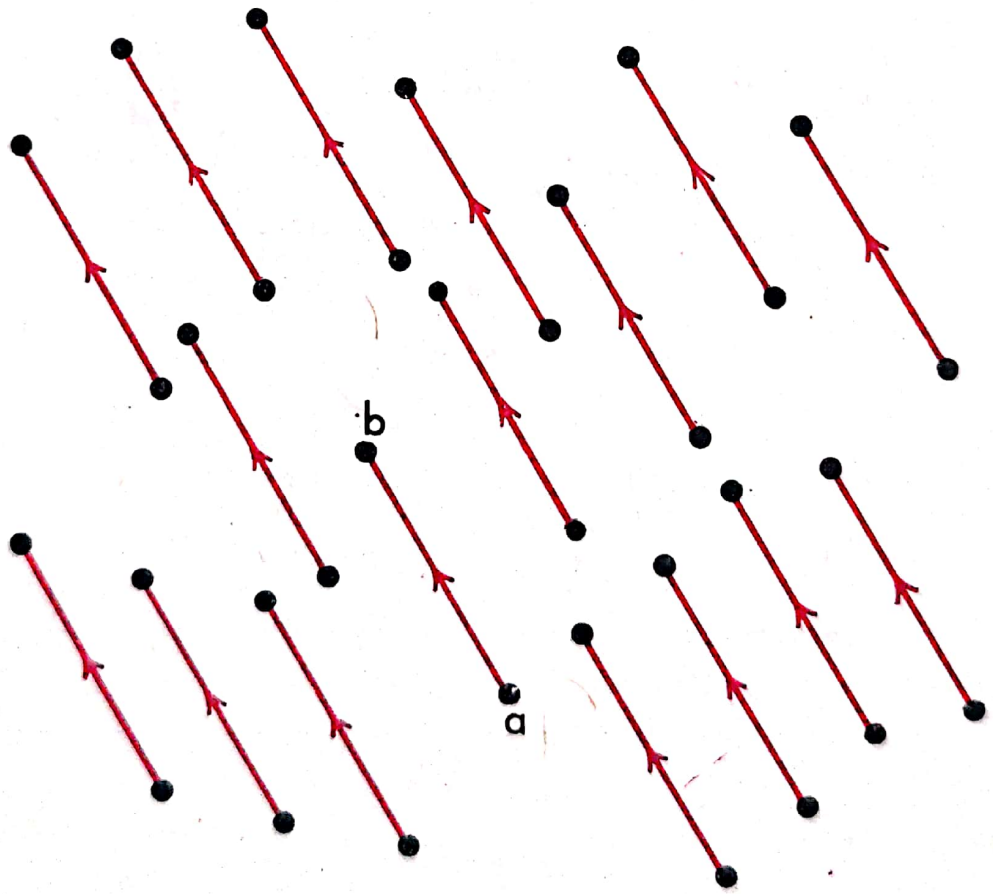
2. Dreapta care conține mijlocurile laturilor neparalele ale unui trapez este paralelă cu celelalte două laturi.

22

Translații

1 — TRANSLAȚII

lată o pereche (a,b),
Desenați cîteva perechi echipolente cu (a, b)

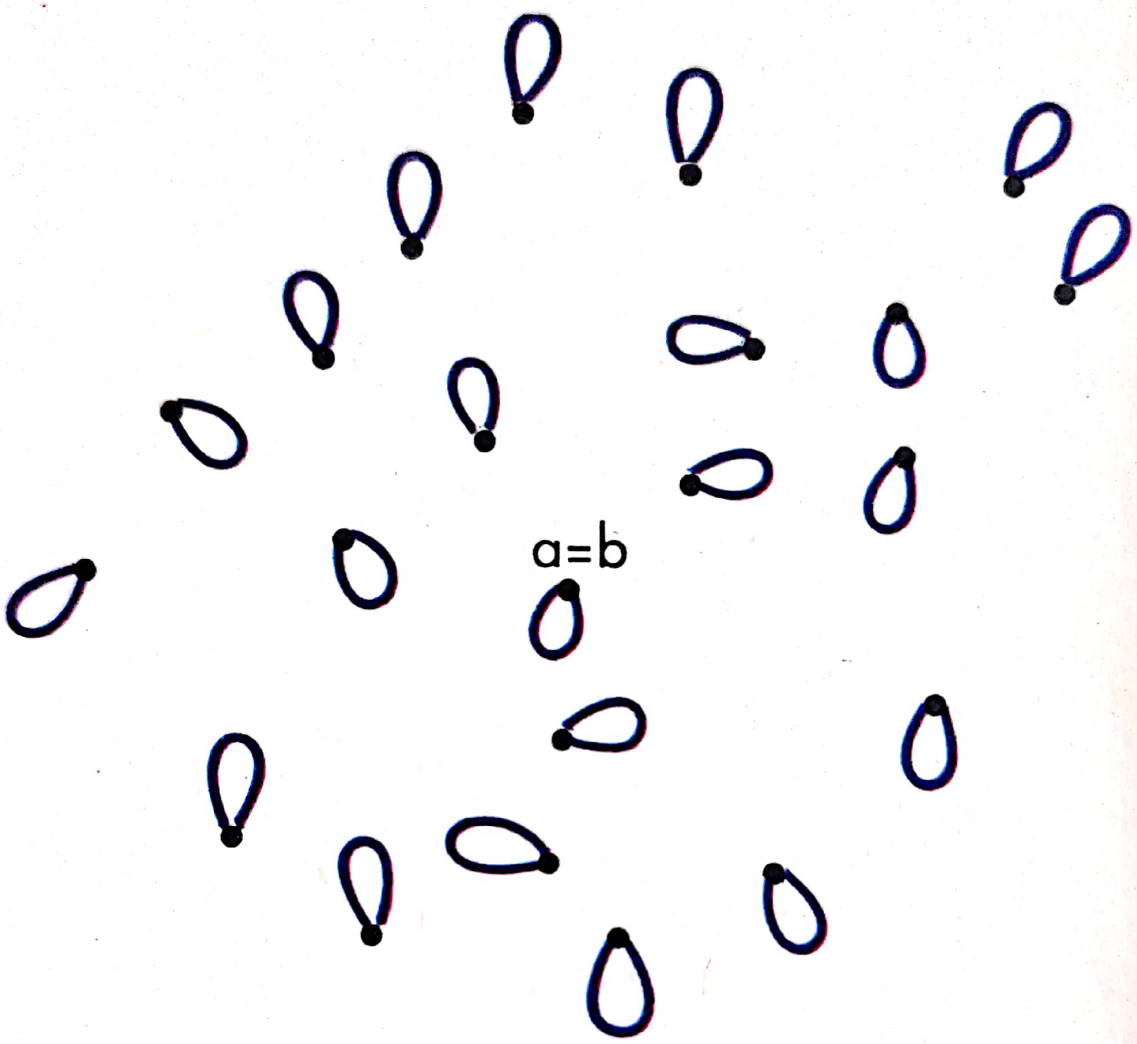


CÎTEVA SĂGEȚI ALE TRANSLAȚIEI $\overrightarrow{ab}$

GRAFICUL 155

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $a = b$, obținem situația



TRANSLAȚIA IDENTICĂ (CÎTEVA SĂGEȚI ALE EI)
GRAFICUL 156

DEFINIȚIA 1 — *Numim* ***translație*** $\vec{ab}$ *mulțimea perechilor echipolente cu* (a, b).

În formulă:

$$\vec{ab} = \{(x, y) \in \Pi \times \Pi \mid (x, y) \uparrow (a, b)\}$$

Deci

$$\vec{ab} = \vec{cd} \iff (a, b) \uparrow (c, d)$$

Scanned with OKEN Scanner

Transformarea identică 1_π, care este mulțimea perechilor echipolente cu (a, a) este o translație:

$$1_\pi = \overrightarrow{aa} = \overrightarrow{bb} = \overrightarrow{cc}$$

Am văzut (cap. 21) că orice punct al lui Π este origina unei și numai unei singure perechi echipolente cu (a, b) și extremitatea unei și numai unei singure perechi echipolente cu (a, b).

În formule:

$$(a, b) \uparrow (a, y) \Rightarrow y = b \qquad (a, b) \uparrow (x, b) \Rightarrow x = a$$

Este distractiv să deducem această dublă afirmație din teorema încrucișării (cap. 21, teorema 3, pag. 368).

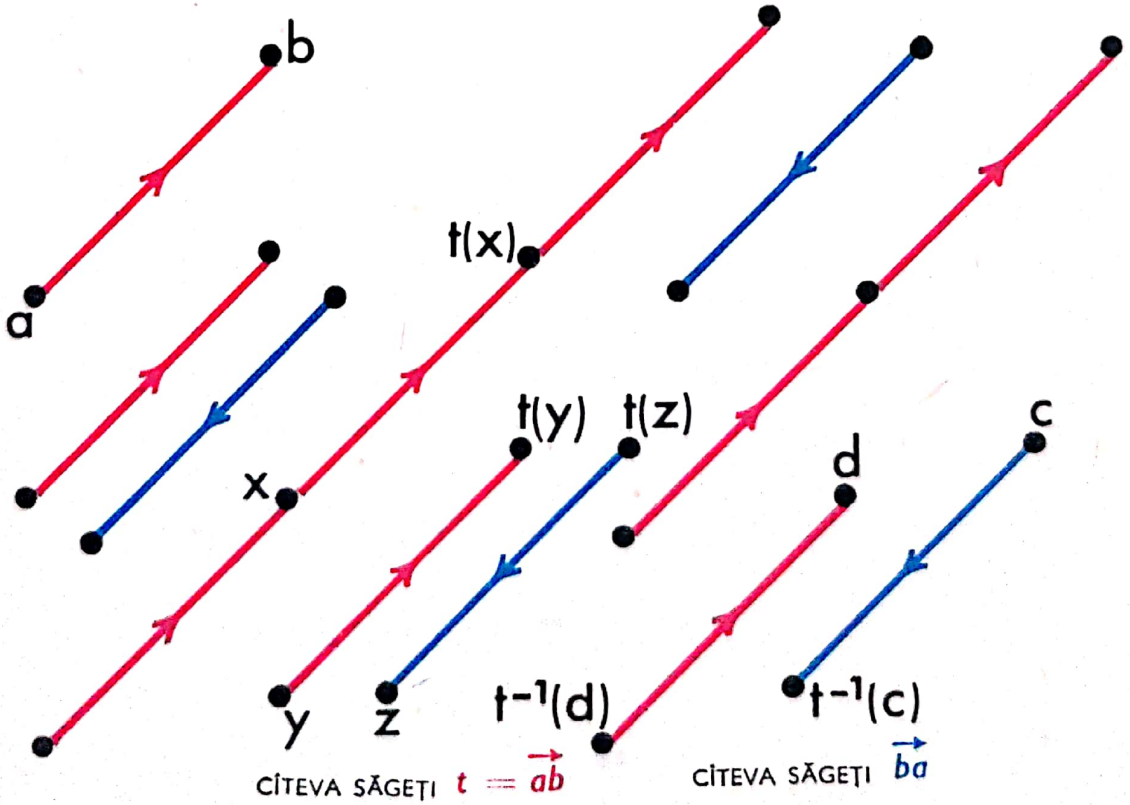
$$(a, b) \uparrow (a, y) \Rightarrow (a, a) \uparrow (b, y) \Rightarrow y = b$$
$$(a, b) \uparrow (x, b) \Rightarrow (a, x) \uparrow (b, b) \Rightarrow x = a$$

Orice punct al planului este origina unei și numai unei singure perechi a translației $\overrightarrow{ab}$ și extremitatea unei și numai unei singure perechi a translației $\overrightarrow{ab}$: translația $\overrightarrow{ab}$ este o permutare a planului Π.

Deoarece $(x, y) \uparrow (a, b) \iff (b, a) \uparrow (y, x)$

translația $\overrightarrow{ba}$ este reciproca translației $\overrightarrow{ab}$.

TEOREMA 1 — **Translația $\overrightarrow{ab}$ este o permutare a cărei reciproce este $\overrightarrow{ba}$.**



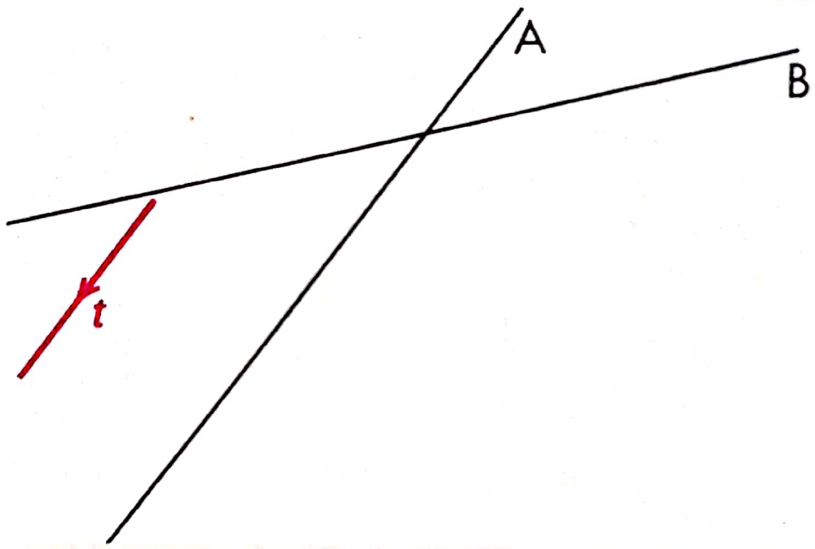
GRAFICUL 157

EXERCIȚII

1. Explicați și arătați exactitatea notărilor făcute pe desenul de mai sus.

2. Desenați o pisică. Ea reprezintă o parte C din Π.
Luați o translație t.
Desenați imaginea tC a lui C prin t.
Desenați de asemenea $t^2C = t(tC)$, t^3C, t^4c, . . .
Desenați în sfîrșit $t^{-1}C$, $t^{-2}C = t^{-1}(t^{-1}C)$, $t^{-3}C$, . . .
Ce constatați?

3. Care sînt imaginile dreptelor A și B prin translația t?
Ce concluzie trageți de aci?



4. Luați un punct x și o translație t.
Construiți $u(x)$, $u^2(x) = u(u(x))$,
$u^3(x)$, . . ., $u^{-1}(x)$, $u^{-2}(x) = u^{-1}(u^{-1}(x))$, $u^{-3}(x)$, . . .

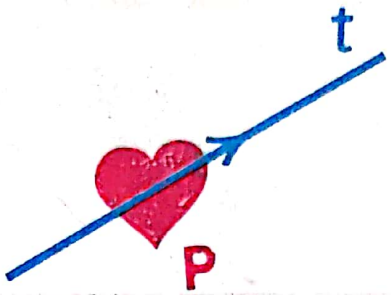
5. Luați o translație t.
Găsiți o parte E a lui Π astfel încît $tE = E$.
La această întrebare sînt multe răspunsuri.

6. Luați un punct x și o translație t.
Găsiți o mulțime E care să conțină pe x și astfel încît $E = tE$.
Dați mai multe răspunsuri la această întrebare.

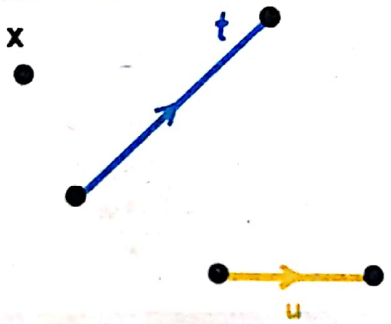
7. Care este cea mai mică mulțime E astfel încît $x \in E = tE$ (unde t reprezintă o translație)?

Scanned with OKEN Scanner

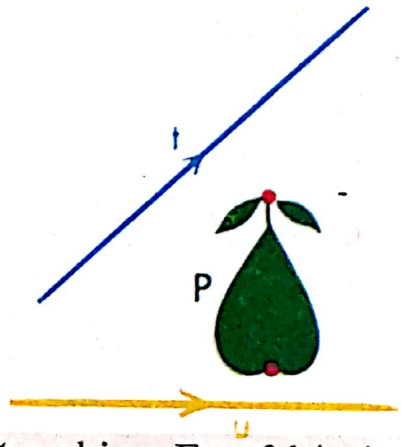
8. Care este cea mai mică mulțime E astfel încît $P \subset E = tE$ (unde t reprezintă o translație)?



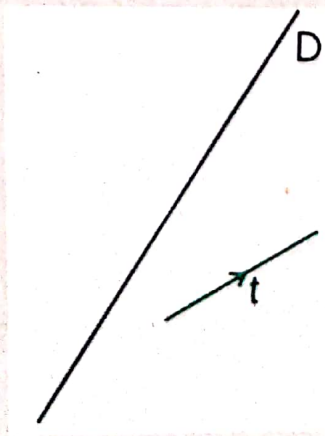
9. Care este cea mai mică mulțime E astfel încît $x \in E = tE = uE$ (unde t și u reprezintă translații)?



10. Care este cea mai mică mulțime E astfel încît $P \subset E = tE = uE$ (unde t și u reprezintă translații)?

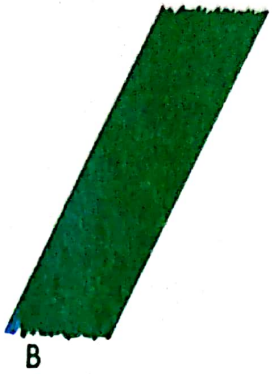


11. Care este cea mai mică mulțime E astfel încît $D \subset E = tE$ (unde t reprezintă o translație)?

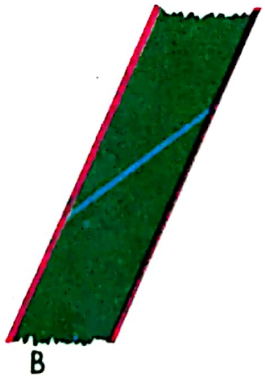


Scanned with OKEN Scanner

12. Care este cea mai mică mulțime E astfel încît $B \subset E = tE$ (unde t reprezintă o translație)?



13. Aceeași întrebare.



14. Dacă t reprezintă o translație, avem, pentru orice $a, b, \in \Pi$:

$$(a, t(a)) \uparrow (b, (t(b))$$

Din aceasta deduceți

$$(a, b) \uparrow (t(a), t(b))$$

Ce teoremă ați utilizat?

15. Dacă t reprezintă o translație și $a, b \in \Pi$, *perechea* $(t(a), t(b))$ va fi numită, firește, *imaginea* perechii (a, b) prin t.

Ați dovedit mai sus că orice pereche este echipolentă cu imaginea ei printr-o translație.

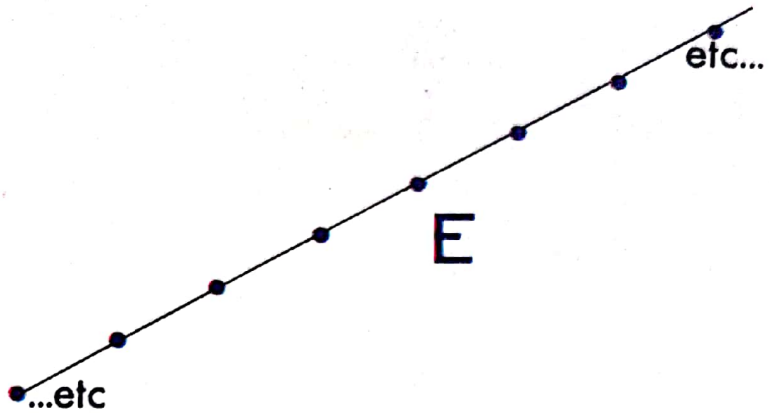
Dovediți că dacă *două perechi sînt echipolente, imaginile lor prin* t *sînt de asemenea echipolente.*

16. $$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd} \iff \overrightarrow{ba} = \overrightarrow{dc} \iff \overrightarrow{cd} = \overrightarrow{ab} \iff \overrightarrow{dc} = \overrightarrow{ba}$$

$$\iff \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{bd} \iff \overrightarrow{bd} = \overrightarrow{ac} \iff \overrightarrow{ca} = \overrightarrow{db} \iff \overrightarrow{bd} = \overrightarrow{ca}$$

Scanned with OKEN Scanner

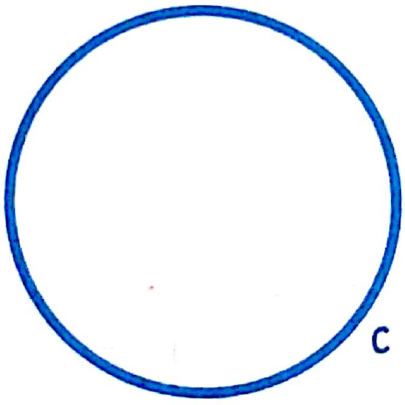
17. Iată un fragment dintr-o mulțime infinită E.



Care sînt translațiile t astfel încît $E = tE$?

18. Dacă $D \in \mathfrak{D}$, care sînt translațiile t astfel încît $tD = D$?

19.



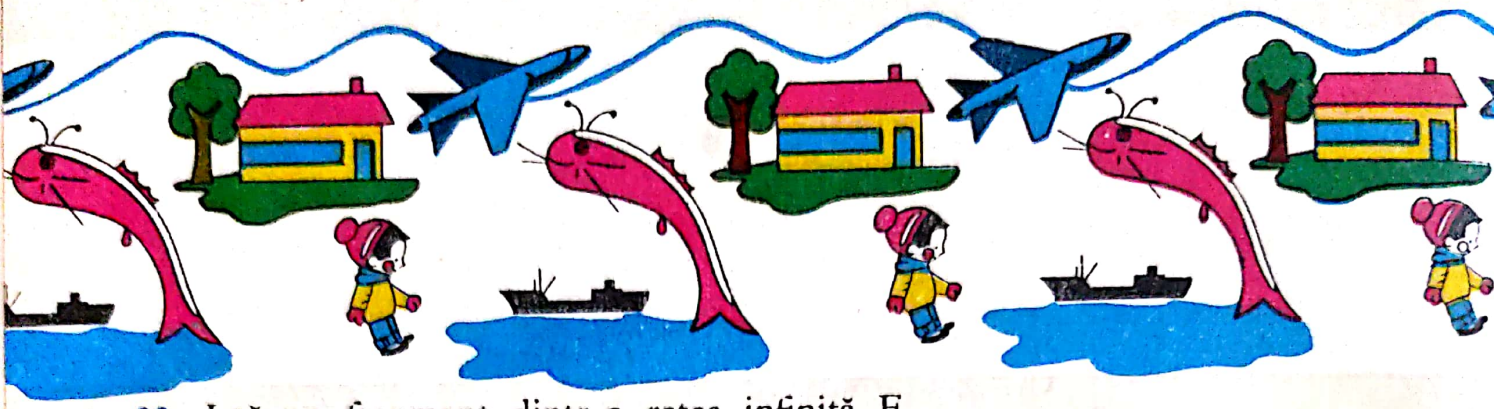
Există o translație t astfel încît $tC = C$?

20. Iată un fragment dintr-o friză F (pe care o considerăm prelungită indefinit în ambele sensuri).

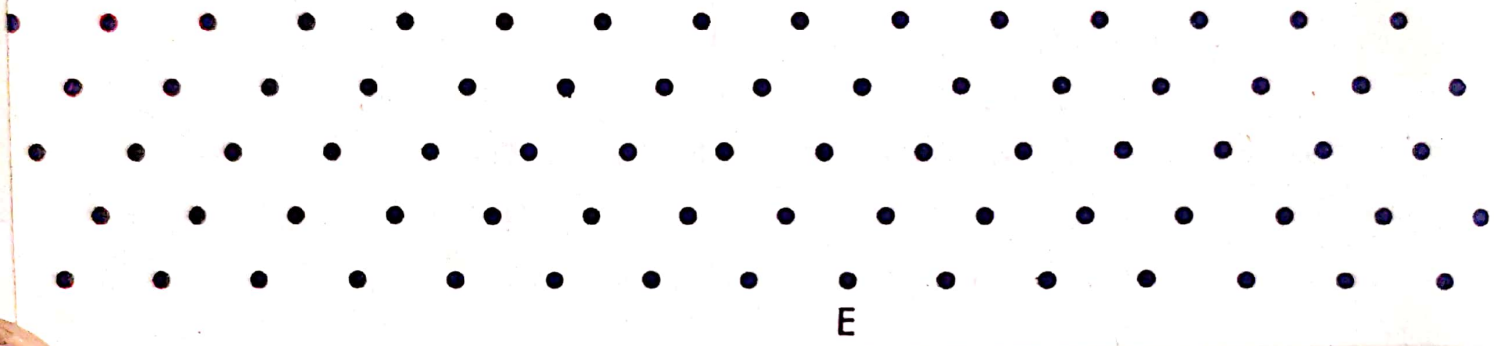
Care sînt translațiile t astfel încît $tF = F$?

Scanned with OKEN Scanner

21. Aceeași întrebare pentru următoarea friză.



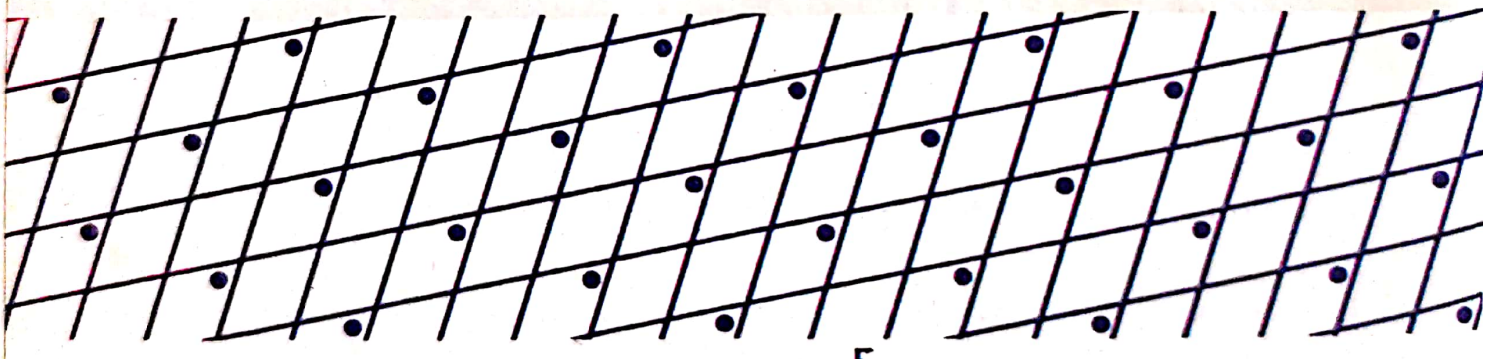
22. Iată un fragment dintr-o rețea infinită E.



E

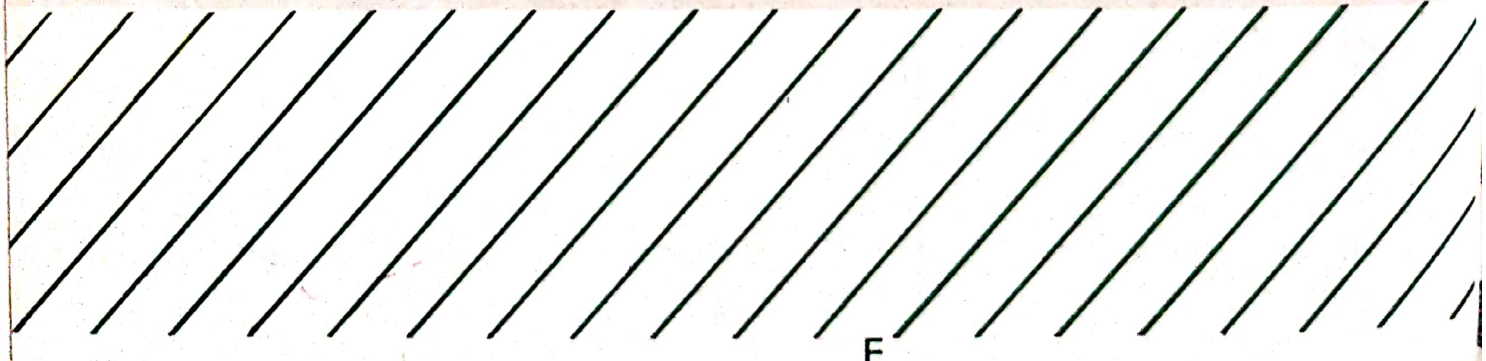
Care sînt translațiile t astfel încît $tE = E$?

23. Aceeași întrebare pentru mulțimea E, din care iată un fragment.



E

24. Aceeași întrebare pentru mulțimea E, din care iată un fragment



E

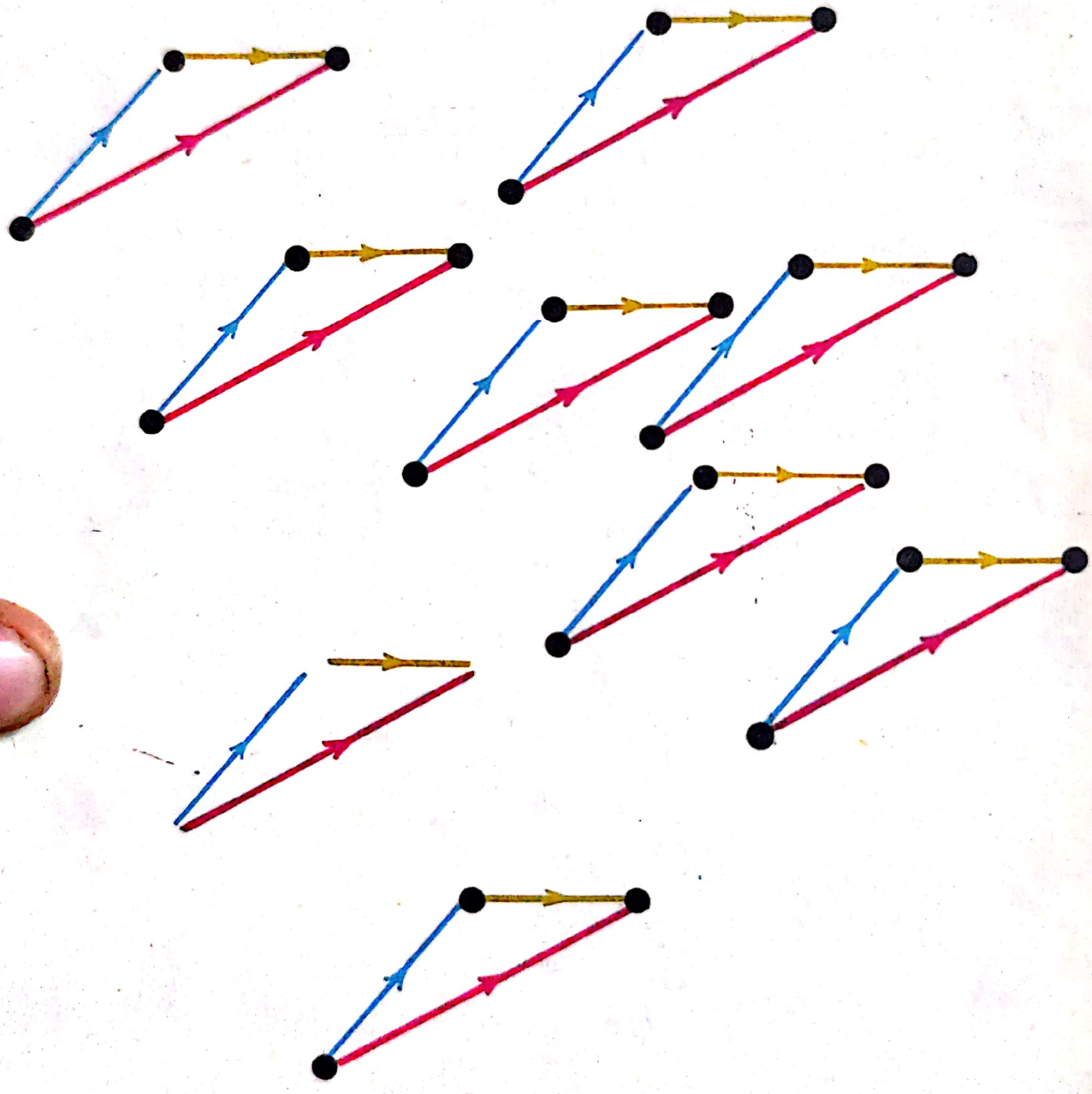
Scanned with OKEN Scanner

25. Aceeași întrebare pentru tapiseria infinită T din care iată un fragment

Scanned with OKEN Scanner

2 — GRUPUL TRANSLAȚIILOR

— Desenați cu albastru cîteva săgeți ale translației t,
cu galben cîteva săgeți ale translației u,
cu roșu cîteva săgeți ale compusei uot.

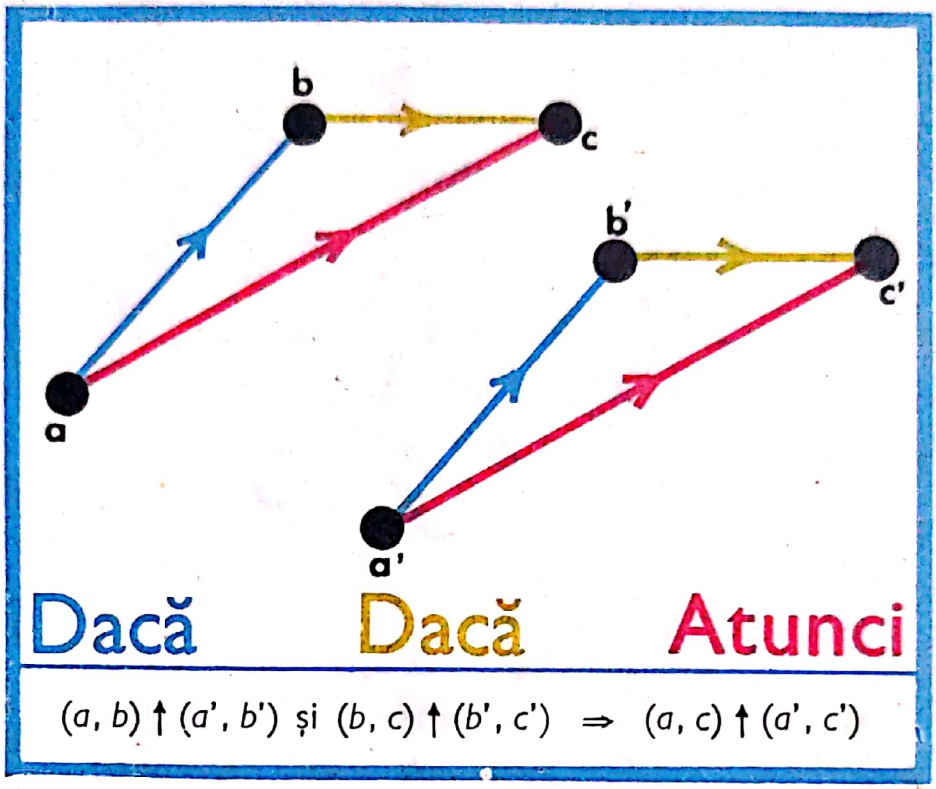


CÎTEVA SĂGEȚI ALE TRANSLAȚIEI t ȘI ȘI ALE COMPUSEI LOR $u \circ t$

GRAFICUL 158

Scanned with OKEN Scanner

— Compusa *uot* este o translație !
— Vom stabili acest lucru. Va trebui să dovedim că



DEMONSTRAȚIE :

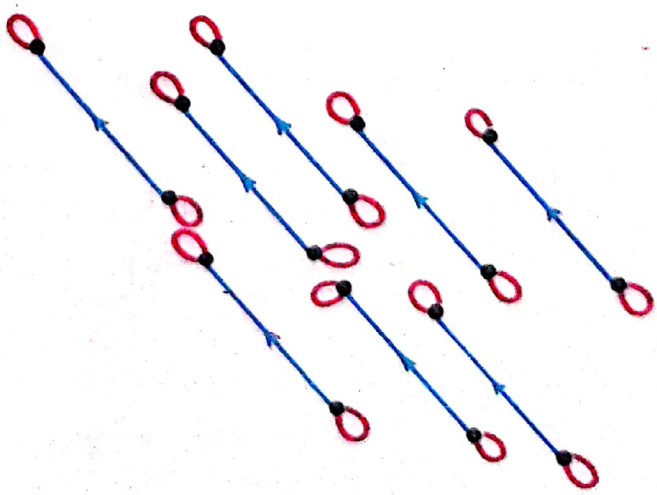
(încrucișăm !) $\Rightarrow$ $(a, b) \uparrow (a', b')$ și $(b, c) \uparrow (b', c')$
$(a, a') \uparrow (b, b')$ și $(b, b') \uparrow (c, c')$

(tranzitivitatea echipolenței) $\Rightarrow$ $(a, a') \uparrow (c, c')$

(încrucișăm !) $\Rightarrow$ $(a, c) \uparrow (a', c')$ Ceea ce trebuia să demonstrăm.

Am stabilit deci *că compusa a două translații este o translație.*
Știți însă *că compunerea relațiilor este asociativă.*
În special, compunerea translațiilor este asociativă.
Translația identică 1_π este neutră pentru compunere :

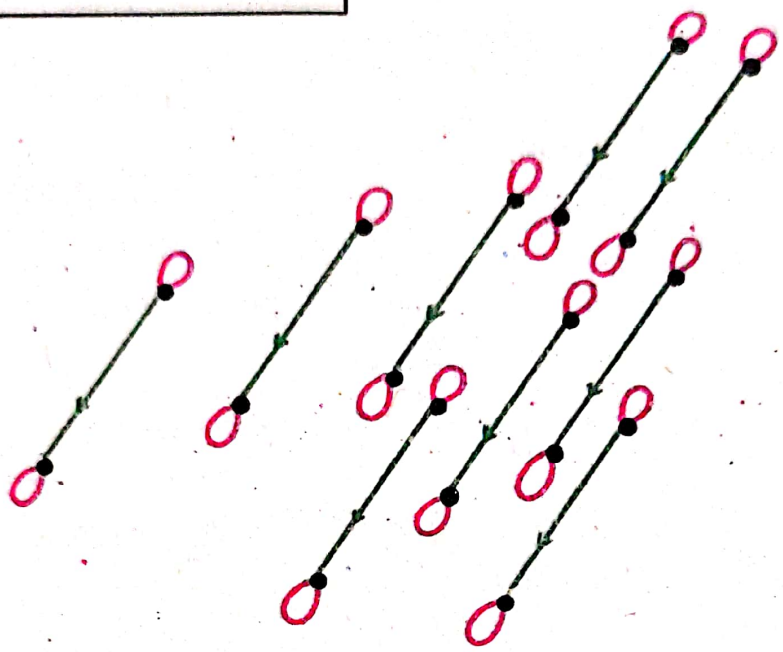
$t \circ 1_\pi = t = 1_\pi \circ t$



GRAFICUL 159
TRANSLAȚIA IDENTICĂ 1_π
E NEUTRĂ PENTRU COMPUNERE.

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrșit, pentru orice translație t reciproca t^{-1} este o translație (teorema 1) și



$$t^{-1} \circ t = 1_\pi = t \circ t^{-1}$$

GRAFICUL 160

Am stabilit deci că

Compusa a două translații este o translație.
Compunerea translațiilor este asociativă.
Translația identică 1_Π este neutră pentru o.
Pentru orice translație t: $t^{-1} \circ t = 1_\Pi = t \circ t^{-1}$

După cum știți, mulțimea acestor leme se exprimă spunînd că

Mulțimea $\mathcal{T}$ a translațiilor este un grup pentru compunere.

Pe scurt

$\mathcal{T}$, o este un grup.

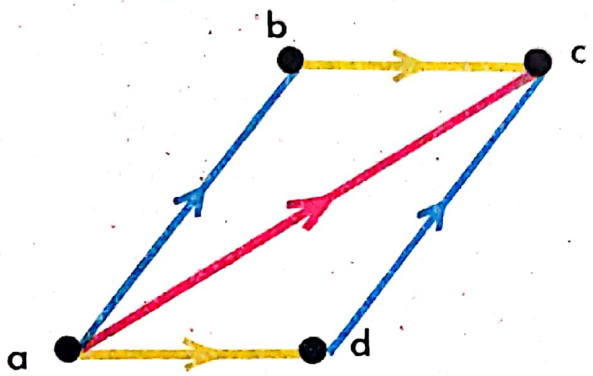
Scanned with OKEN Scanner

3. — COMUTATIVITATEA GRUPULUI TRANSLAȚIILOR

Știți că compunerea relațiilor nu este comutativă.
Astfel, dacă M reprezintă relația « mamă », iar T relația « tată », atunci

$$T \circ M \neq M \circ T$$

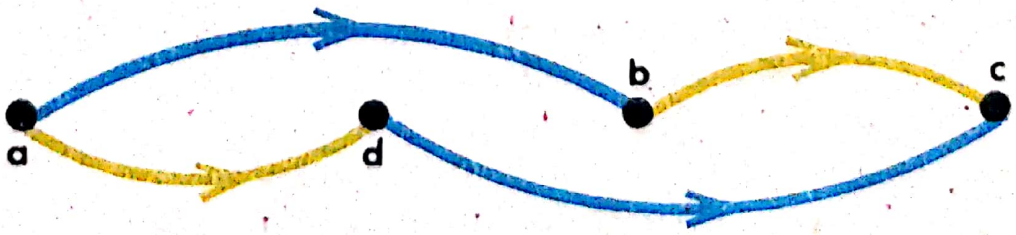
Să reluăm situația din graficul 158, pag. 386 și să comparăm $u \circ t$ cu $t \circ u$.



$$u \circ t = t \circ u$$

Pe acest desen, **a**, **b**, **c** *nu sînt aliniate*.
Reprezentați aceeași situație cînd a, b, c sînt aliniate.
Trasați perechile (a, b), (b, c), (a, d).

Avem $(a, d) \uparrow (b, c)$
Să încrucișăm : $(a, b) \uparrow (d, c)$
Putem completa, deci, această schemă



Astfel am stabilit că în toate cazurile:

$$t \circ u = u \circ t.$$

Să recapitulăm toate rezultatele obținute în acest paragraf și în cel precedent, în importanta

TEOREMĂ 2 — **Mulțimea translațiilor este un grup comutativ pentru compunere.**

Pe scurt

$$\mathfrak{T}, \circ \text{ este un grup comutativ}$$

EXERCIȚII

1. Ce grupuri am întîlnit pînă acum?

$\mathfrak{S}E, \circ$ $\quad$ $Z, +$ $\quad$ $\mathfrak{T}, \circ$

În aceste trei cazuri este vorba de o mulțime prevăzută cu o lege sau o operație.
Indicați pentru aceste trei exemple cele patru proprietăți care ne-au permis să recunoaștem un grup.

2. Cînd vom spune că $G, \star$ este un grup?
$G, \star$ este un grup dacă și numai dacă G este o mulțime și $\star$ o lege, astfel încît

1. Dacă $x, y \in G$	Atunci $x \star y \in G$
2. Dacă $x, y, z \in G$	Atunci $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$
3. Există un element $v \in G$ astfel încît	Dacă $g \in G$: $g \star v = g = v \star g$
4. Pentru orice $g \in G$, există $\bar{g} \in G$ astfel încît	$g \star \bar{g} = v = \bar{g} \star g$

$G, \star$ este un GRUP.

3. Cum se interpretează cele patru condiții 1, 2, 3, 4 enumerate mai sus?

1. $\star$ este o lege (internă).
2. $\star$ este o lege asociativă.
3. $\star$ admite elementul neutru v.
4. orice element g admite un simetric $\bar{g}$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Formulați din nou definiția grupurilor utilizînd interpretările de la exercițiul 3.

Numim Grup G, ⋆
orice mulțime prevăzută cu o lege ⋆
internă, asociativă, admițînd un element neutru ν
și astfel încît orice element al lui G să posede un simetric.

Grup G, ⋆

5. Ce este un grup comutativ?
— Este un grup a cărui lege este comutativă.

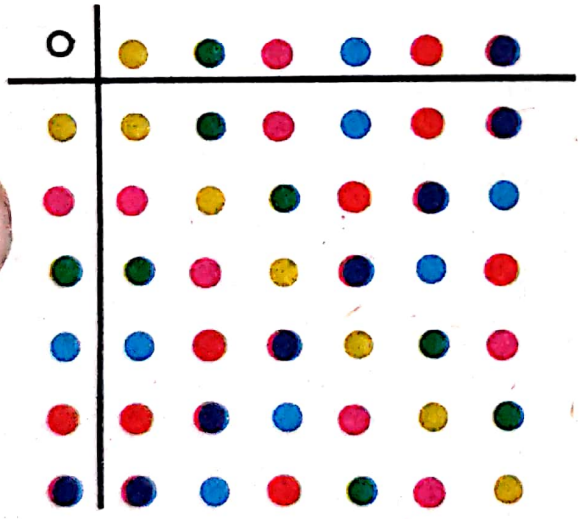
6. Pentru orice mulțime E,

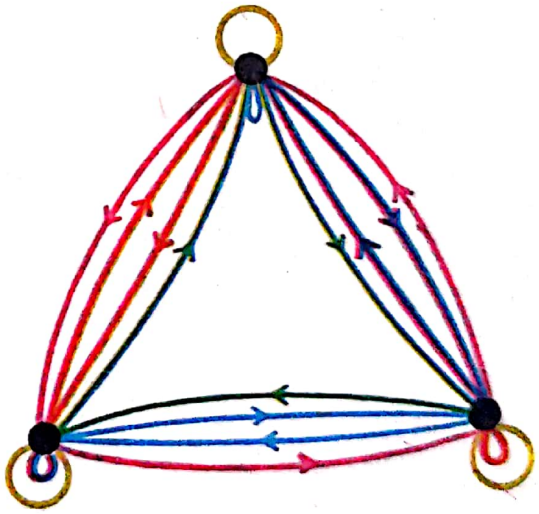
$$\mathcal{P}\,E,\ \Delta$$

este un grup comutativ.

Mulțimea vidă este elementul lui neutru.
Orice element al mulțimii $\mathcal{P}\,E$ este propriul său simetric.

7. Grupul permutărilor unei mulțimi de trei elemente nu este comutativ.



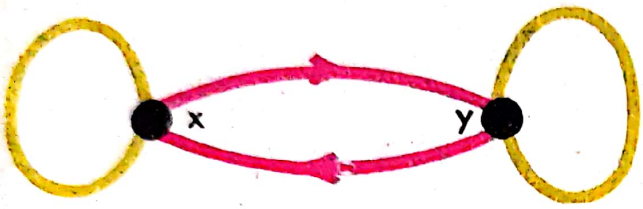


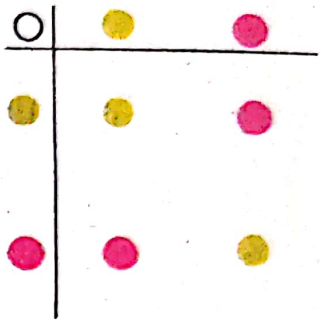
GRUPUL $\mathfrak{S}\ \{a, b, c\}$, ∘ ȘI TABLA SA DE COMPUNERE.
GRAFICUL 161

Acest grup nu este comutativ deoarece

8. Iată o mulțime nevidă E.
$\cup$ este o lege definită în $\mathcal{P}$ E
internă, asociativă, care admite elementul neutru $\varnothing$.
Și totuși $\mathcal{P}$ E, $\cup$ nu este un grup.
De ce?

9. Grupul permutărilor perechii $\{x, y\}$ este comutativ.





GRUPUL $\mathfrak{S}$ $\{x, y\}$, O ȘI TABLA SA DE COMPUNERE

GRAFICUL 162

10. Dacă t este o translație și P o parte a planului,
$$tP = Q \iff t^{-1} Q = P$$

11. Fie E o mulțime nevidă.
$\mathcal{P}$E, $\cap$ este un grup?

12. **Dacă** D reprezintă o dreaptă, **atunci** mulțimea translațiilor t, astfel încît $tD = D$, este un grup pentru compunere.
Spunem că acest grup este un **subgrup** al translației $\mathcal{C}$. o.

13. **Dacă** E reprezintă o parte a lui Π, **atunci** mulțimea translațiilor t astfel încît $tE = E$ este un grup pentru o.

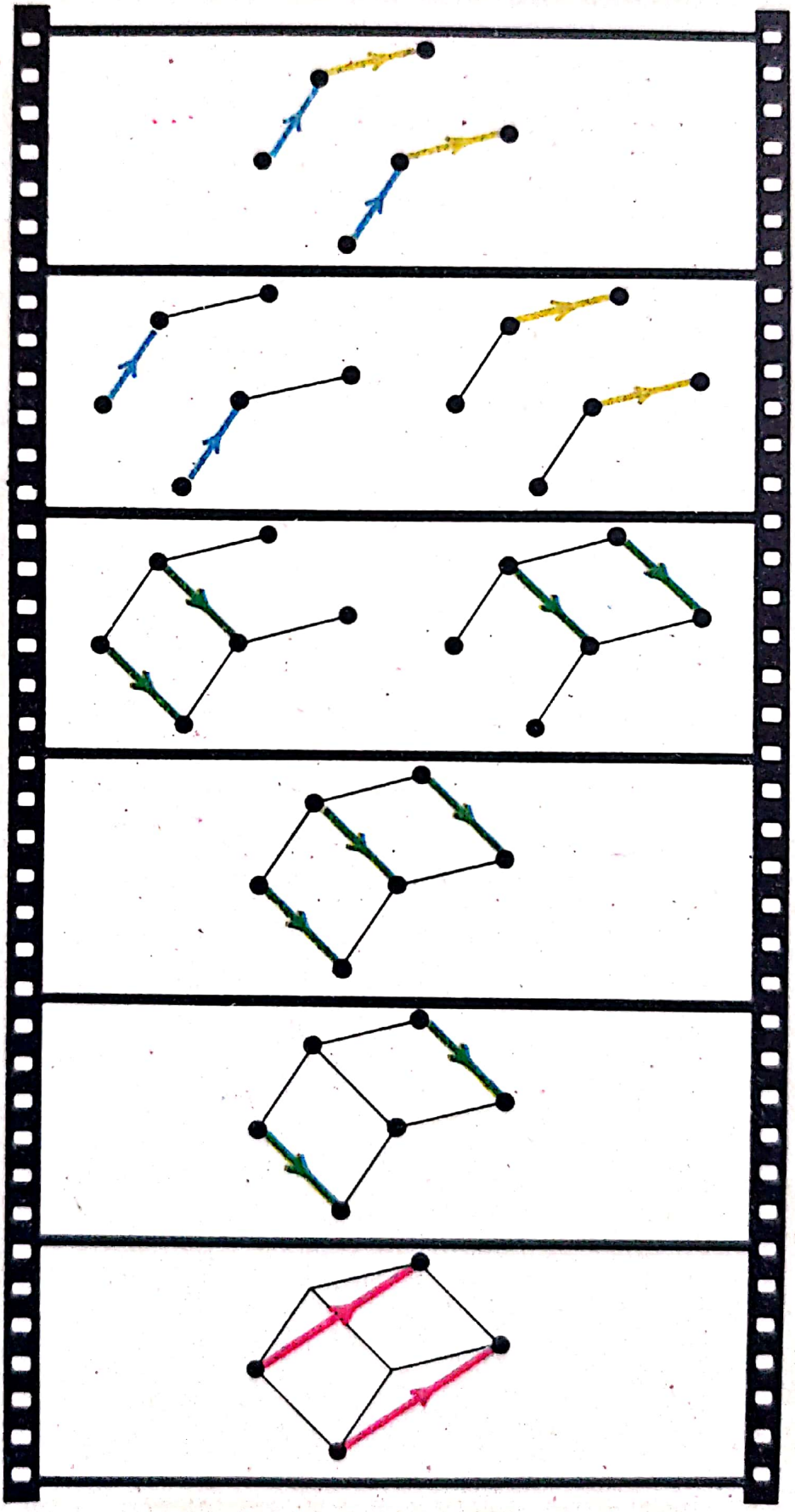
14. Care este grupul translațiilor t astfel încît $t\Pi = \Pi$?

15. Care sînt grupurile translațiilor t astfel încît t E = E în cazul exercițiilor 17, 21, 22, 23, 24 de la § 1.

16. Întrebare analogă pentru exercițiile 19, 20, 25 de la § 1.

Scanned with OKEN Scanner

17. Am stabilit mai sus că compusa a două translații este o translație. Desenați un film cu această demonstrație.



Scanned with OKEN Scanner

4 — VECTORI, ADUNAREA VECTORILOR

ATENȚIE: notare

Am notat cu $\mathfrak{T}$, o grupul translațiilor.

Am folosit pînă acum semnul o care este semnul general al compunerii.

Cînd este vorba de translații, se înlocuiește deseori semnul compunerii o cu semnul $+$.

Veți aprecia mai tîrziu avantajele acestei notări adoptate universal.

Schimbarea semnului o cu semnul $+$ este însoțită de o schimbare generală a terminologiei și a notărilor.

Este deci important să se facă efortul necesar pentru asimilarea acestei terminologii.

Translația t se va numi *vector* și va fi notată, de preferință, $\vec{t}$.

Reciproca t^{-1} a translației t va fi notată $-\vec{t}$ și va fi numită **vector simetric sau opus** vectorului $\vec{t}$.

Translația identică 1_π se va scrie $\vec{o}$ și va fi numită **vector nul.**

Mulțimea $\mathfrak{T}$ va fi atunci notată V.

Iată un mic dicționar de sinonime care vă va ajuta să treceți de la o terminologie la alta.

DICȚIONAR DE SINONIME

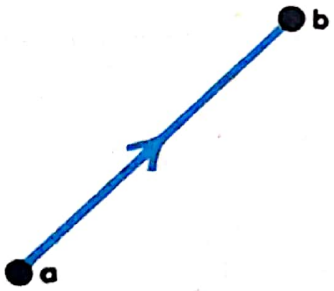
o	+
translație	*vector*
compunere	*adunare*
compusă	*sumă*
translație t	*vector* $\vec{t}$
translație identică	*vector nul*
1_π	$\vec{o}$
t^{-1}	$-\vec{t}$
translație reciprocă	*vector simetric (sau opus)*
$\mathfrak{T}$	V
$\mathfrak{T}, o$	$V, +$

Scanned with OKEN Scanner

Ca exemplu, enunțați cu noua terminologie proprietățile care asigură că V, + este un grup comutativ.

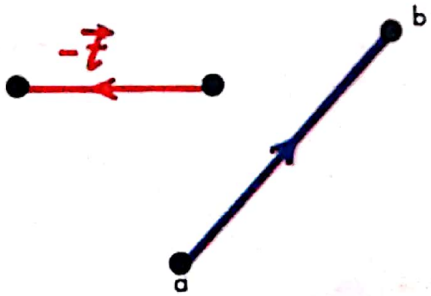
1. Pentru orice $\vec{u}, \vec{v} \in V$: $\vec{u} + \vec{v} \in V$
2. Pentru orice $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
3. Pentru orice $\vec{v} \in V$: $\vec{v} + \vec{o} = \vec{v} = \vec{o} + \vec{v}$
4. Pentru orice $\vec{v} \in V$: $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{o} = (-\vec{v}) + \vec{v}$
5. Pentru orice $\vec{u}, \vec{v} \in V$: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

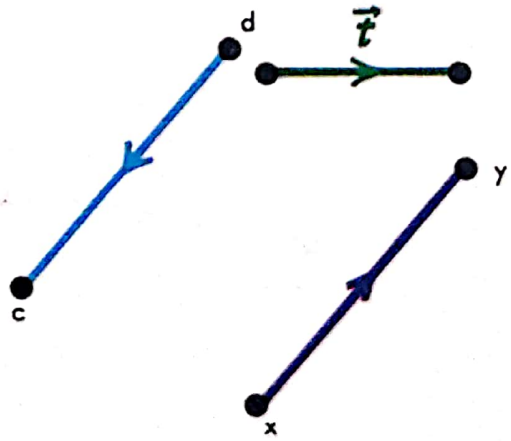
Deoarece orice pereche definește o *translație sau vector*, vom reprezenta ușor *un vector* (= o translație) printr-o pereche.



VECTORUL SAU TRANSLAȚIA $\vec{ab}$

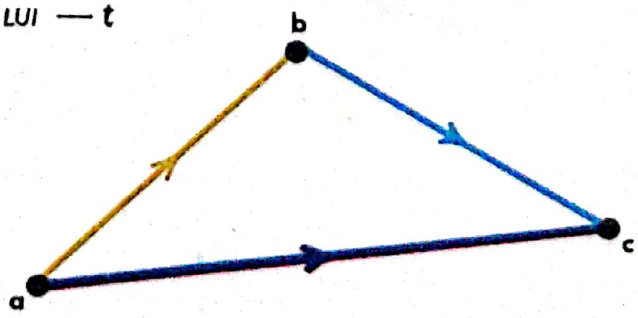
VECTORUL NUL





$\vec{ab} = -\vec{dc} = \vec{xy}$

VECTORUL $\vec{t}$ ȘI OPUSUL LUI $-\vec{t}$



$\vec{ac} = \vec{ab} + \vec{bc}$

Dacă $\vec{u}$ și $\vec{t}$ reprezintă vectori, vom pune

$$\vec{u} - \vec{t} = \vec{u} + (-\vec{t})$$

Astfel

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ac} &= \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} \\ &= \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ab} \\ &= \overrightarrow{bc} + (-\overrightarrow{ba}) \\ &= \overrightarrow{bc} - \overrightarrow{ba}\end{aligned}$$

TEOREMA 3 — **Dacă fiecare din literele *a*, *b*, *c* . . . reprezintă un punct al lui Π**

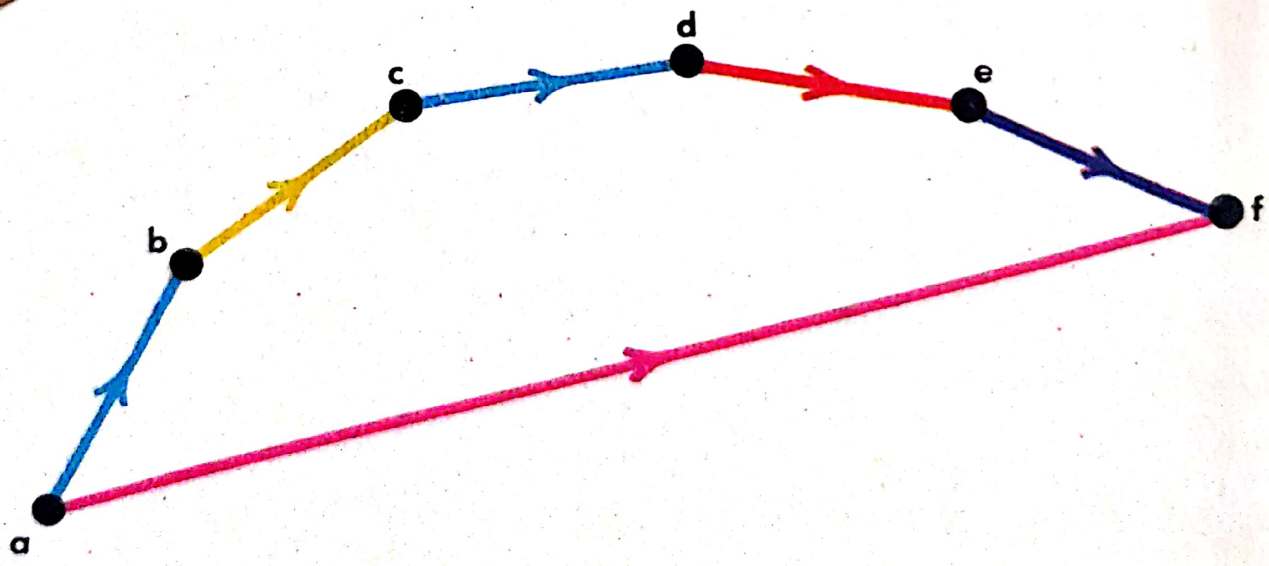
$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$$

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cd} + \ldots + \overrightarrow{hk} = \overrightarrow{ak}$$

$$\overrightarrow{aa} = \overrightarrow{o}$$

$$-\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ba}$$

$$\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac} - \overrightarrow{ab}$$



$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{de} + \overrightarrow{ef} = \overrightarrow{af}$$

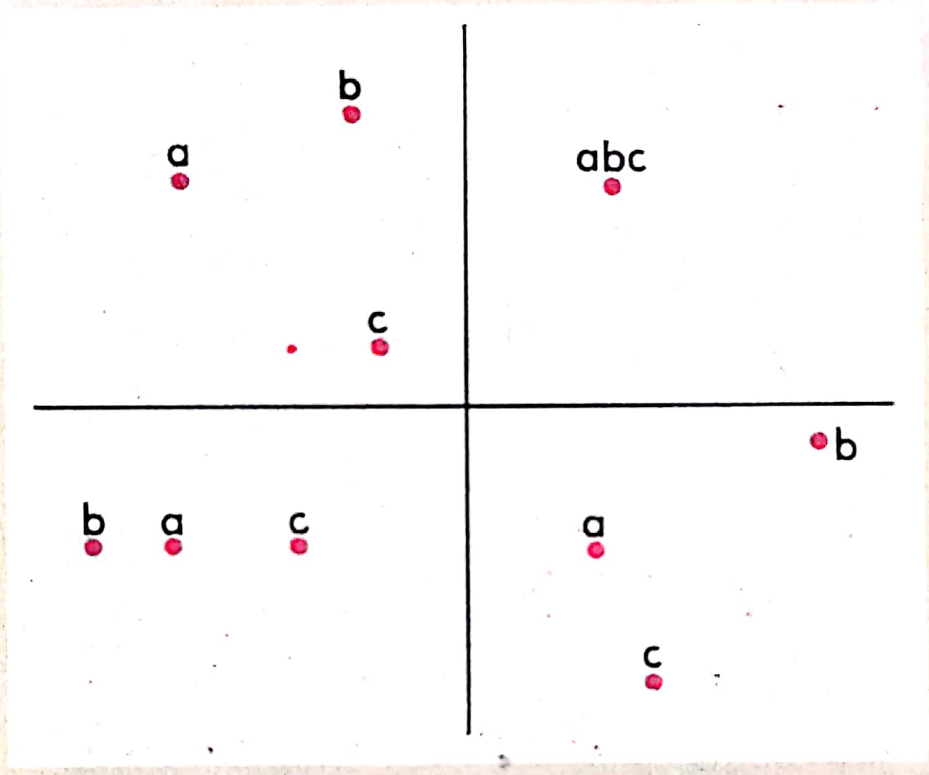
Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

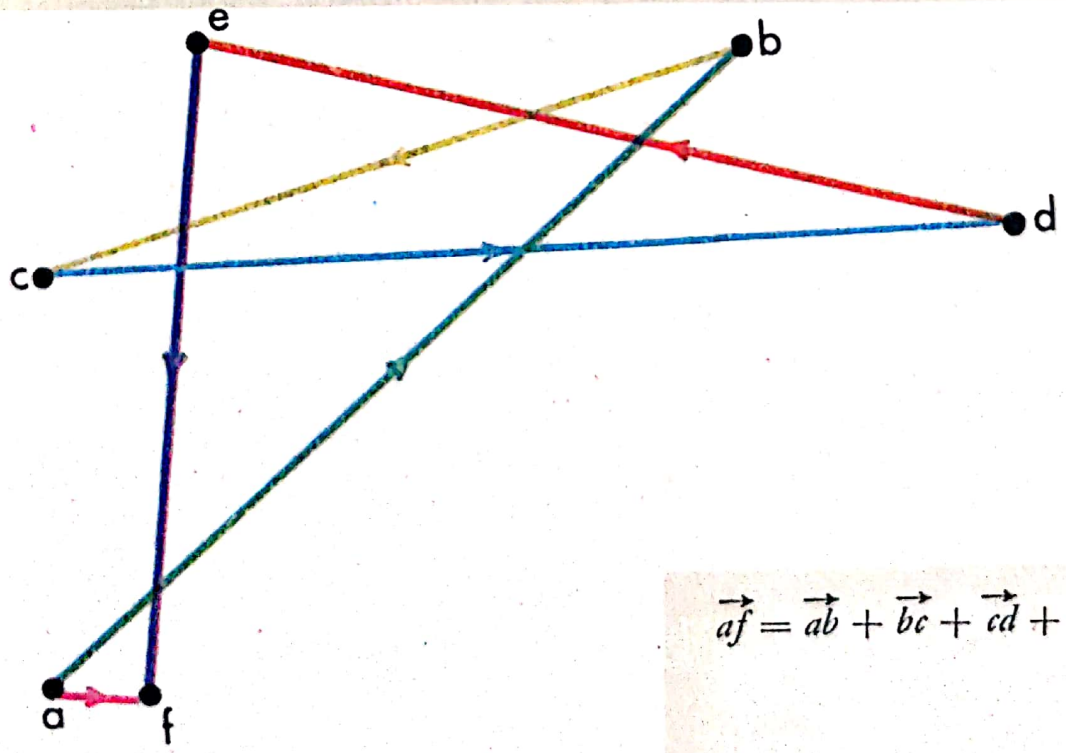
1. Găsiți pe x astfel încît să avem

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cx}$$

în diversele situații de mai jos



2.



$$\overrightarrow{af} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{de} + \overrightarrow{ef}$$

Scanned with OKEN Scanner

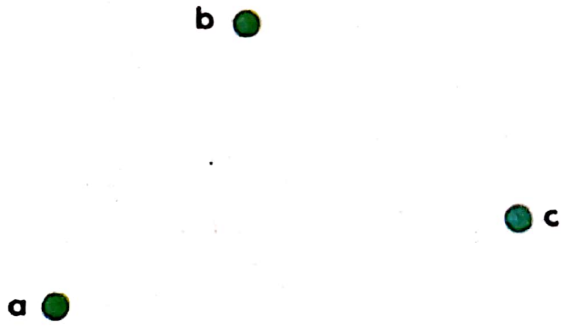
3. Dacă fiecare din literele $a, b, c, d, e, \ldots, x, y, z$ reprezintă un punct al lui Π

$$\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{cd} + \ldots + \vec{xy} + \vec{yz} + \vec{za} = \vec{0}$$

4. Iată două puncte a, b

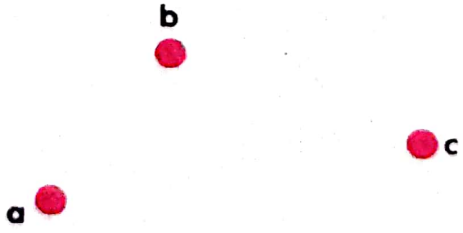
Construiți pe x astfel încît $\vec{ax} = \vec{ab} + \vec{ab}$

5. Iată punctele a, b, c



Construiți pe x astfel încît $\vec{cx} = \vec{ba} + \vec{ba} + \vec{ba}$

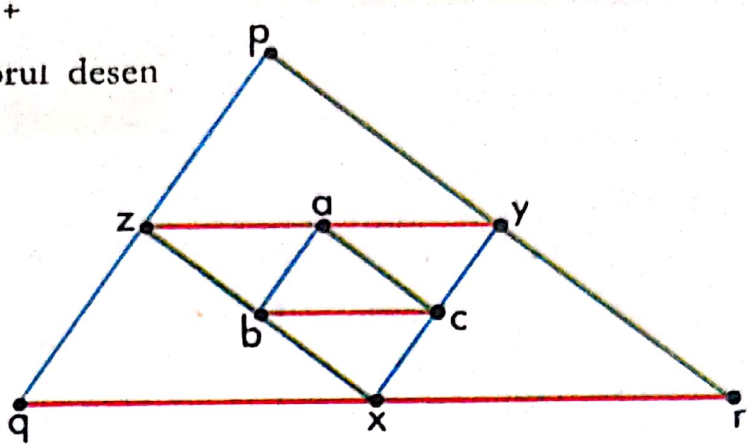
6. Iată punctele a, b, c



7. Construiți pe x, y, z astfel încît

$$\begin{aligned} \vec{bx} &= \vec{ac} \\ \vec{bz} &= \vec{ca} \\ \vec{ay} &= \vec{bc} \end{aligned}$$

8. Priviți următorul desen



Am făcut întîi triunghiul *abc*.
Cum am făcut celelalte construcții?
Am dus exclusiv paralele (și am determinat intersecțiile de drepte).

Stabiliți formulele

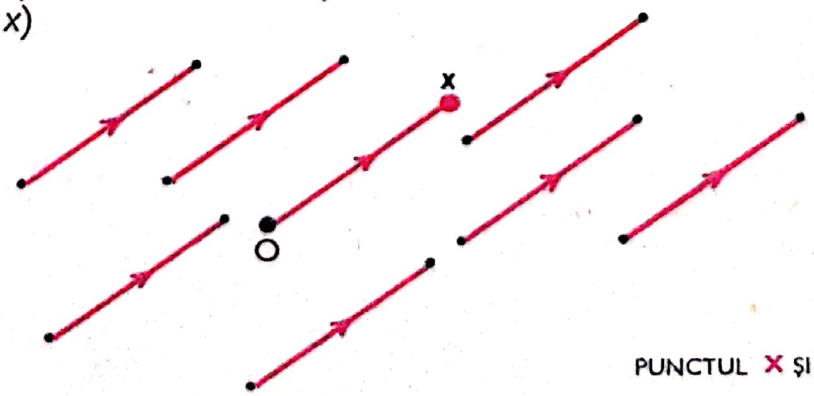
$$\overrightarrow{yz} = \overrightarrow{cb} + \overrightarrow{cb}$$
$$\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{zx} + \overrightarrow{zx}$$

$$\overrightarrow{qp} = \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ba}$$

5 — GRUPUL Π_0, +

În planul Π, alegem un punct pe care-l numim o.

Orice punct $x \in \Pi$ definește deci un **vector (= o translație)**: $\overrightarrow{ox}$ (care uneori va fi notată $\overrightarrow{x}$)

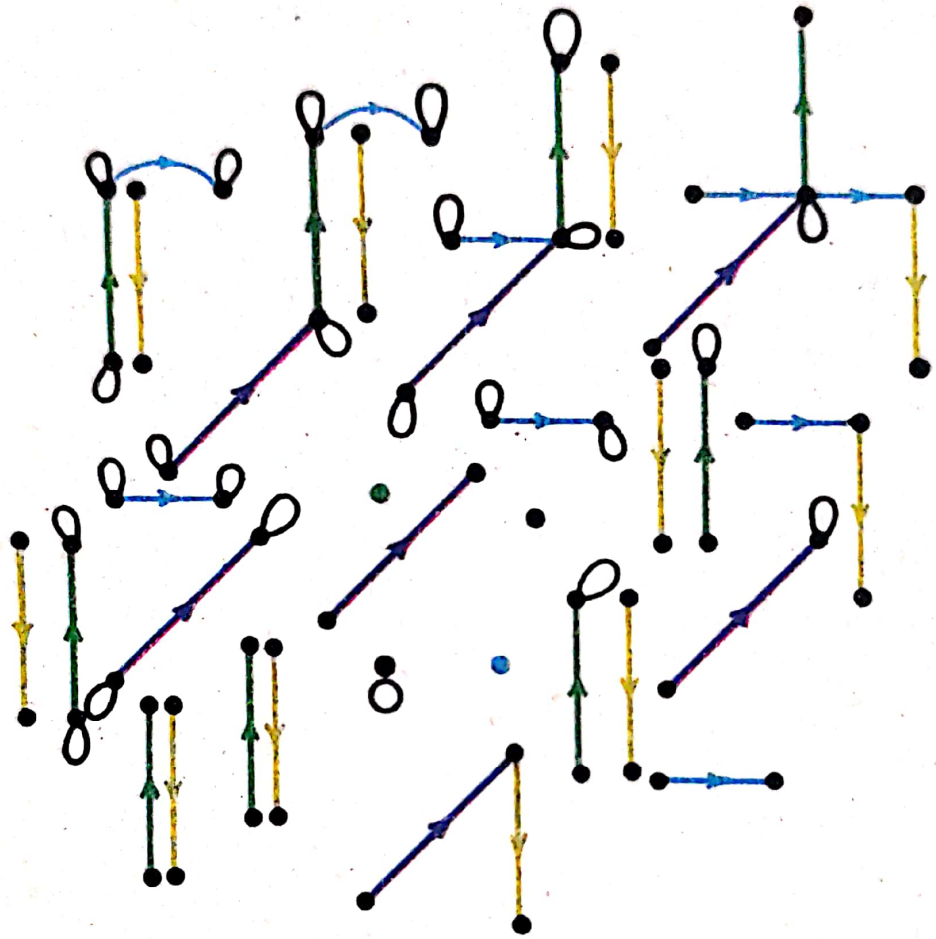


PUNCTUL X ȘI CÎTEVA PERECHI ALE TRANSLAȚIEI DEFINITE DE X

GRAFICUL 163

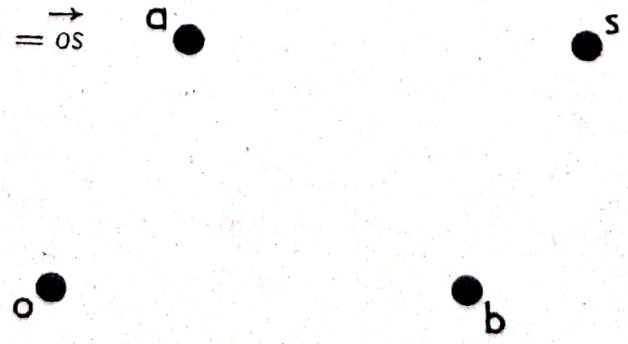
Scanned with OKEN Scanner

— Marcați un punct negru și numiți-l o.
Marcați cu diferite culori alte puncte ale planului Π.
Desenați cu culoarea corespunzătoare cîteva perechi ale translației definite de fiecare din aceste puncte.



Dacă un punct al lui Π este notat o, orice punct $x \in \Pi$ reprezintă un vector: vectorul sau translația $\overrightarrow{ox}$ (uneori notată $\vec{x}$).

Iată două puncte a, b
Compuneți $\overrightarrow{oa}$ și $\overrightarrow{ob}$
Rezultă $\overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ob} = \overrightarrow{os}$

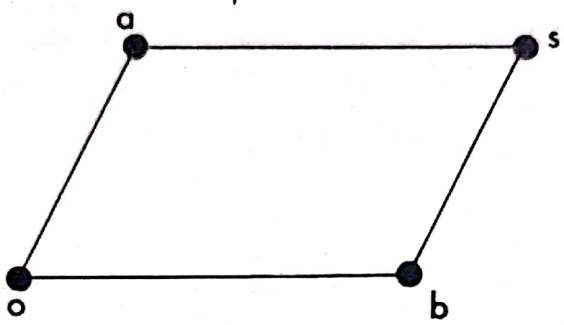


În loc să scriem

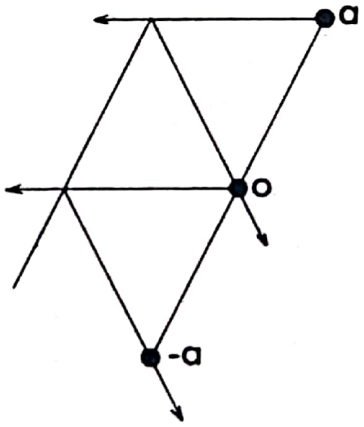
$$\overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ob} = \overrightarrow{os}$$

scriem simplu

$$a + b = s$$



— Găsiți punctul pe care este firesc să-l numim $-a$.



— Planul Π a devenit astfel un **grup comutativ** pe care-l vom nota cu

$$\Pi_o, +$$

. . . iar planul a devenit

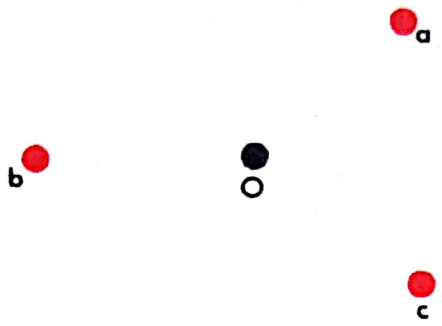
GRUPUL

$$\Pi_{\dot{0}}, +$$

EXERCIȚII

1. În Π_0, $+$ construiți

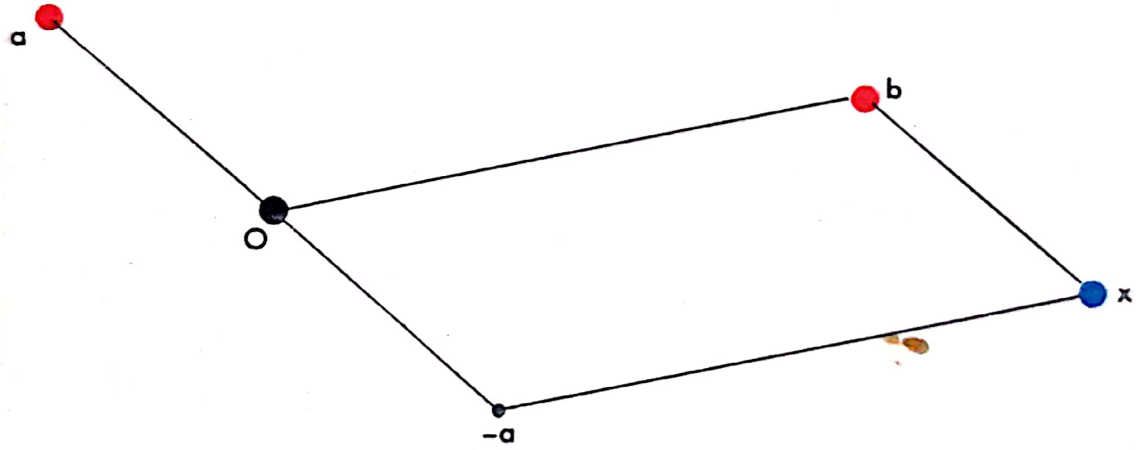
$$a+b,\quad b+a,\quad a+c,\quad b+c,\quad a+b+c,$$
$$a+a,\quad b+a+b,\quad a+a+a,\quad c+a+b,$$
$$-a,\quad -b,\quad (-a)+(-b)=-a-b,\quad -(a+b),$$
$$a+o,\quad a+(-a)=a-a,\quad (-b)+b=-b+b$$



2. În Π_0, $+$, vi se dau a, b. Rezolvați ecuațiile

$$a+x=b,\quad b+y=a,\quad a+b+z=o$$

(Vi se cere deci să construiți punctele x, y, z satisfăcînd formulele de mai sus)



3. În Π_0, $+$, pentru orice $a \in \Pi$:

$$-(-a)=a$$
$$o+a=a$$

4. În Π_0, $+$, pentru orice $x, y \in \Pi$:

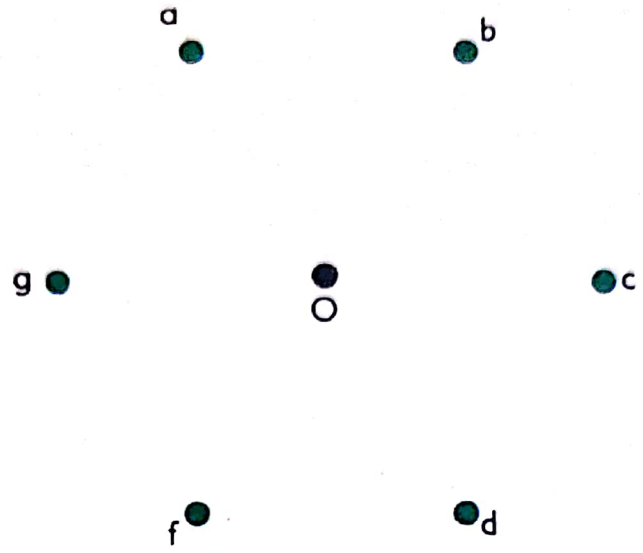
$$-(x+y)=(-x)+(-y)=-x-y$$

5. În Π_0, $+$, construiți trei puncte a, b, c astfel încît

$$a+b+c=o$$

Scanned with OKEN Scanner

6. În Π_0, +



$$a+b+c+d+f+g=o$$
$$a+d=o$$
$$f=-b,$$
$$c=-g,$$
$$a+c+f=o$$
$$a+c+=b$$

Construiți $a+b, b+c, c+d, d+f, f+g, g+a$.
Ce părere aveți despre această construcție?

7. Dacă fiecare din literele a, b, o reprezintă un punct al lui Π,

$$\overrightarrow{ab}=-\overrightarrow{ba}$$
$$\overrightarrow{oo}=\overrightarrow{o}$$
$$\overrightarrow{ao}=-\overrightarrow{oa}$$
$$\overrightarrow{oa}=-\overrightarrow{ao}$$

8. În Π_0, +

$$\overrightarrow{ab}=b-a$$

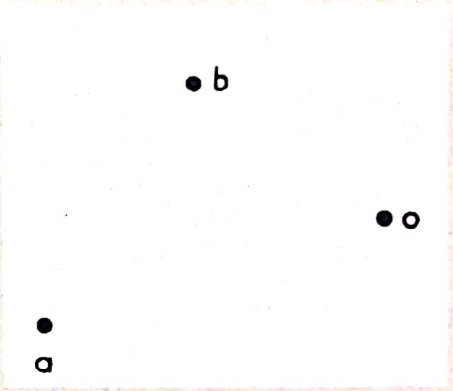
9. Găsiți două puncte a, b astfel încît $a-b\neq b-a$
Astfel ați demonstrat că scăderea *nu este comutativă.*

10. Găsiți trei puncte a, b, c, astfel încît $a-(b-c)\neq(a-b)-c$.
Ați demonstrat că scăderea *nu este asociativă.*

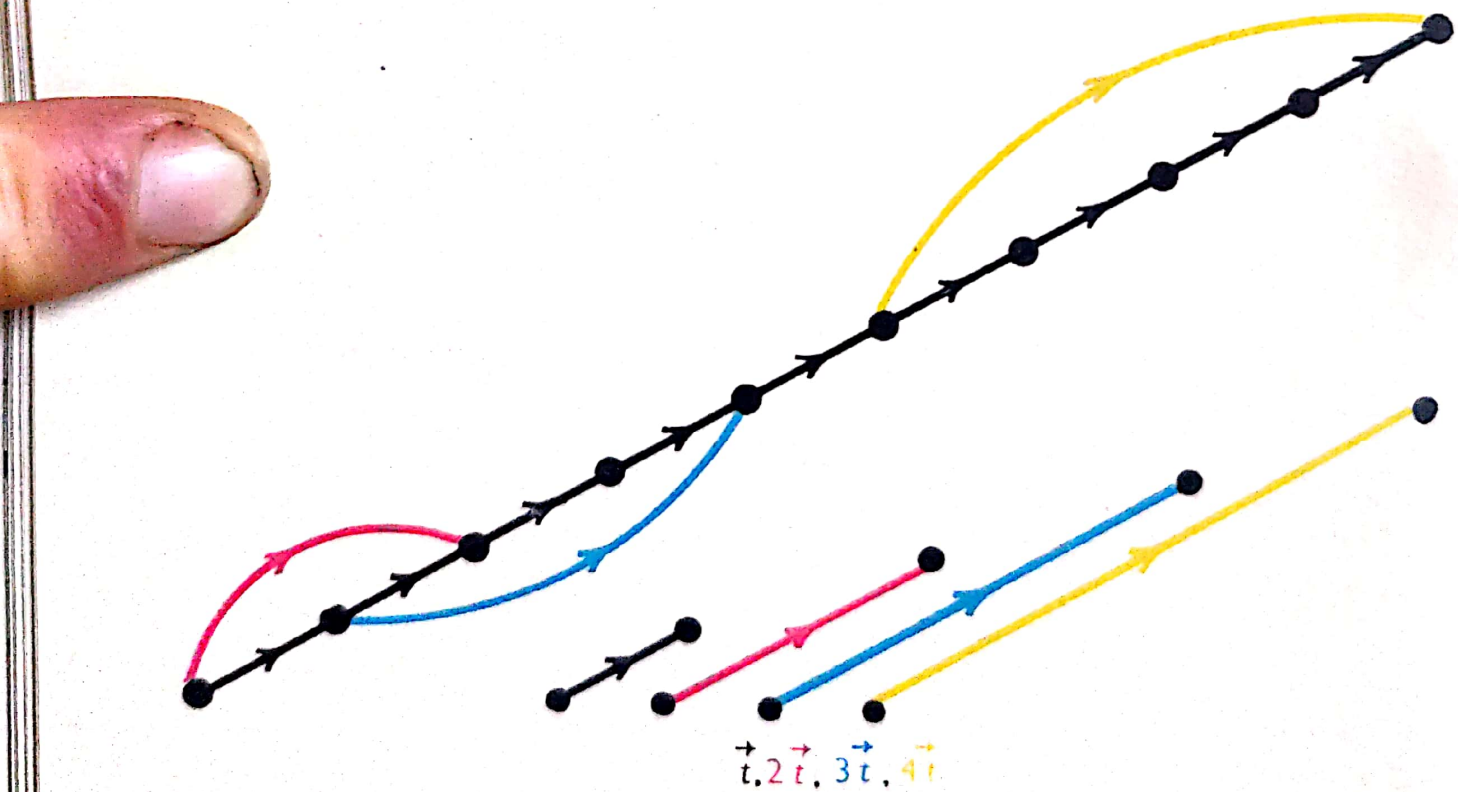
11. Pentru orice $a\in\Pi$: $a-a=o$

12. Soluția ecuației $a + x = b$ este $x = b - a$.
Care este soluția pentru $a = b + y$

13. Iată punctele a, b. Construiți $x, y \in \mathbb{H}$ astfel încît
$$x - a = b, \quad a - y = b$$



6 — ÎNMULȚIREA VECTORILOR CU NUMERE RAȚIONALE ÎNTREGI



Acest desen ilustrează convenția

$$2\vec{t} = \vec{t} + \vec{t}$$
$$3\vec{t} = \vec{t} + \vec{t} + \vec{t}$$

Pentru orice număr natural n, *definim*

$$n\vec{t} = \underbrace{\vec{t} + \vec{t} + \ldots + \vec{t}}_{n \text{ termeni}}$$

În particular,

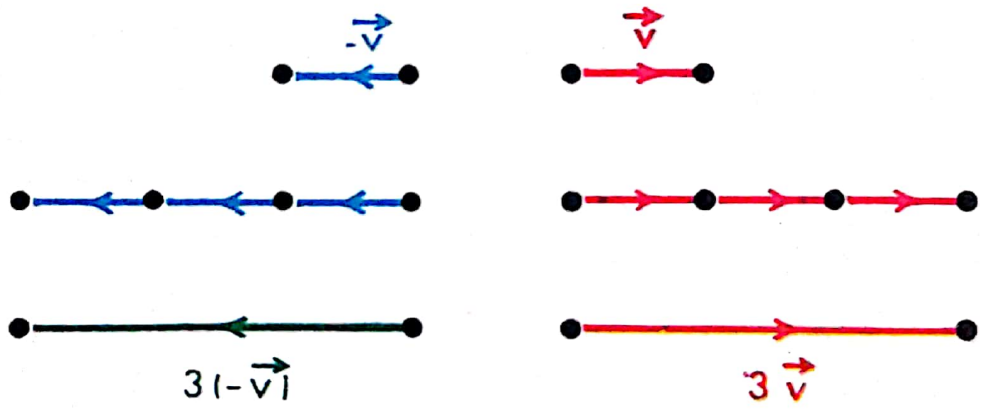
$$1.\ \vec{t} = \vec{t}$$

$$0.\ \vec{t} = \vec{0}$$

În această ultimă formulă, 0 reprezintă numărul natural zero, iar $\vec{0}$ reprezintă ***vectorul nul*** (sau *transformarea identică*).

Se dă un vector $\vec{v}$.

Construiți $-\vec{v}$, $3\vec{v}$, $3(-\vec{v})$



Avem deci

$$-(3\vec{v}) = 3(-\vec{v})$$

Punem

$$\boxed{(-3)\cdot\vec{v} = -(3\vec{v}) = 3(-\vec{v})}$$

Pentru orice număr natural n și orice vector $\vec{v}$,

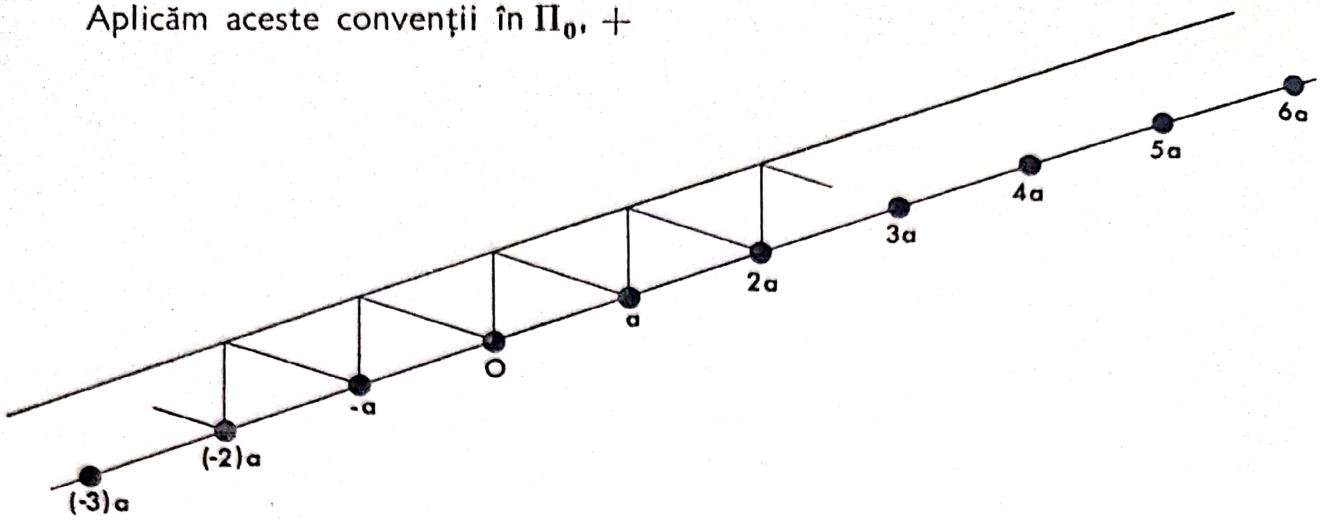
$$-(n\vec{v}) = n(-\vec{v})$$

și punem

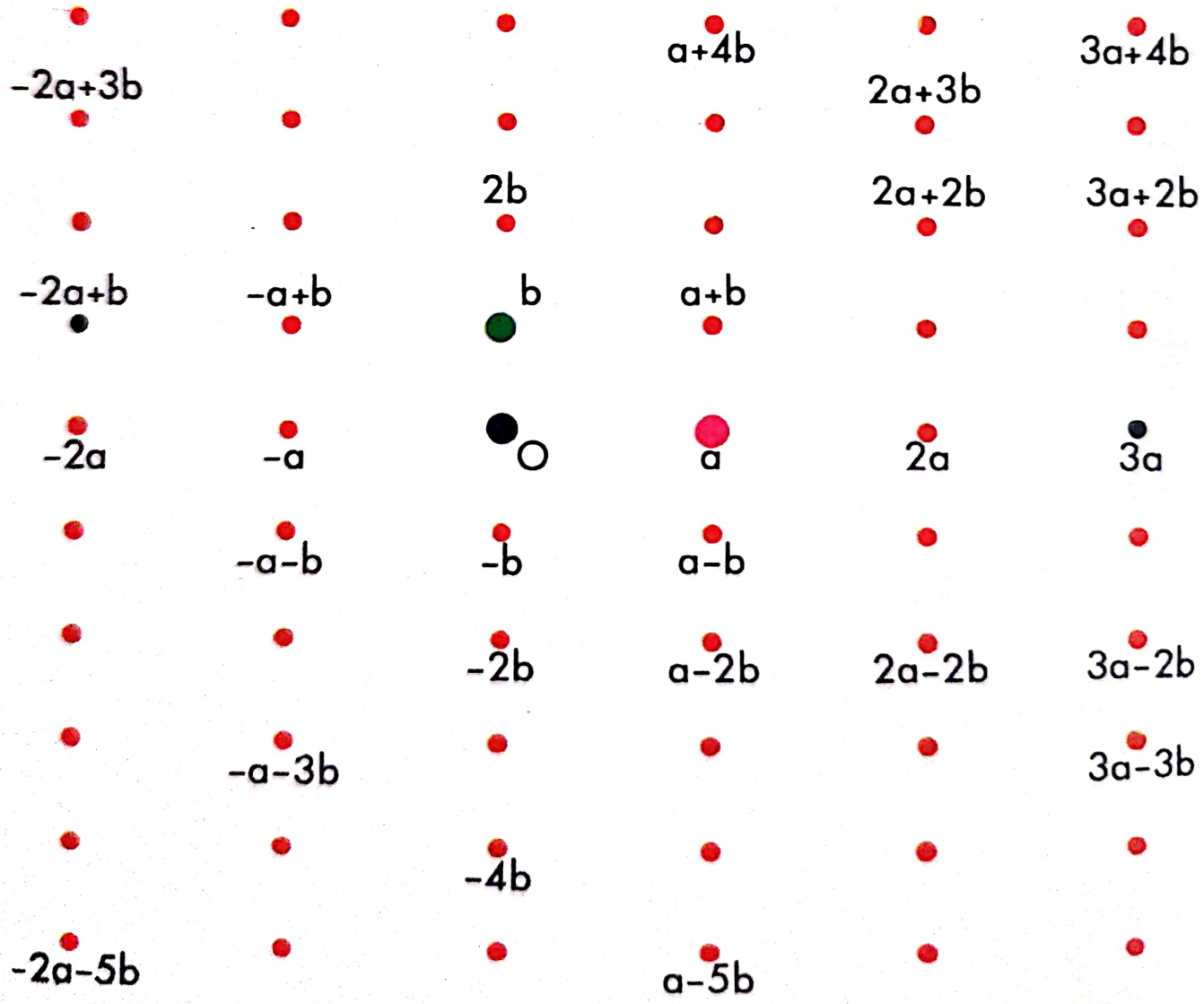
$$\boxed{(-n)\,\vec{v} = -(n\vec{v}) = n(-\vec{v})}$$

Avem deci, în special $-\vec{v} = (-1)\,\vec{v}$

Aplicăm aceste convenții în Π_0, +



În Π_o, +



Scanned with OKEN Scanner

7 — PROPRIETĂȚILE ÎNMULȚIRII UNUI VECTOR CU UN NUMĂR ÎNTREG RAȚIONAL

EXERCIȚII

În Π_0, $+$, comentați și explicați
(Literele reprezintă puncte)

1. $3 \cdot (a + b) = (a + b) + (a + b) + (a + b)$
$= (a + a + a) + (b + b + b)$
$= 3a + 3b$

2. $5(b + c) = 5b + 5c$

3. $-4(a + b) = 4(-(a + b))$
$= 4((-a) + (-b))$
$= 4(-a) + 4(-b)$
$= (-4)a + (-4)b$
$= -4a - 4b$

4. $-11(u + v) = -11u - 11v$

5. $4(b - c) = 4b - 4c$

6. $3(2a) = 2a + 2a + 2a$
$= (a + a) + (a + a) + (a + a)$
$= (3 \cdot 2)a$
$= 6a$

7. $2a + 3a = (a + a) + (a + a + a)$
$= (2 + 3)a$

8. $2a + 5a = 7a$

9. $(5 + 2)a = 5a + 2a$

Scanned with OKEN Scanner

LEMA 1 — În Π_0, $+$:

Pentru orice $a, b \in Z$ *și orice* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Pi$

$$\left.\begin{array}{lll} (1)\ a(x+y) & = ax + ay & \\ (2)\ (a+b)\,x & = ax + bx & \\ (3)\ a(bx) & = (a \cdot b)\,x & \end{array}\right\}$$

DISTRIBUTIVITATE

ASOCIATIVITATE MIXTĂ

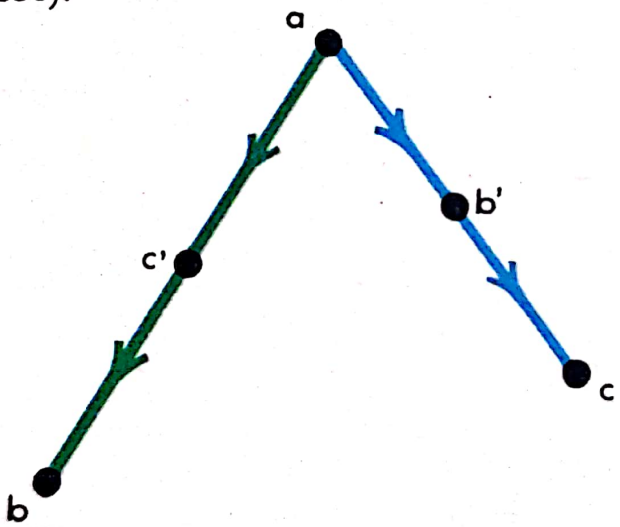
Dacă $a, b, c \in Z$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \Pi$
Atunci în Π_0, $+$

10. $(a+b)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y} + b\mathbf{x} + b\mathbf{y}$.

11. $(a + 2b - c)(\mathbf{x} - \mathbf{y} + 2\mathbf{z}) = ...$

8 — APLICAȚIILE CALCULULUI VECTORIAL

1. Calculul vectorial permite să stabilim în mod aproape automat lema 5 de la capitolul 21 (pag. 356).



Ni se spune că $\boxed{\overrightarrow{ac'} = \overrightarrow{c'b} \text{ și } \overrightarrow{ab'} = \overrightarrow{b'c}}$

Deci $\overrightarrow{bc'} = \overrightarrow{c'a}$ și $\overrightarrow{ba} = \overrightarrow{bc'} + \overrightarrow{c'a} = \overrightarrow{c'a} + \overrightarrow{c'a} = 2\overrightarrow{c'a}$

$$\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab'} + \overrightarrow{b'c} = \overrightarrow{ab'} + \overrightarrow{ab'} = 2\overrightarrow{ab'}$$

De unde $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ac} = 2\overrightarrow{c'a} + 2\overrightarrow{ab'} = 2(\overrightarrow{c'a} + \overrightarrow{ab'}) = 2\overrightarrow{c'b'}$

Astfel

$$\boxed{\overrightarrow{bc} = 2\overrightarrow{c'b'}}$$

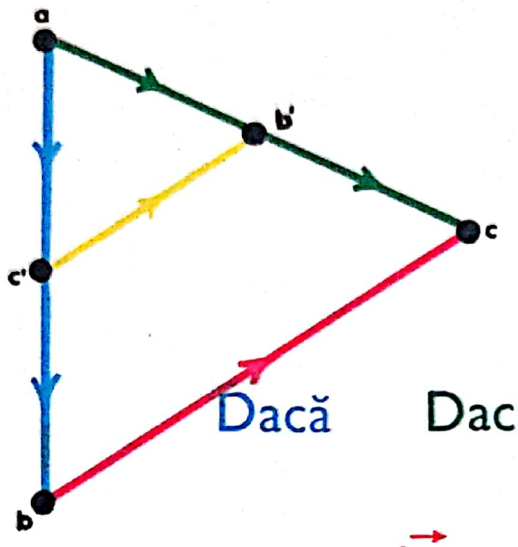
Explicați fiecare etapă a acestui calcul !

Scanned with OKEN Scanner

Sîntem răsplătiți de osteneala noastră obținînd un rezultat mai precis decît cel din lema 5 de la capitolul 21.

Să enunțăm deci

LEMA 2



Dacă Dacă

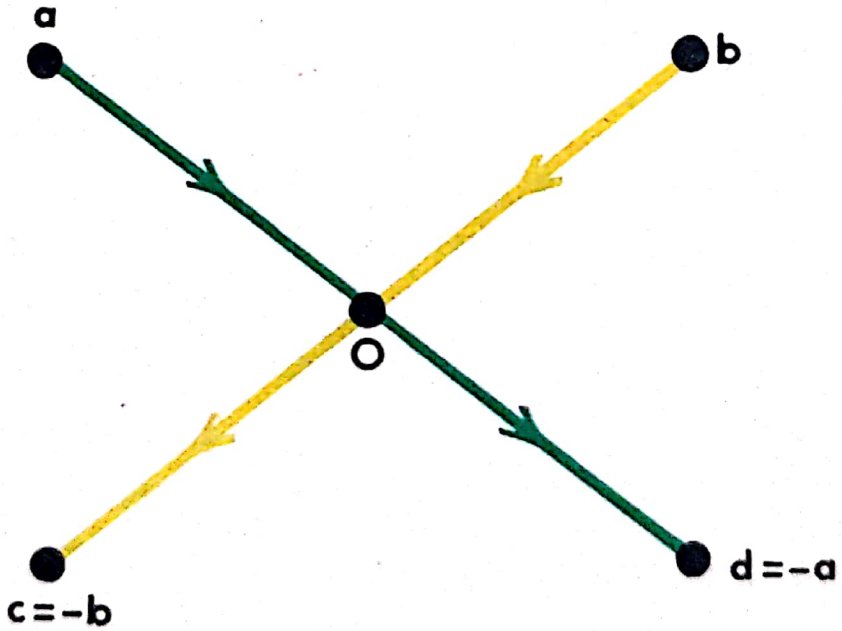
Atunci $\vec{bc} = 2\,\vec{c'b'}$

2. Demonstrați, prin calcul, lema:

Dacă diagonalele unui patrulater au același mijloc, acest patrulater este un paralelogram (vezi cap. 21, lemele 10 și 12).

Să notăm cu *o* mijlocul comun.

Deci



și

$$\vec{cd} = d - c = d + (-c) = -a + b = b - a = \vec{ab}$$

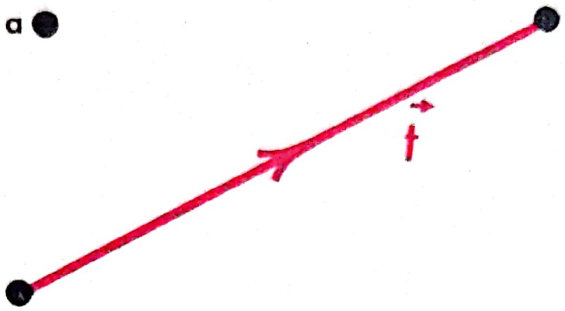
Ceea ce trebuia să demonstrăm.

Explicați fiecare din egalitățile de mai sus.

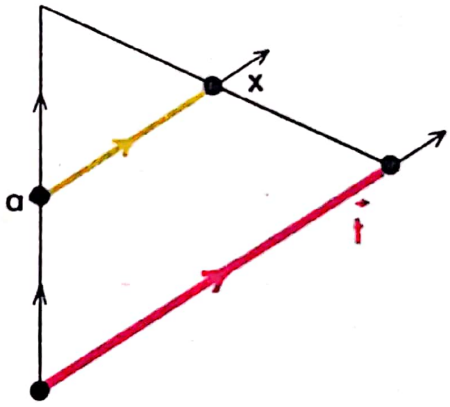
Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

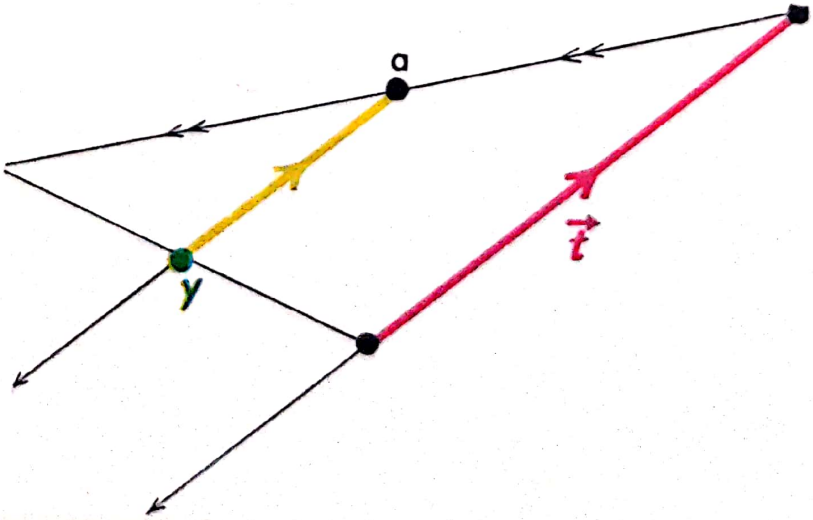
1. Iată o translație sau un vector $\vec{t}$ și un punct $a \in \Pi$.



Construiți punctul x, astfel încît $\vec{t} = 2\overrightarrow{ax}$

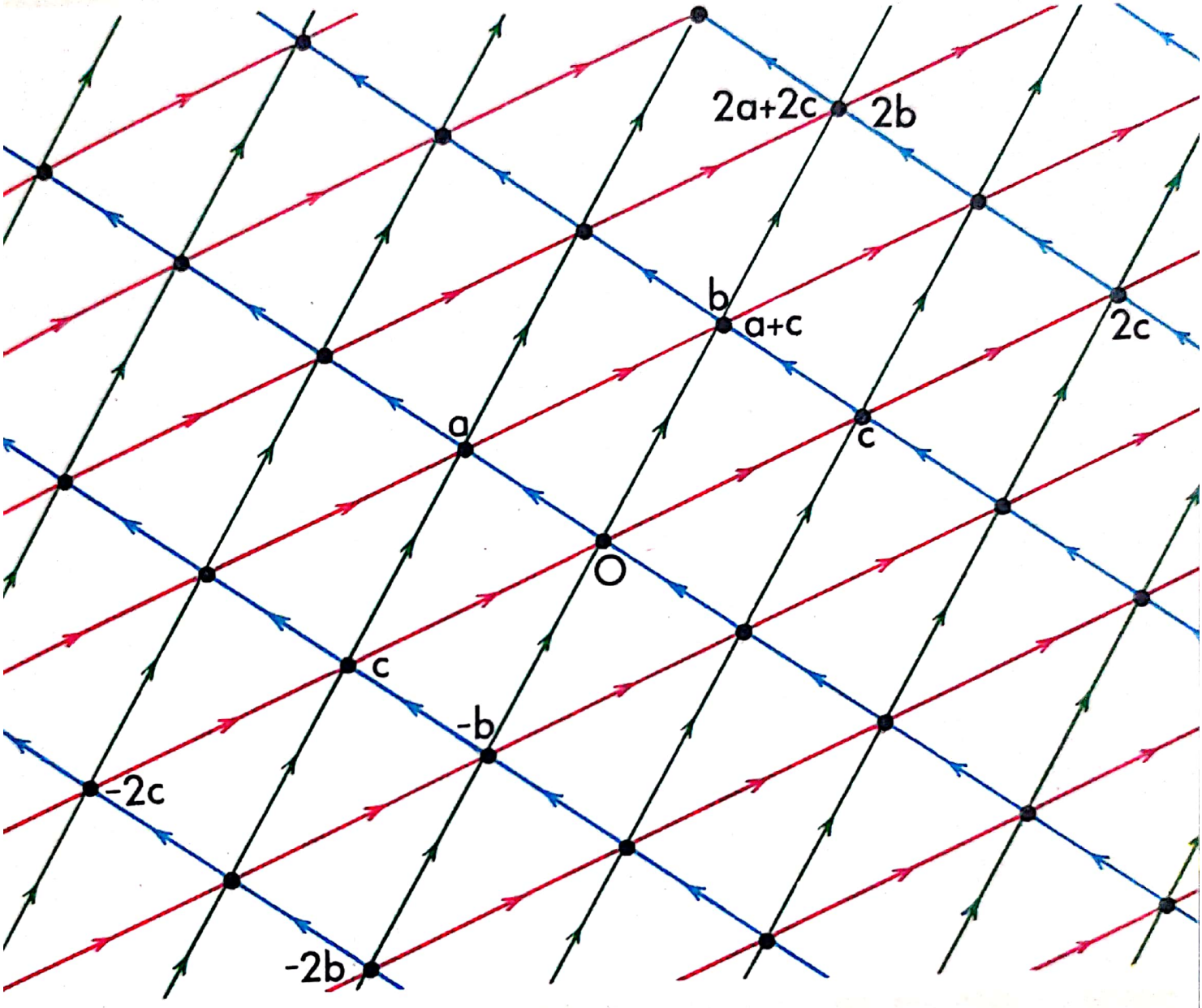


2. Iată o translație $\vec{t}$ și un punct $a \in \Pi$.
Construiți $y \in \Pi$ astfel încît $\vec{t} = 2\overrightarrow{ya}$



Scanned with OKEN Scanner

3.



Priviți cu atenție desenul de mai sus.
Avem formulele $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$.
Pentru orice $x, y \in Z$: $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = (x + y)\,\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{c} = (x + y)\,\boldsymbol{b} - x\boldsymbol{c}$.
Completați și explicați formulele de mai jos:
Pentru orice $y, z \in Z$: $y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} =$
Pentru orice $x, z \in Z$: $x\boldsymbol{a} + z\boldsymbol{c} =$

Scanned with OKEN Scanner

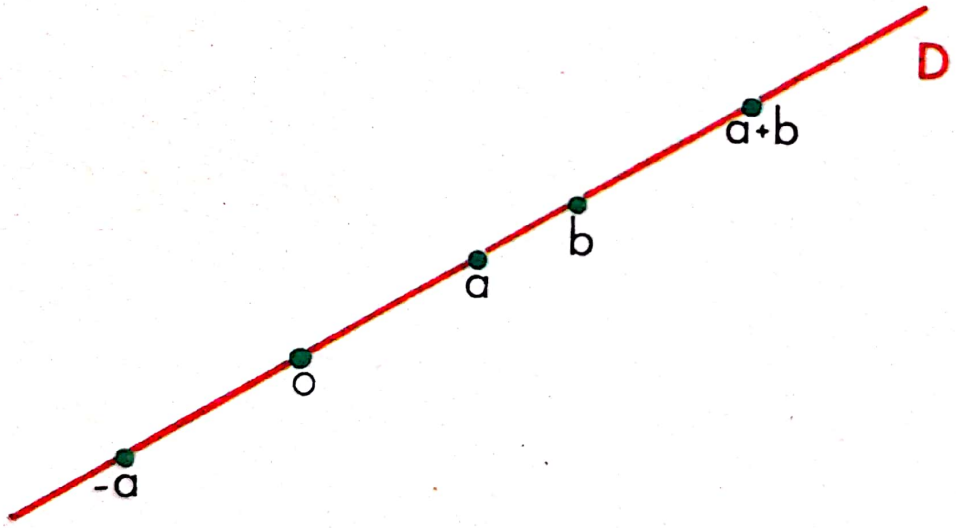
9 — SUBGRUPURI

În planul $\Pi_0, +$, să trasăm o dreaptă D care conține pe o.

Pentru orice $a, b \in D$:	$a + b = b + a \in D$
Pentru orice $a, b, c \in D$:	$(a + b) + c = a + (b + c)$
$o \in D$ și pentru orice $d \in D$:	$o + d = d + o = d$
Dacă $a \in D$, **Atunci** $-a \in D$ și	$a - a = -a + a = o.$

Vedeți deci că D, + este un *grup*.

Vom spune că D, + este un **subgrup** al lui $\Pi_0, +$

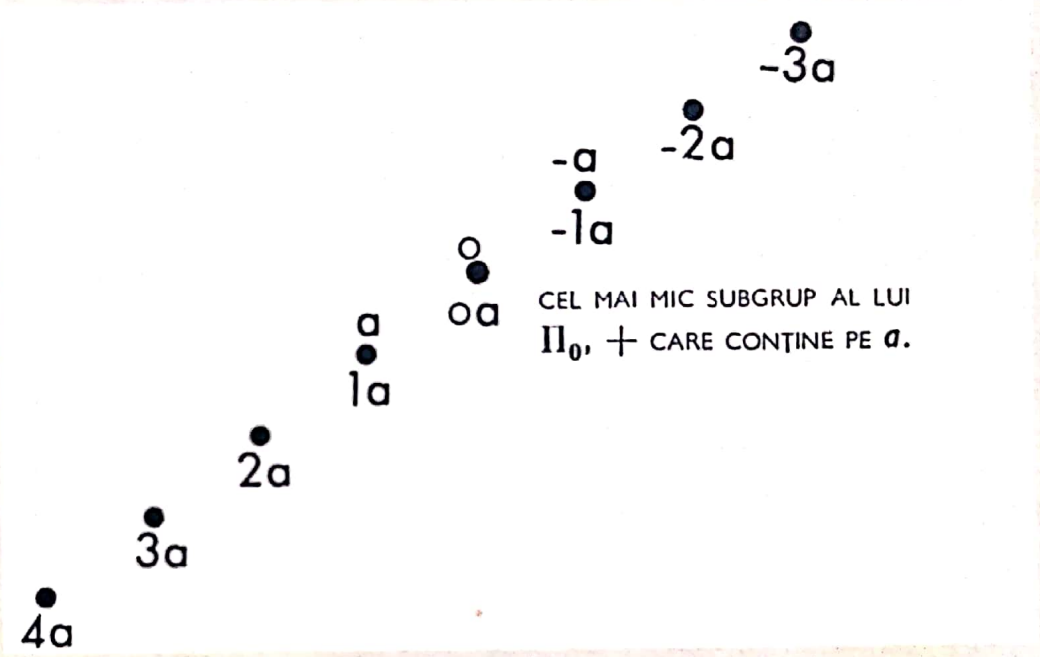


DEFINIȚIA 2 — *Orice parte* P *a lui* $\Pi_0, +$, *astfel încît* P, +, *să fie un grup, este numită* ***subgrup*** *al lui* $\Pi_0, +$

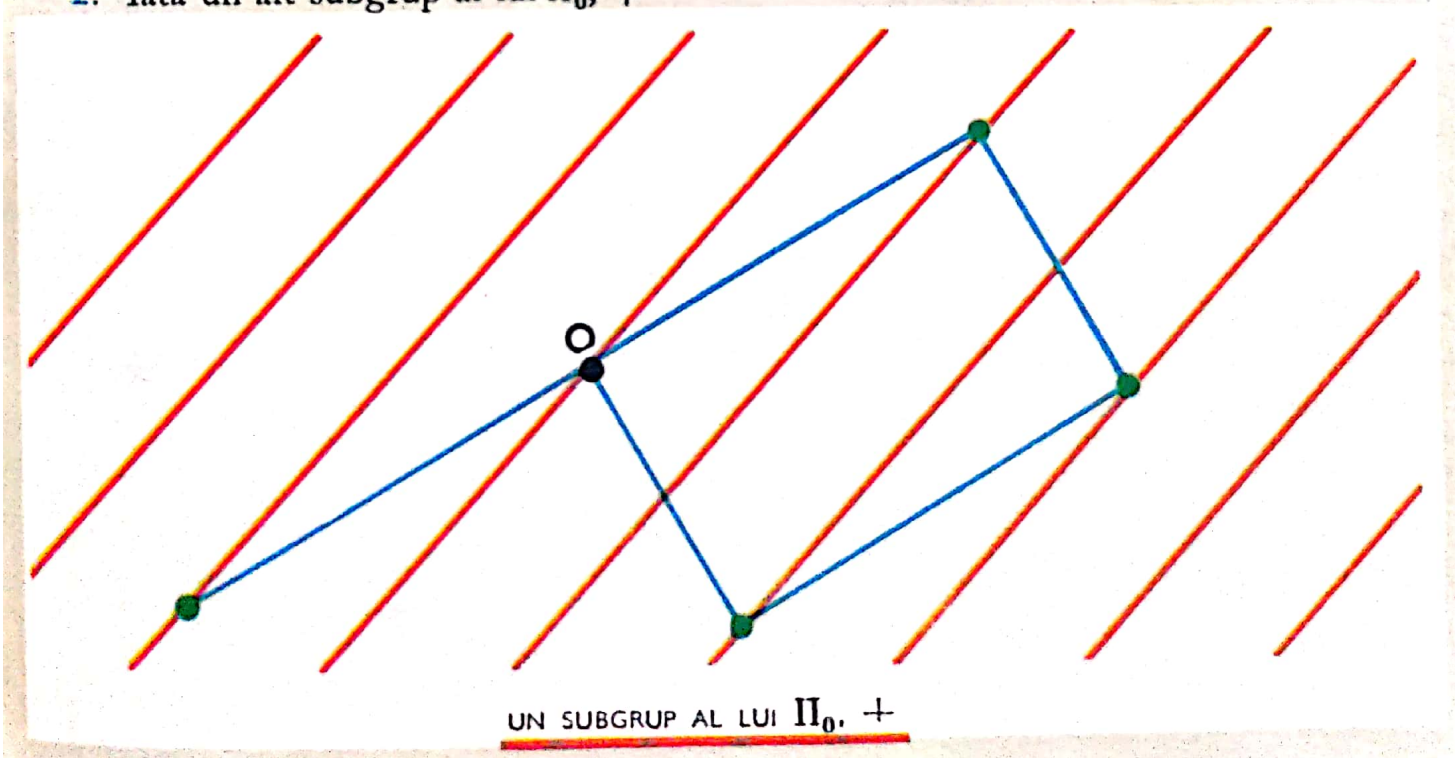
Astfel $\{o\}$ este un subgrup al lui $\Pi_0, +$ (este subgrupul *nul*).
Π_0 el însuși este un subgrup al lui $\Pi_0, +$ (este subgrupul impropriu).
Orice subgrup al lui $\Pi_0, +$ *conține pe* o.

EXERCIȚII

1. Pentru orice $a \in \Pi_0$,
$Za = \{za \mid z \in Z\} = \{0, a, -a, 2a, -2a, \ldots\}$
este un subgrup al lui $\Pi_0, +$
Este cel mai mic subgrup al lui $\Pi_0, +$ care conține pe a.

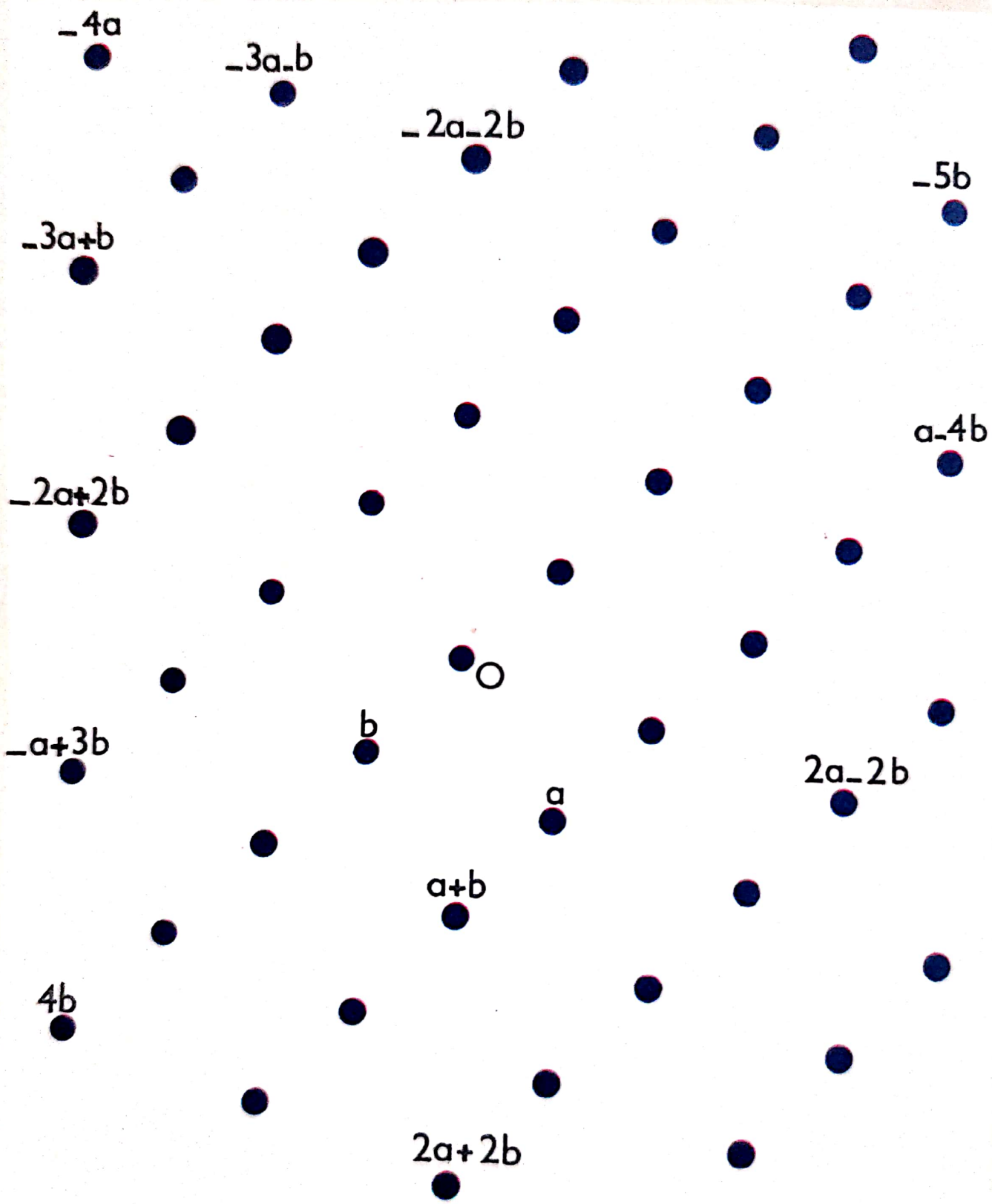


2. Iată un alt subgrup al lui $\Pi_0, +$



Explicați!

3. Dacă $a, b \in \Pi_0$, atunci $\{xa + yb \mid x, y \in Z\}$ este un subgrup al lui $\Pi_0, +$.



UN SUBGRUP AL LUI $\Pi_0, +$

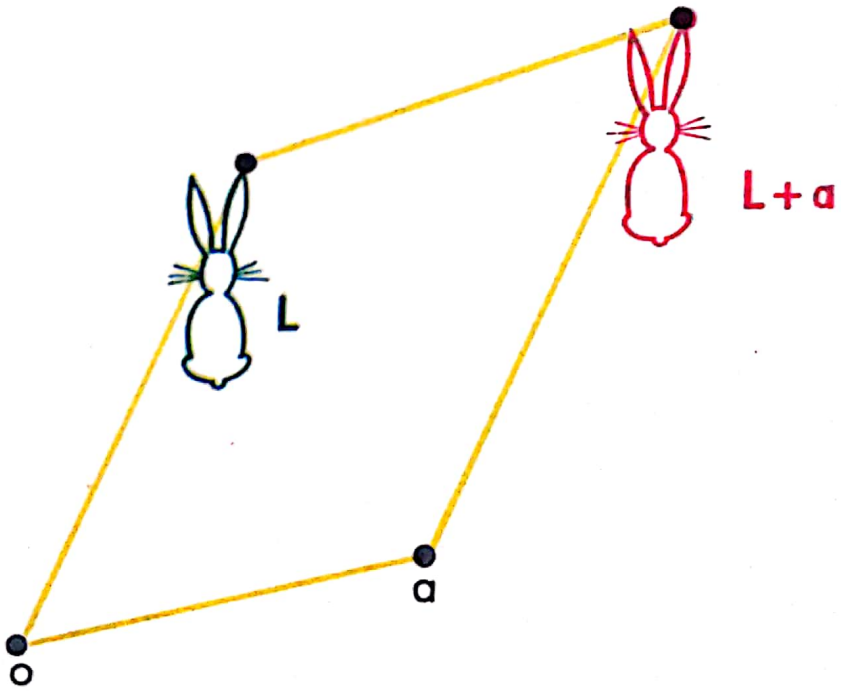
10 — ADUNAREA PĂRȚILOR LUI Π_0, +

Dacă $x \in \Pi$ și $A, B \subset \Pi$, în Π_0, +, punem

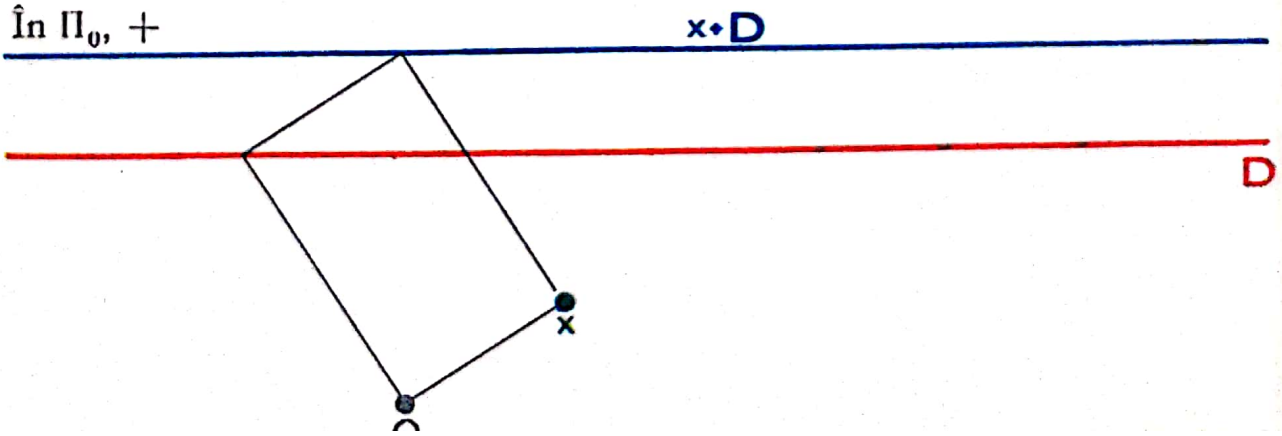
$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$
$$x + A = \{x + a \mid a \in A\}$$
$$-A = \{-a \mid a \in A\}$$
$$A - B = A + (-B) = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$$

EXERCIȚII

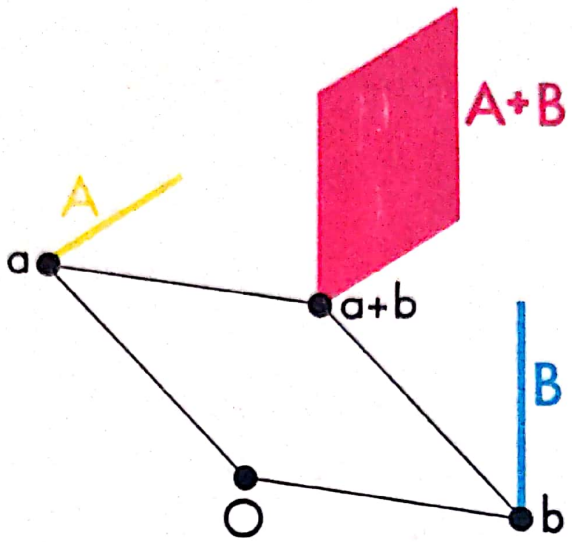
1. În Π_0, + desenați o « mulțime iepure» L și însemnați un punct a. $L + a$ este atunci imaginea iepurelui L prin translația $\overrightarrow{oa}$.



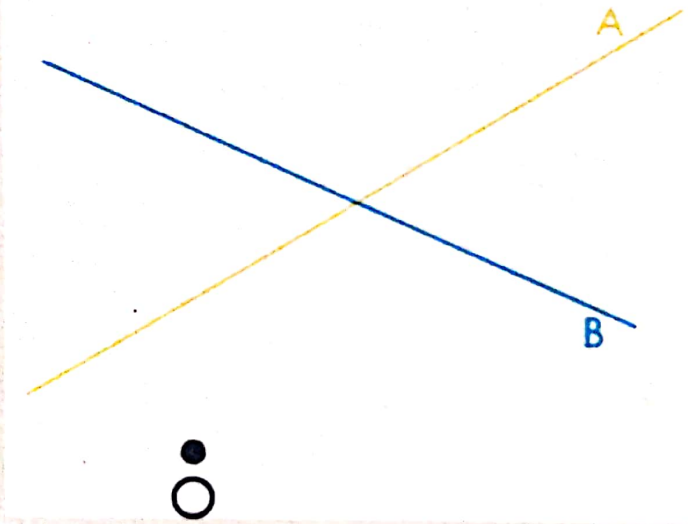
2. În Π_0, +



3 În Π_0, +

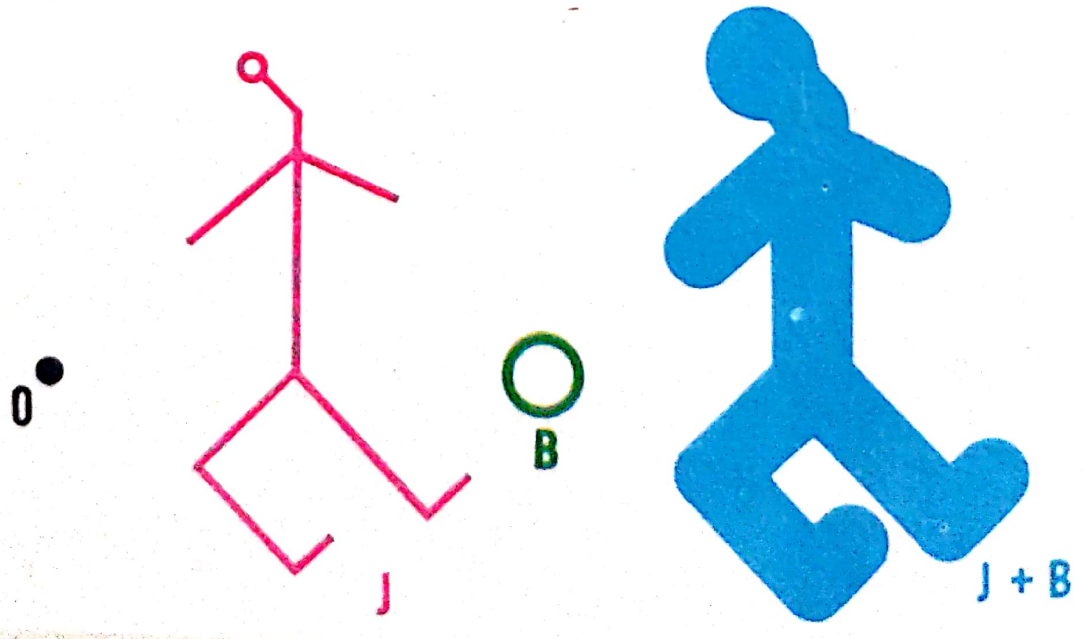


4. În Π_0, +

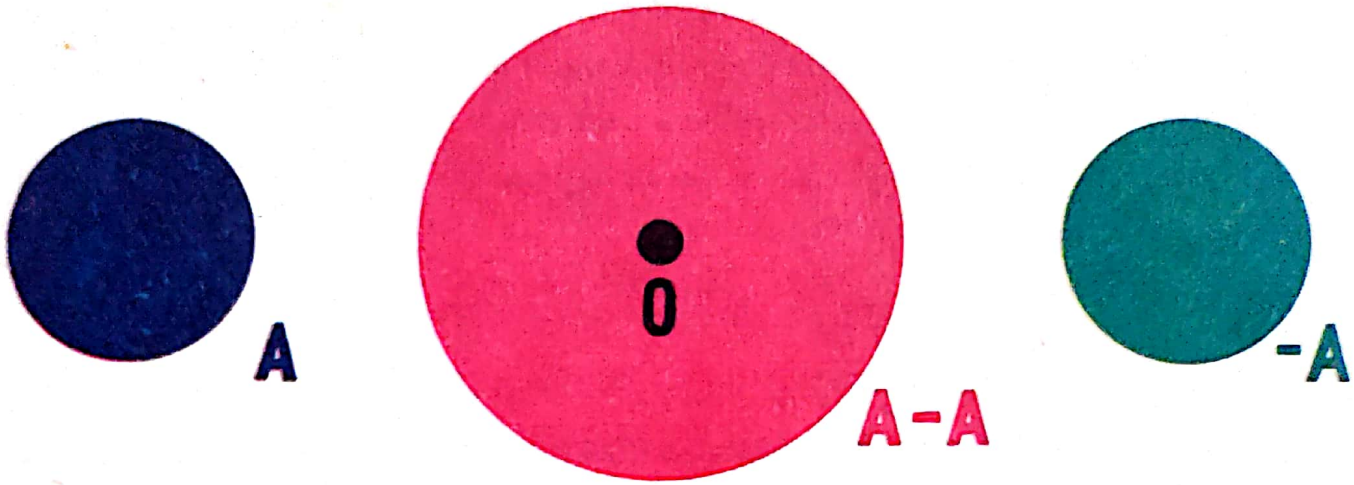


$A, B \in \mathfrak{D}$
$A + B = \Pi_0$

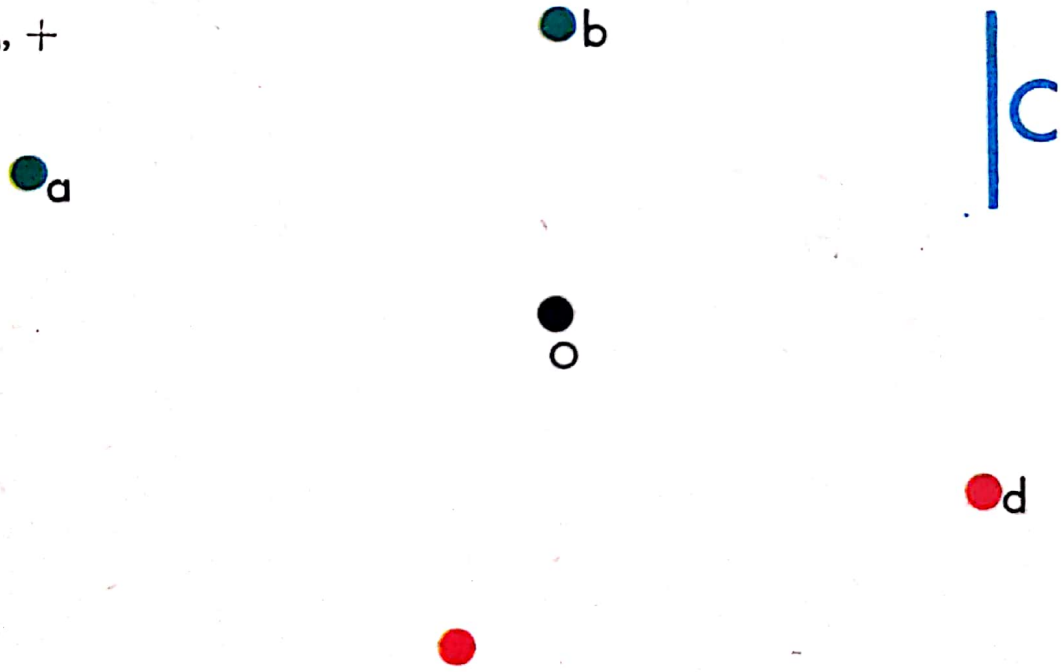
5.



6.



7. În Π_0, +



$A = \{a, b\}$ $B = \{c, d\}$

Construiți $A + B$, $A + C$, $B + C$, $A + B + C$, $A - B + C$

Scanned with OKEN Scanner

11 — PROIECȚII DE VECTORI

Să notăm cu p proiecția paralelă cu dreapta P din planul Π pe dreapta D.

Știți (cap. 21, teorema 2, pag. 363) că dacă $a, b, c, d \in \Pi$

$$(a, b) \uparrow (c, d) \Rightarrow (p(a), (p(b)) \uparrow (p(c), p(d))$$

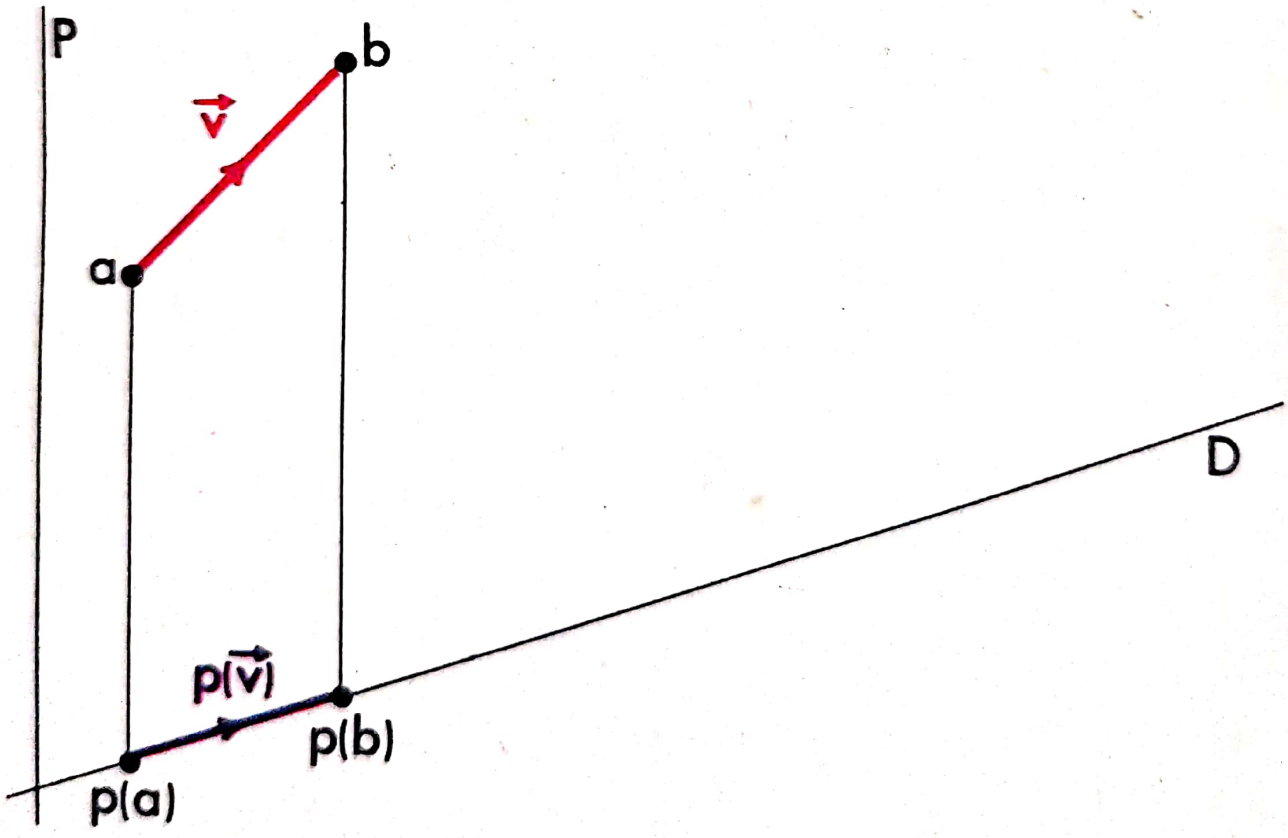
Cu alte cuvinte

$$\vec{ab} = \vec{cd} \Rightarrow \overrightarrow{p(a)\,p(b)} = \overrightarrow{p(c)\,p(d)}$$

Am notat $(p(a), p(b))$ proiecția lui (a, b) prin p.

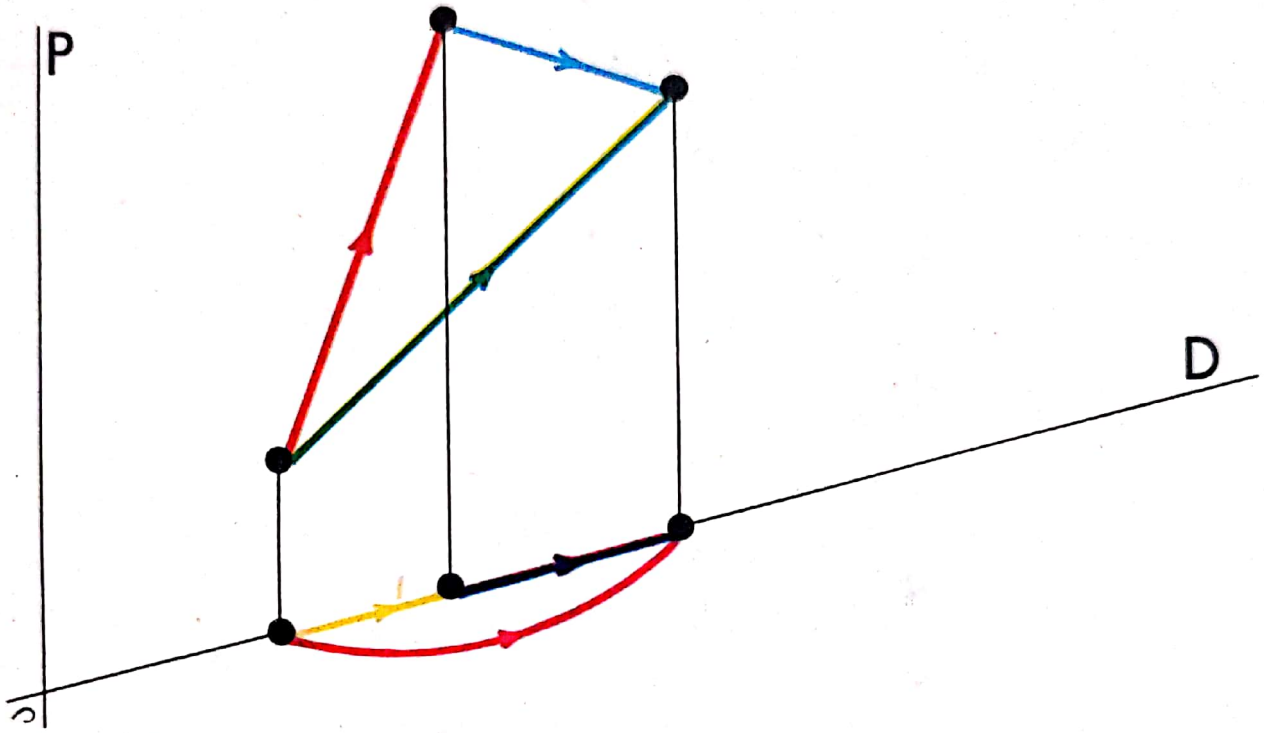
Vom numi, de asemenea, vectorul $\overrightarrow{p(a)\,p(b)}$ proiecția vectorului $\vec{ab}$ prin p, și vom scrie

$$p(\vec{ab}) = \overrightarrow{p(a)\,p(b)}$$



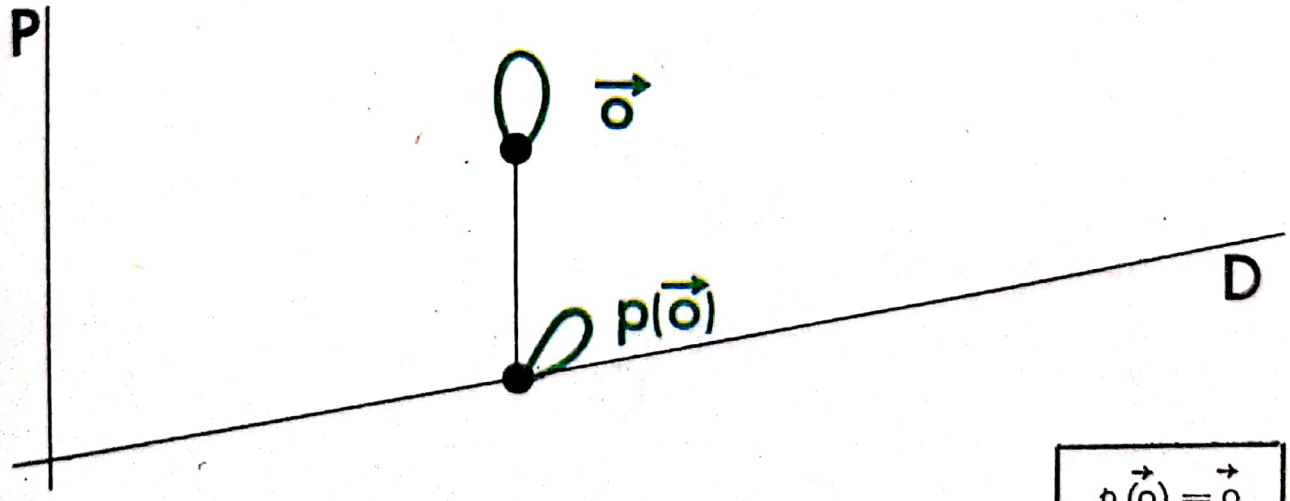
Scanned with OKEN Scanner

Desenele de mai jos vă vor iniția în calculul proiecțiilor vectorilor.



$$p(\vec{r}+\vec{s}) = p(\vec{r}) + p(\vec{s})$$

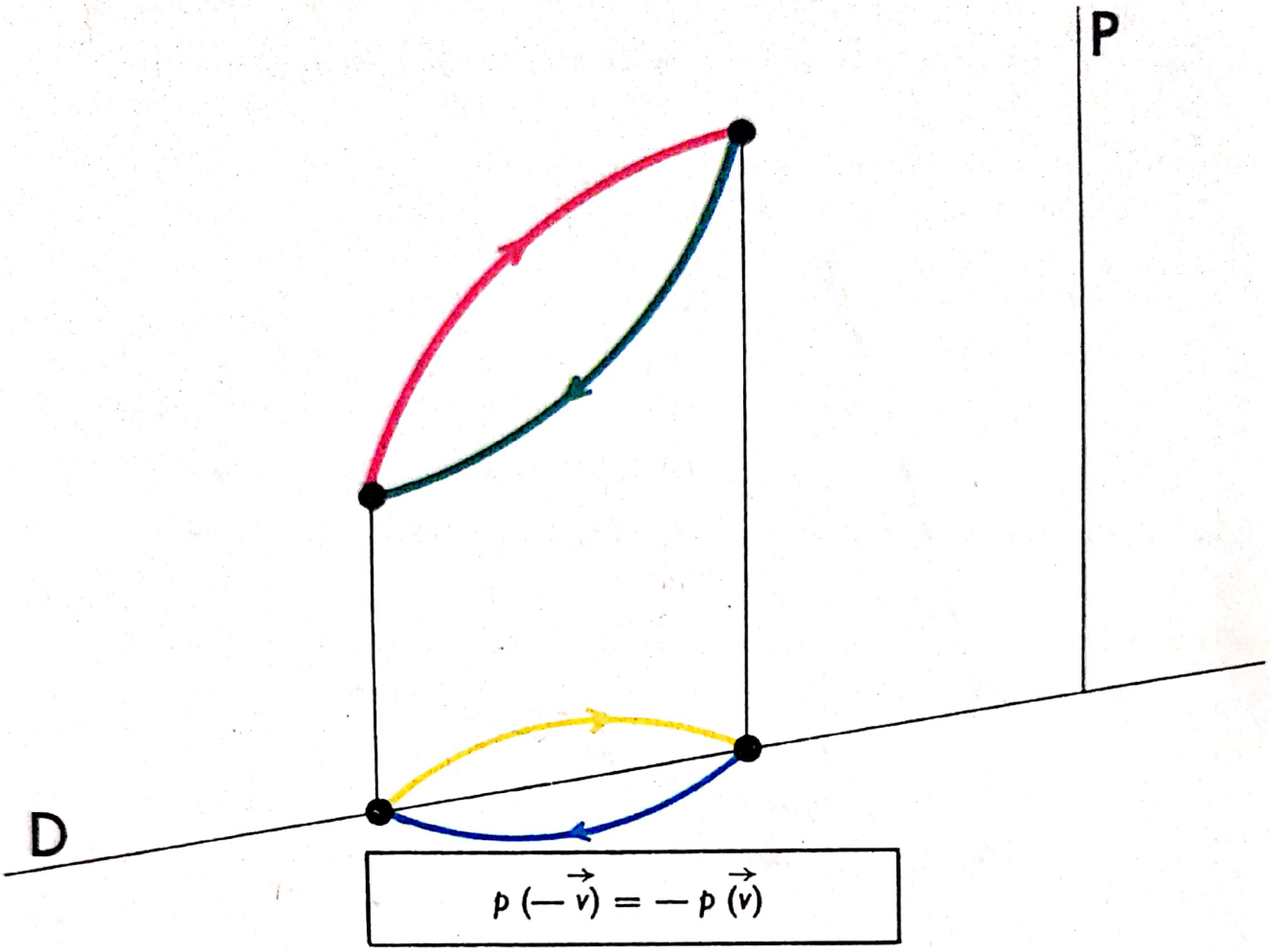
Proiecția paralelă a unei sume de vectori este egală cu suma proiecțiilor.
Orice proiecție paralelă respectă adunarea vectorială.



$$p(\vec{o}) = \vec{o}$$

Proiecția vectorului nul este vectorul nul.

Scanned with OKEN Scanner



— Ce puteți spune acum despre $p(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})$?

— $$p(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) = p(\vec{u}) + p(\vec{v}) + p(\vec{w})$$

— Calculați $p(3\vec{u})$

— $$p(3\vec{u}) = p(\vec{u}+\vec{u}+\vec{u})$$
$$= p(\vec{u}) + p(\vec{u}) + p(\vec{u})$$
$$= 3p(\vec{u})$$

— Calculați de asemenea $p(-4\vec{v})$

— $$p(-4\vec{v}) = p(-(4\vec{v}))$$
$$= -p(4\vec{v})$$
$$= -4p(\vec{v})$$

— Calculați, în sfîrșit, $p(3\vec{u}-4\vec{v}+7\vec{w})$

— $$p(3\vec{u}-4\vec{v}+7\vec{w}) = 3p(\vec{u}) - 4p(\vec{v}) + 7p(\vec{w})$$

Scanned with OKEN Scanner

LEMA 3 — **Dacă** *a, b, . . ., c reprezintă numere întregi raționale,*

$\vec{u}, \vec{v} \ldots, \vec{w}$ *reprezintă vectori,*

p *reprezintă o proiecție paralelă a planului* Π *pe o dreaptă*

Atunci

$$p(a\vec{u} + b\vec{v} + \ldots + c\vec{w}) = ap(\vec{u}) + bp(\vec{v}) + \ldots + cp(\vec{w})$$

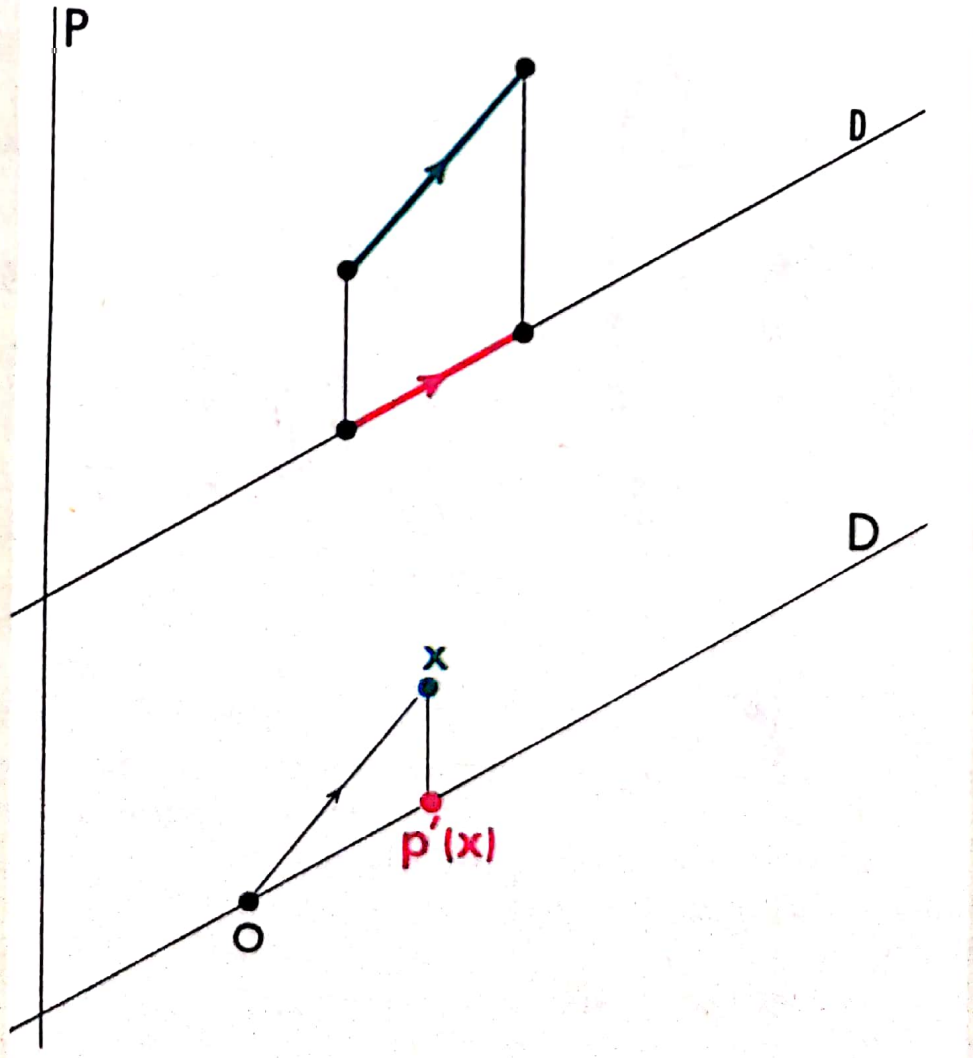
EXERCIȚIU

Știți (cap. 21, teorema 2, pag. 363) că proiecțiile de perechi echipolente pe drepte paralele sînt echipolente.

Fie p proiecția $\Pi \to D$, paralelă cu P.

Fie D' o paralelă cu D care conține pe o și p' proiecția $\Pi \to D'$, paralelă cu P.

Dacă punctul x reprezintă vectorul $\vec{v}$, punctul $p'(x)$ reprezintă vectorul $p(\vec{v})$.

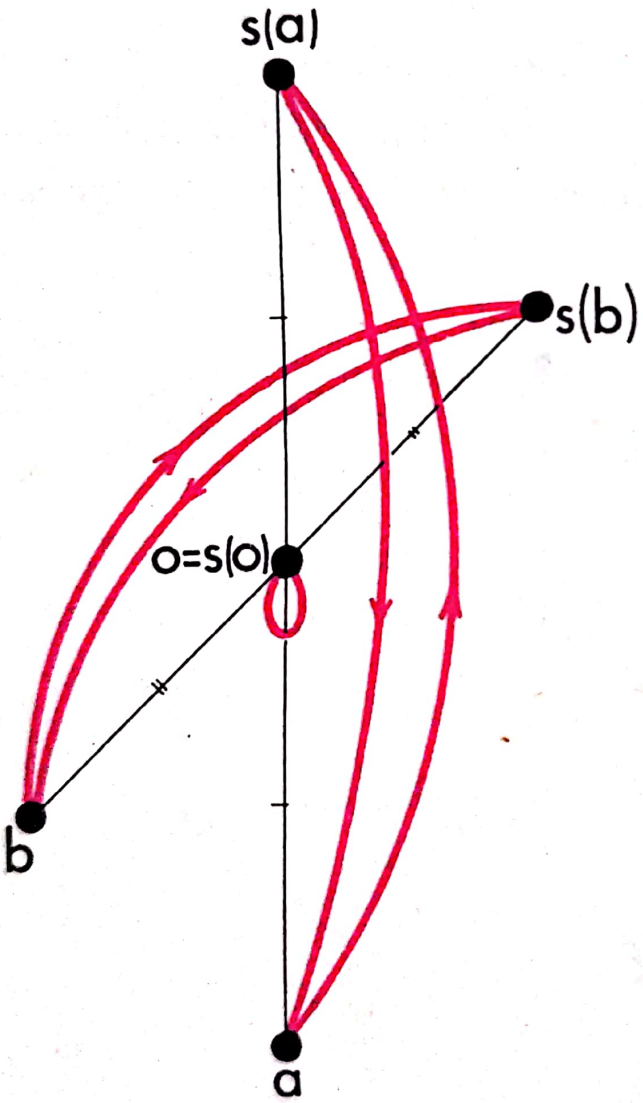


Scanned with OKEN Scanner

23

Simetrii centrale

1 — SIMETRII CENTRALE



SIMETRIA S_o CU CENTRUL O

$$\overrightarrow{ao} = \overrightarrow{o\,s\,(a)}$$

$$\overrightarrow{bo} = \overrightarrow{o\,s\,(b)}$$

GRAFICUL 165

Desenul alăturat arată că orice punct $o \in \Pi$ definește o *transformare* a lui Π pe care o numim **simetrie centrală**, sau, mai precis, **simetrie care are centrul o.**

Va fi ușor să reprezentăm prin s_0 simetria care are centrul o.

— Întoarceți săgețile simetriei s_0.

— $s_0^{-1} = s_0$

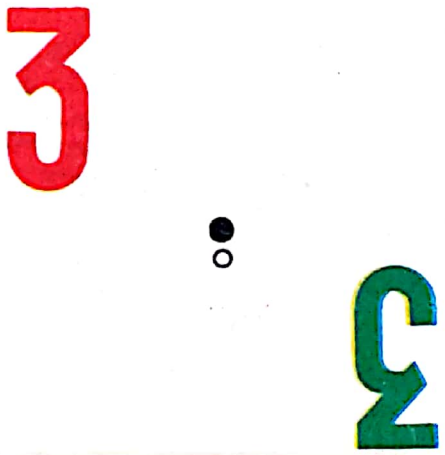
— Aceasta dovedește că s_0 este o **permutare** a lui Π.

— Într-adevăr, s_0 este o relație astfel încît s_0 și s_0^{-1} sînt transformări ale lui Π

EXERCIȚII

1. Desenați în planul II o cifră 3 frumoasă și marcați un punct o.

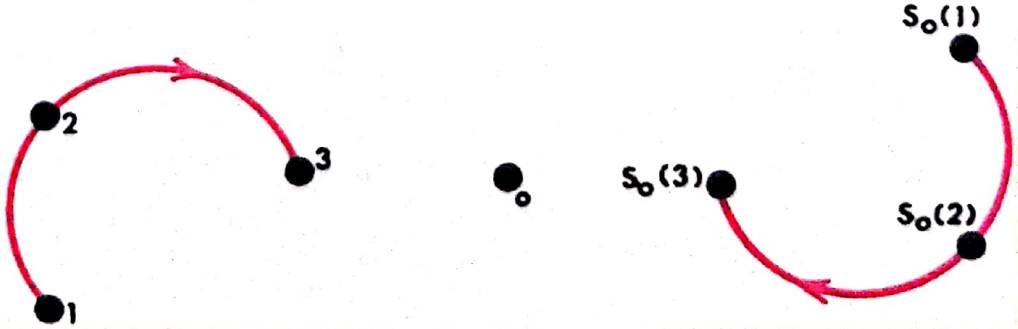
Desenați cu verde imaginea lui 3 prin simetria care are centrul o. Imaginea verde este tot un 3? Explicați.



Care este imaginea lui 3 de culoare portocalie prin transformarea identică și prin transformarea constantă o?

2. Construiți simetria mulțimii de mai jos în raport cu punctul *c*.

3. Constatați că orice simetrie centrală păstrează sensul unui triplu de puncte nealiniate.

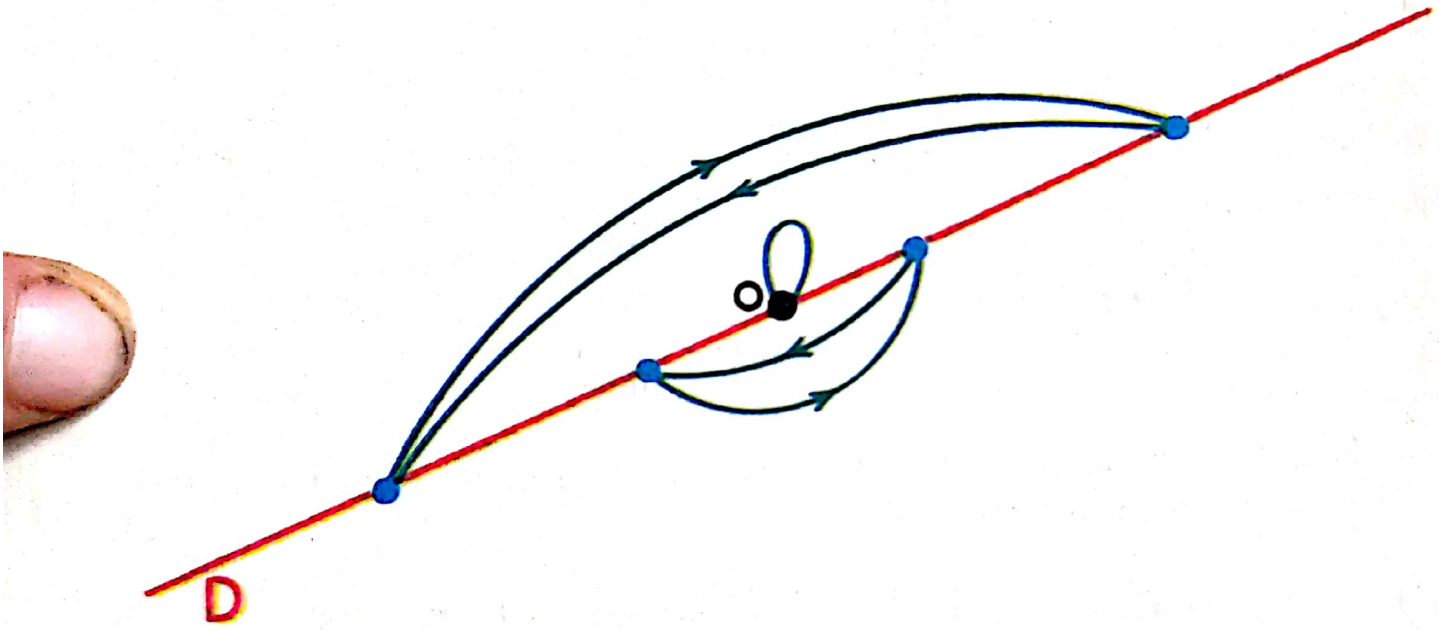


2 — IMAGINEA UNEI DREPTE PRINTR-O SIMETRIE CENTRALĂ

Știm că

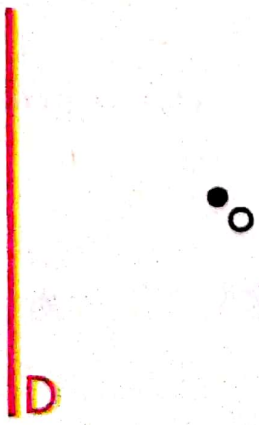
$$s_0(a) = b \iff b = s_0(a)$$

În acest caz, vom spune că a și b sînt simetrice (în raport cu o).
Să vedem care este imaginea s_0D a unei drepte D.
Dacă $o \in D$, avem evident $s_0D = D$.



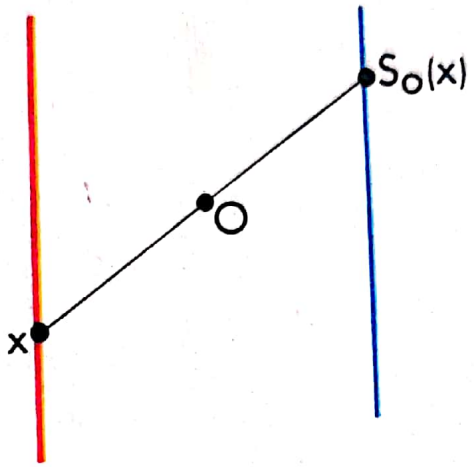
$s_0D = D$

Nu uitați că orice dreaptă este paralelă cu ea însăși. Aici avem deci $s_0D \parallel D$
Să considerăm acum cazul în care $o \notin D$



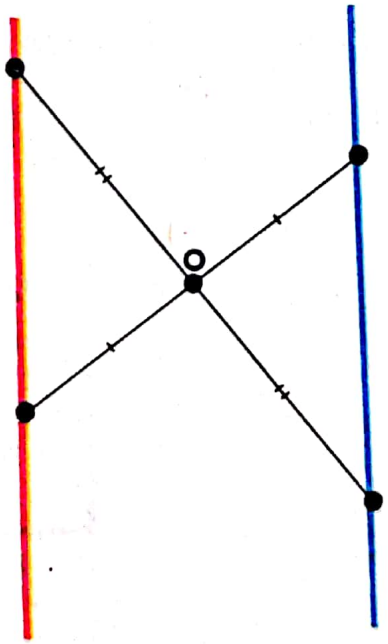
Scanned with OKEN Scanner

Alegeți un punct $x \in D$.
Construiți-i imaginea $s_0(x)$.
Duceți paralela P cu D care conține pe $s_0(x)$.



Spunem că $P = s_0 D$.

Într-adevăr, orice dreaptă conținînd pe o și neparalelă cu D taie pe D și P în puncte simetrice în raport cu o.



(Vezi cap. 21, paragr. 6, pag. 366)

Imaginea oricărui punct al dreptei D aparține dreptei P
Orice punct al dreptei P este imaginea unui punct al dreptei D
} deci $s_0 D = P$.

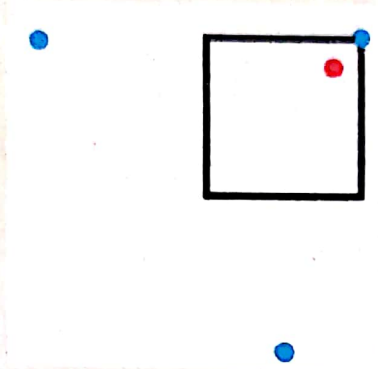
Am stabilit deci

LEMA 1 — *Imaginea unei drepte printr-o simetrie centrală este o dreaptă paralelă.*

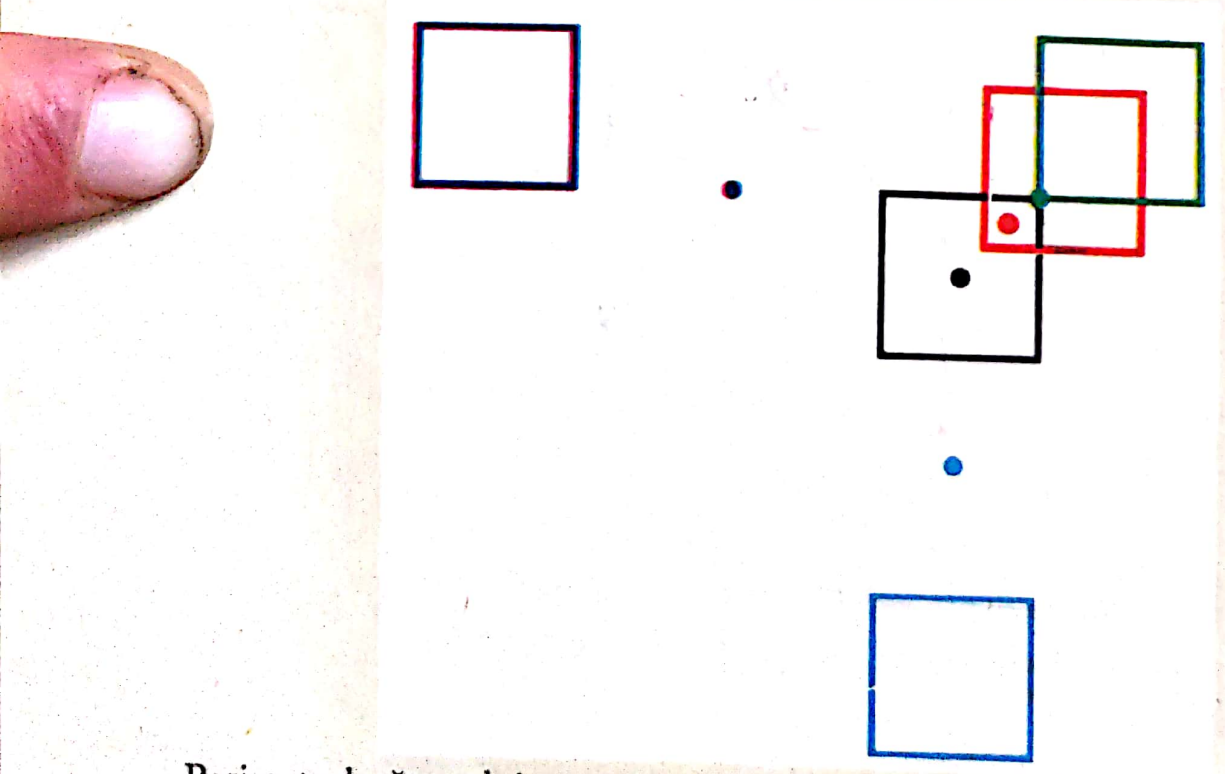
Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

1. Avem $s \circ s = I_{\Pi}$ pentru orice simetrie centrală s.
2. Iată perimetrul unui pătrat negru.



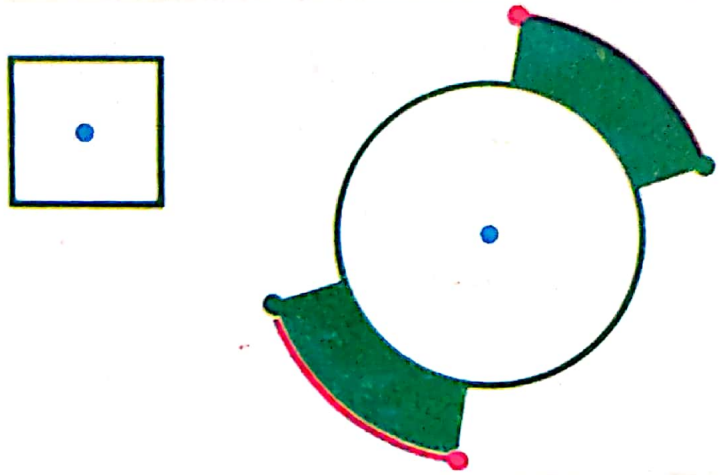
Desenați cu albastru imaginea sa prin simetria cu centrul albastru. Faceți același lucru pentru celelalte puncte.
Unde să desenăm punctul negru?



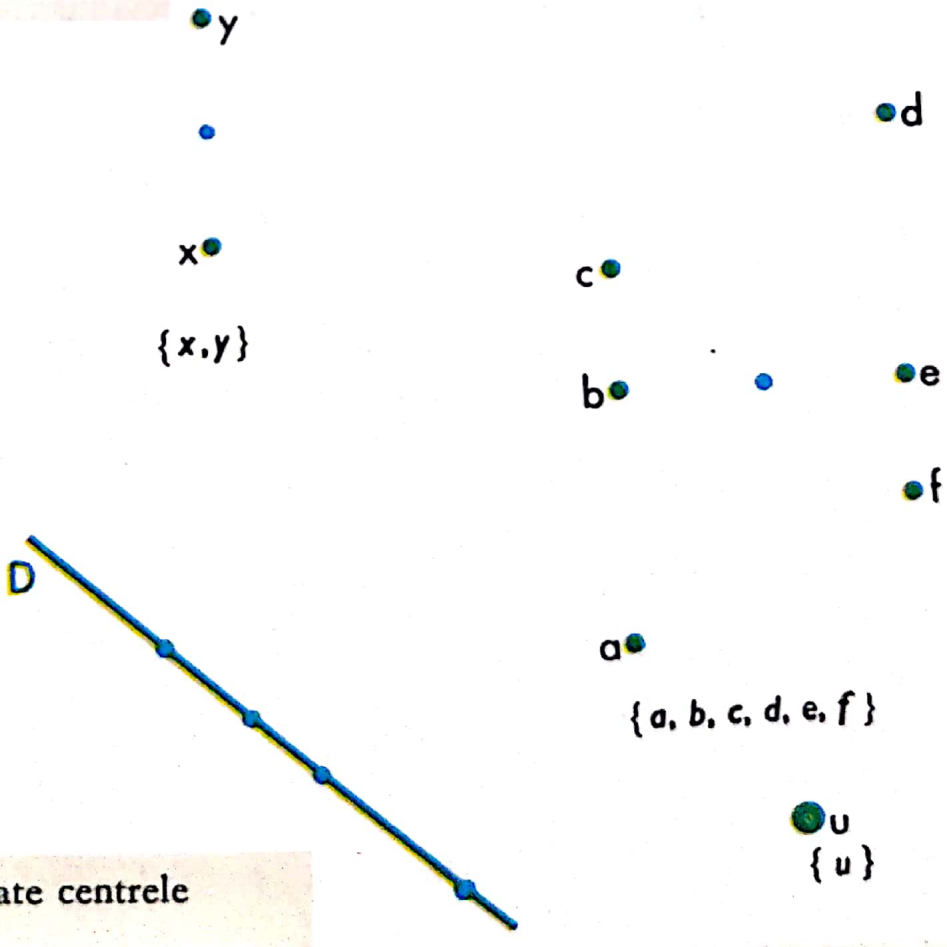
Perimetrul pătratului negru este propria sa imagine prin simetria cu centrul negru.

Scanned with OKEN Scanner

3. Desenați mulțimi care să fie propriile lor imagini printr-o anumită simetrie centrală. Centrul unei astfel de simetrii centrale este numit centrul (de simetrie) acestei mulțimi.
Iată cîteva exemple. Dați alte numeroase exemple.



Centrul de simetrie al unei perechi este punctul pe care l-am numit *centrul* perechii.



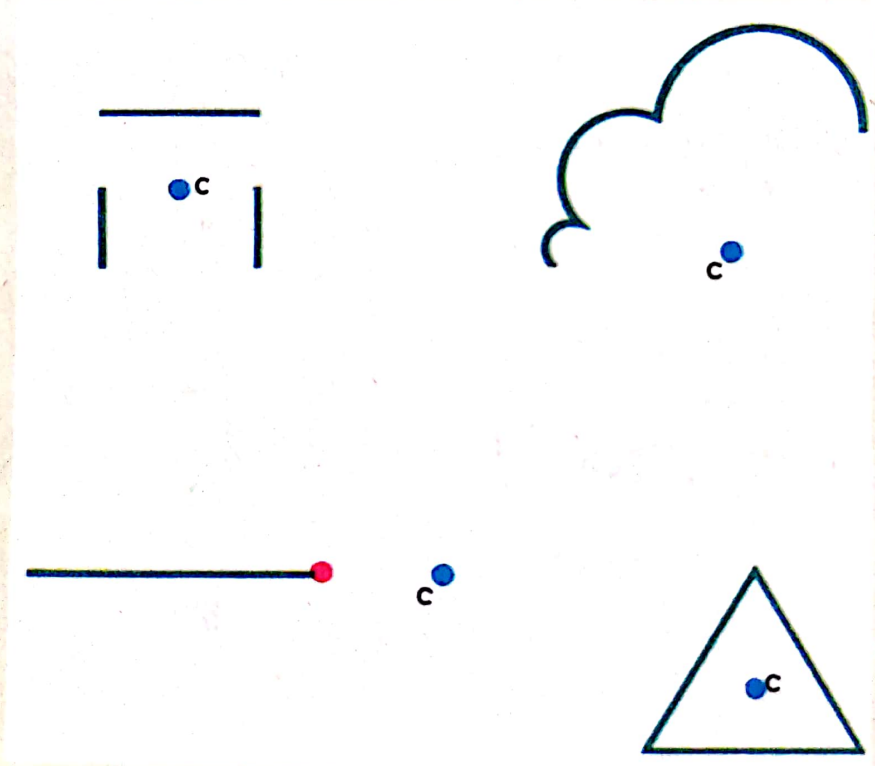
Am însemnat toate centrele mulțimii $D \in \mathfrak{D}$?

4. Un triunghi echilateral admite un centru (de simetrie)?

5. Care sînt poligoanele regulate care admit un centru (de simetrie)?

6. Un paralelogram închis și perimetrul lui au același centru de simetrie: mijlocul (sau centrul) diagonalelor.

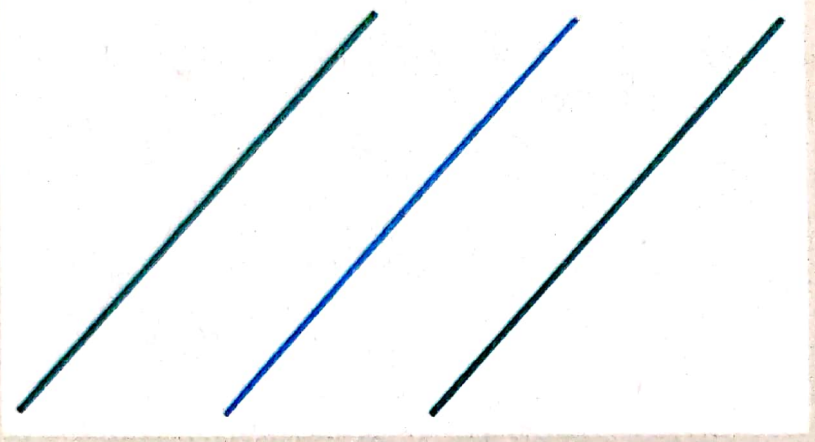
7. Care este cea mai mică mulțime cu centrul c care conține pe E, în situațiile de mai jos.



8. Pentru orice $c \in \Pi$ și orice $E \subset \Pi$: $E \cup s_c E$ este cea mai mică mulțime cu centrul c care conține pe E.

Scanned with OKEN Scanner

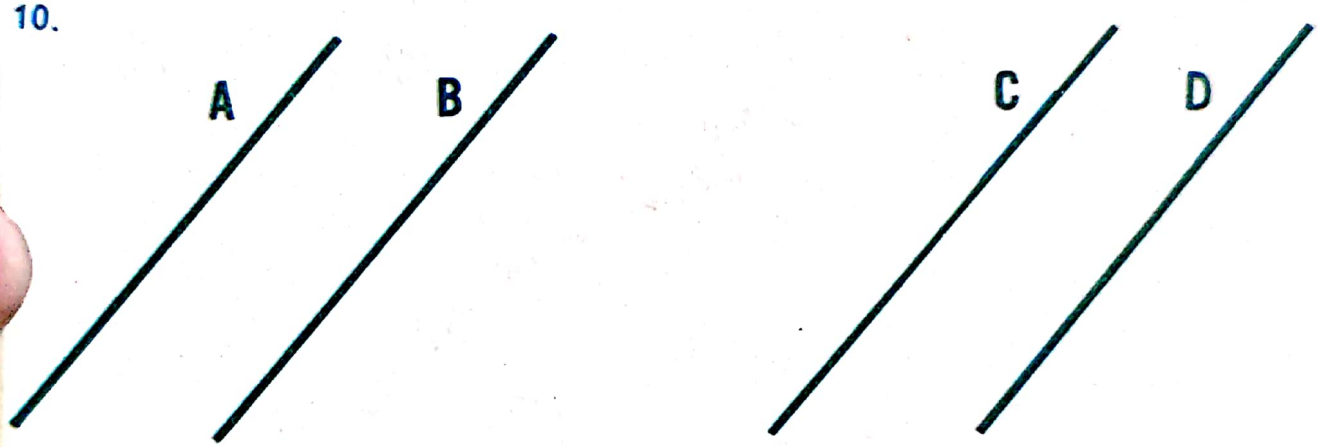
9. Care este mulțimea centrelor (de simetrie) a reuniunii a două drepte paralele?



Explicați răspunsul vostru.

10.

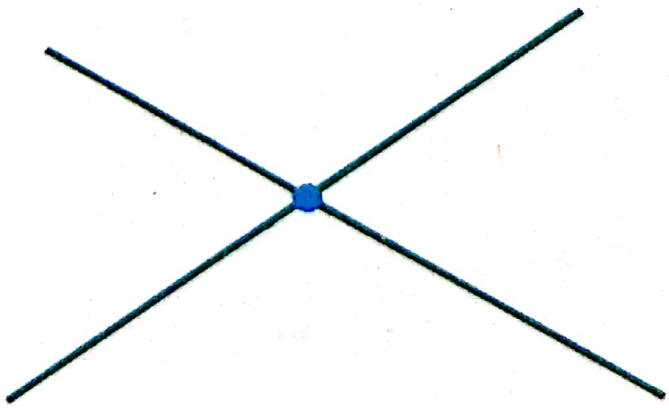
10.



$A, B, C, D \in \mathfrak{D}$

Mulțimea centrelor de simetrie ale mulțimii $A \cup B \cup C \cup D$?

11. Care este centrul de simetrie al reuniunii a două drepte secante?

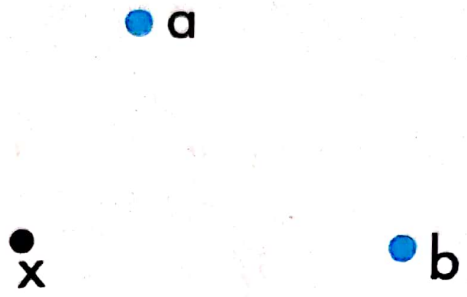


12. Două drepte paralele sînt fiecare imaginea celeilalte printr-o simetrie centrală.

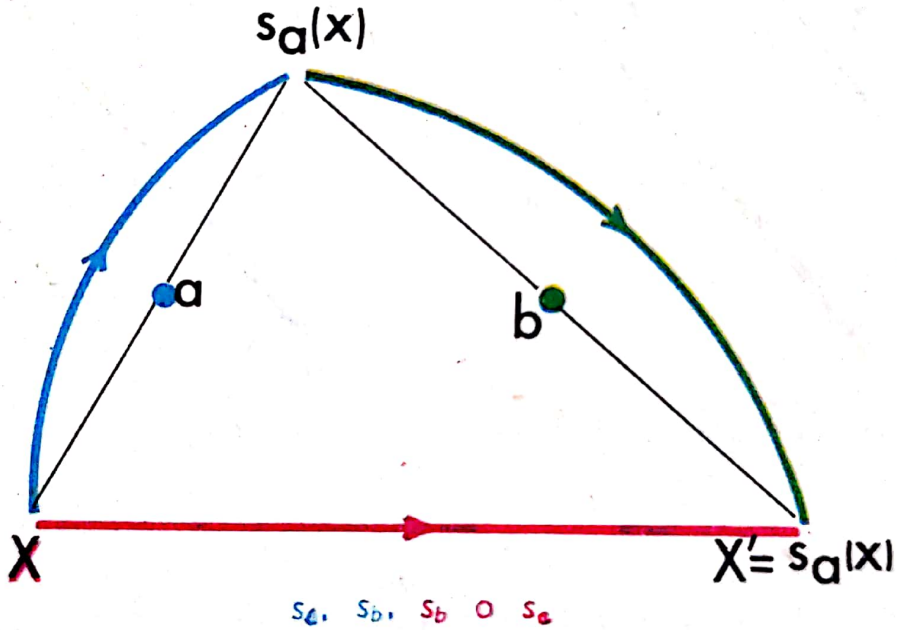
Scanned with OKEN Scanner

3 — SIMETRII CENTRALE ŞI TRANSLAŢII

Se dau două puncte a, b. Ele definesc fiecare cîte o simetrie centrală s_a, s_b. Însemnați un punct x oarecare în plan.



Construiți imaginea x' a lui x prin compusa $s_b \circ s_a$



s_a, s_b, $s_b \circ s_a$

GRAFICUL 165

— Comparați $\overrightarrow{xx'}$ și $\overrightarrow{ab}$.

— . . .

— Ajutați-vă de lema 2 de la capitolul 22.

— $\overrightarrow{xx'} = 2\,\overrightarrow{ab}$.

— Construiți imaginile $y', z', \ldots$ ale altor puncte $y, z, \ldots$ prin $s_b \circ s_a$. Ce veți găsi?

— Vom avea $\overrightarrow{xx'} = \overrightarrow{yy'} = \overrightarrow{zz'} = \ldots = 2\,\overrightarrow{ab}$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel vedeţi că

$$\boxed{s_b \circ s_a = 2\overrightarrow{ab}}$$

Să reţinem acest prim rezultat.

LEMA 2 — *Compusa a două simetrii centrale este o translaţie.*

Pentru orice $a, b \in \Pi$: $s_b \circ s_a = 2\overrightarrow{ab}$

Acum este uşor să stabilim

LEMA 3 — *Orice translaţie este compusa a două simetrii centrale.*

Mai mult, *pentru orice translaţie* $\vec{t}$ *şi orice* $a \in \Pi$, există $x, y \in \Pi$, astfel încît

$$\boxed{t = s_x \circ s_a = s_a \circ s_y}$$

Ştim că

$$s_x \circ s_a = 2\overrightarrow{ax} \qquad s_a \circ s_y = 2\overrightarrow{ya}$$

Lema se reduce deci la a găsi puncte x, y astfel încît

$$2\overrightarrow{ax} = \vec{t} \qquad 2\overrightarrow{ya} = \vec{t}$$

operaţie pe care ştim să o facem (cap. 22, paragr. 8. Ex. 1 şi 2, pag. 410)

LEMA 4 — *Pentru orice*

$a, b, c \in \Pi$: există $x, y \in \Pi$, *astfel încît*

$$\boxed{s_y \circ s_c = s_b \circ s_a = s_c \circ s_x}$$

Oricare ar fi punctele x, y, lema 2 ne arată că

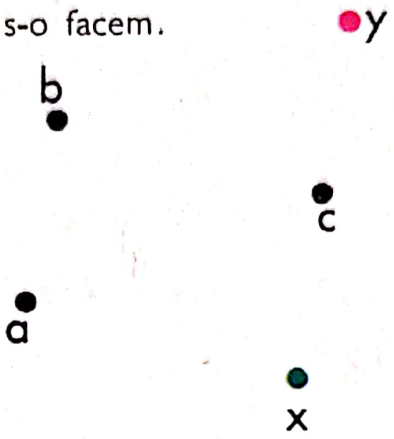
$$s_y \circ s_c = 2\overrightarrow{cy}, \qquad s_b \circ s_a = 2\overrightarrow{ab}, \qquad s_c \circ s_x = 2\overrightarrow{xc}$$

Scanned with OKEN Scanner

Trebuie să găsim deci x, y astfel încît

$$\boxed{\overrightarrow{cy} = \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{xc}}$$

operație pe care știm de mult s-o facem.



Am rezolvat o problemă privind simetrii centrale, fără să desenăm nici o simetrie centrală. Nu este distractiv?

LEMA 5 — *Compusa a trei simetrii centrale este o simetrie centrală. Cu alte cuvinte.* $a, b, c \in \Pi \Rightarrow s_c \circ s_b \circ s_a$ *este o simetrie centrală.*

DEMONSTRAȚIE: Trebuie să calculăm $s_c \circ s_b \circ s_a$
Pe baza lemei 4, există $x \in \Pi$ astfel încît

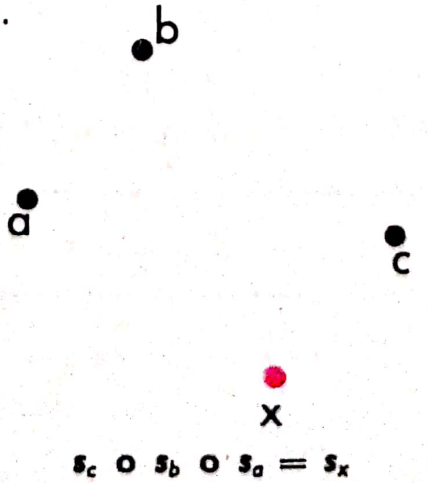
$$s_b \circ s_a = s_c \circ s_x$$

Deci (reprezentînd prin 1_Π transformarea identică a lui Π)

$$\begin{aligned} s_c \circ s_b \circ s_a &= s_c \circ (s_c \circ s_x) \\ &= (s_c \circ s_c) \circ s_x \\ &= 1_\Pi \circ s_x \\ &= s_x \end{aligned}$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

Am rezolvat deci o problemă de geometrie fără să facem un desen !
Nu este din ce în ce mai distractiv?
Atunci faceți un desen.



$s_c \circ s_b \circ s_a = s_x$

LEMA 6 — *Compusa unui număr par de simetrii centrale este o translație. Compusa unui număr impar de simetrii centrale este o simetrie centrală. În particular, compusa a două translații este o translație și compusa unei translații și unei simetrii centrale (sau unei simetrii centrale și unei translații) este o simetrie centrală.*

DEMONSTRAȚIE: Fie simetrii centrale $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, \ldots$

s_1 este o *simetrie centrală*.
$s_2 \circ s_1$ este o *translație* (lema 2)
$s_3 \circ s_2 \circ s_1$ este o *simetrie centrală* (lema 5). Să punem $s_3 \circ s_2 \circ s_1 = s'_3$
$s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1 = s_4 \circ s'_3$ este o *translație* (lema 2).
$s_5 \circ s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1 = s_5 \circ s_4 \circ s'_3$ este o *simetrie centrală* (lema 5).
S-o numim s'_5.
$s_6 \circ s_5 \circ s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1 = s_6 \circ s'_5$ este o *translație* (lema 2).
etc. . . .

Deoarece orice translație este compusa a două simetrii centrale (lema 3), compusa a două translații este compusa a 4 simetrii centrale, este deci o *translație* (ceea ce știam de mult).

De asemenea, compusa unei simetrii centrale și unei translații (sau viceversa) este compusa a trei simetrii centrale, este deci o *simetrie centrală*.

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

EXERCIȚII

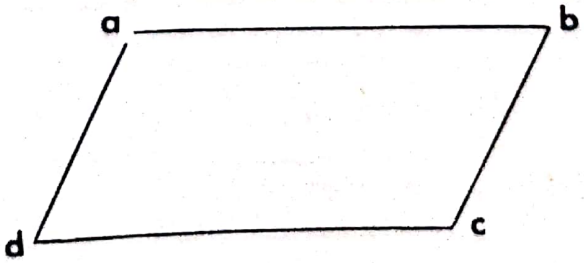
1. Vă dau $a, b, c \in \Pi$.
Găsiți x, y, z, u, v, w astfel încît

$$s_c \circ s_b \circ s_a = s_x$$
$$s_b \circ s_c \circ s_a = s_y$$
$$s_c \circ s_a \circ s_b = s_z$$
$$s_a \circ s_c \circ s_b = s_u$$
$$s_b \circ s_a \circ s_c = s_v$$
$$s_a \circ s_b \circ s_c = s_w$$

Din aceasta deduceți relații între acești produși.

2. Dacă a, b, c, d sînt vîrfurile unui paralelogram, este adevărat că

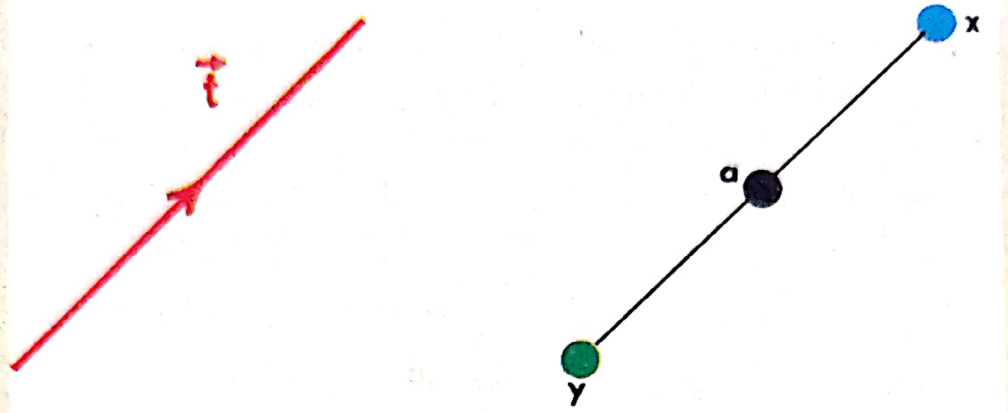
$$s_d \circ s_c \circ s_b \circ s_a = I_\Pi$$



Scanned with OKEN Scanner

3. Iată o translație $\vec{t}$ și un punct a.
Găsiți pe x, y astfel încît

$$s_x = \vec{t} \circ s_a, \qquad s_y = s_a \circ \vec{t},$$



$\vec{t} = s_x \circ s_a$, deci $\vec{t} \circ s_a = s_x$.

4. Dacă s_1, s_2, s_3 reprezintă 3 simetrii centrale

$$\boxed{s_1 \circ s_2 \circ s_3 = s_3 \circ s_2 \circ s_1}$$

DEMONSTRAȚIE: Conform lemei 5: $s_1 \circ s_2 \circ s_3$ este o simetrie centrală. Deoarece orice simetrie centrală este egală cu reciproca sa,

$$(s_1 \circ s_2 \circ s_3)^{-1} = s_1 \circ s_2 \circ s_3 \qquad (1)$$

Amintiți-vă că dacă fiecare din literele A, B, C reprezintă o relație

$$(A \circ B \circ C)^{-1} = C^{-1} \circ B^{-1} \circ A^{-1}$$

Aplicați această formulă la compusa $s_1 \circ s_2 \circ s_3$.

$$(s_1 \circ s_2 \circ s_3)^{-1} = s_3^{-1} \circ s_2^{-1} \circ s_1^{-1}$$

Deoarece $s_1^{-1} = s_1$, $s_2^{-1} = s_2$, $s_3^{-1} = s_3$, obținem formula

$$(s_1 \circ s_2 \circ s_3)^{-1} = s_3 \circ s_2 \circ s_1 \qquad (2)$$

Formulele (1) și (2) dau

$$s_1 \circ s_2 \circ s_3 = s_3 \circ s_2 \circ s_1$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

5. Formula stabilită la exercițiul precedent ne permite să stabilim prin calcul comutativitatea compunerii translației.
Trebuie să stabilim că dacă fiecare din literele t_1, t_2 reprezintă o translație,

$$\boxed{t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1}$$

Pe baza lemei 3, există simetrii centrale

s_1, s_2, s_3, s_4 astfel încît
$t_1 = s_1 \circ s_2$, $t_2 = s_3 \circ s_4$

Vom fi demonstrat formula încadrată mai sus stabilind că

$$\boxed{s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4 = s_3 \circ s_4 \circ s_1 \circ s_2}$$

Amintiţi formula de la exerciţiul 4.

$$s_1 \circ s_2 \circ s_3 = s_3 \circ s_2 \circ s_1$$

Deci

$$s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4 = s_3 \circ s_2 \circ s_1 \circ s_4 \qquad (1)$$

Aplicaţi formula de la exerciţiul 4 compusei $s_2 \circ s_1 \circ s_4$

$$s_2 \circ s_1 \circ s_4 = s_4 \circ s_1 \circ s_2 \qquad (2)$$

Aducînd pe (2) în (1) avem

$$s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4 = s_3 \circ s_4 \circ s_1 \circ s_2$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

4 — GRUPUL SIMETRIILOR CENTRALE ŞI TRANSLAŢIILOR

Recitiţi lema 6.

Notez cu S mulţimea simetriilor centrale şi translaţiilor.

S este deci mulţimea transformărilor compuse din simetrii centrale.

Deci $f, g \in S \Rightarrow f \circ g \in S$

Mulţimea S este astfel prevăzută cu legea asociativă $\circ$.

Transformarea identică 1_Π este o translaţie şi deci face parte din S.

Elementul $1_\Pi \in S$ este neutru pentru $\circ$:

$$\text{pentru orice } f \in S: \ 1_\Pi \circ f = f = f \circ 1_\Pi.$$

Dacă $f \in S$, atunci f este fie o simetrie centrală, fie o translaţie.

Dacă f este o simetrie centrală, $f^{-1} = f \in S$.

Dacă f este o translaţie, ştim (cap. 22, teorema 1, pag. 379) că f^{-1} este o translaţie şi deci face parte din S.

Astfel, pentru orice $f \in S$ avem $f^{-1} \in S$ şi $f \circ f^{-1} = 1_\Pi = f^{-1} \circ f$.

În rezumat:

1. Pentru orice $f, g \in S$:	$f \circ g \in S$
2. Pentru orice $f, g, h \in S$:	$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
3. $1_\Pi \in S$ şi pentru orice $f \in S$:	$f \circ 1_\Pi = f = 1_\Pi \circ f.$
4. Pentru orice $f \in S$:	$f^{-1} \in S$ şi $f \circ f^{-1} = 1_\Pi = f^{-1} \circ f.$

Scanned with OKEN Scanner

După cum știți, exprimăm pe scurt totalitatea acestor proprietăți prin

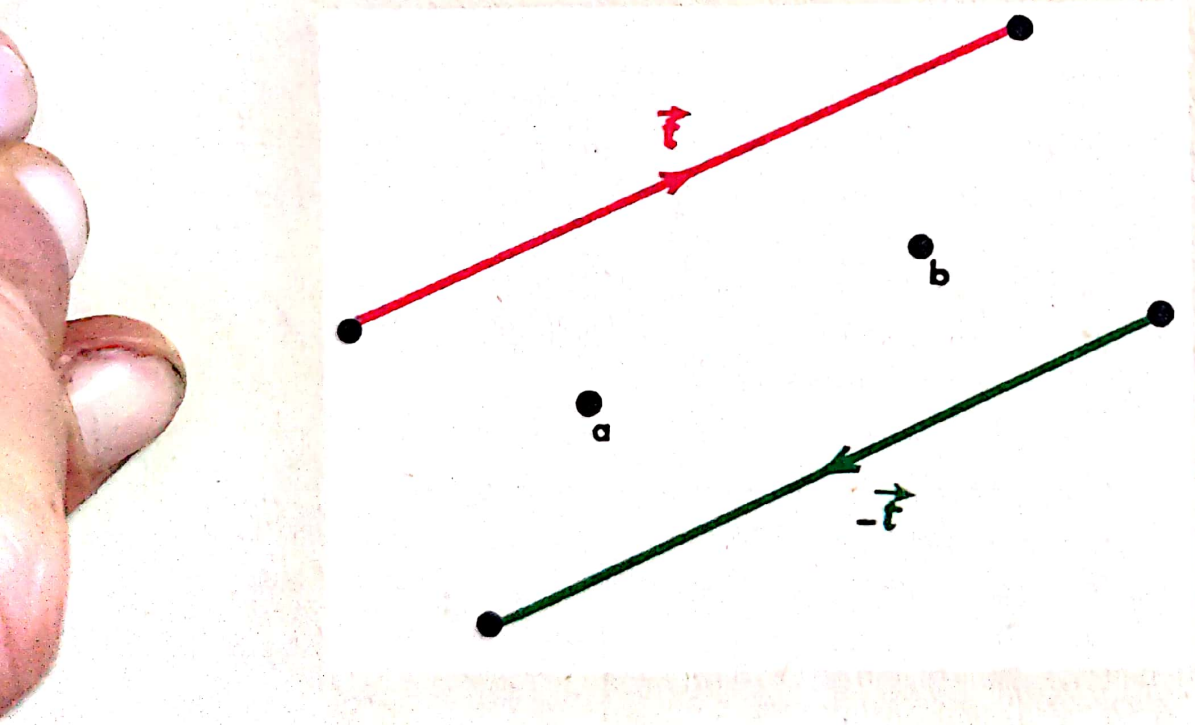
TEOREMA — **Mulțimea S a simetriilor centrale și a translațiilor formează un grup față de compunere.**

Pe scurt:

$$(S, \circ) \text{ este un grup}$$

EXERCIȚII

1. Grupul translațiilor și simetriilor centrale nu este comutativ.



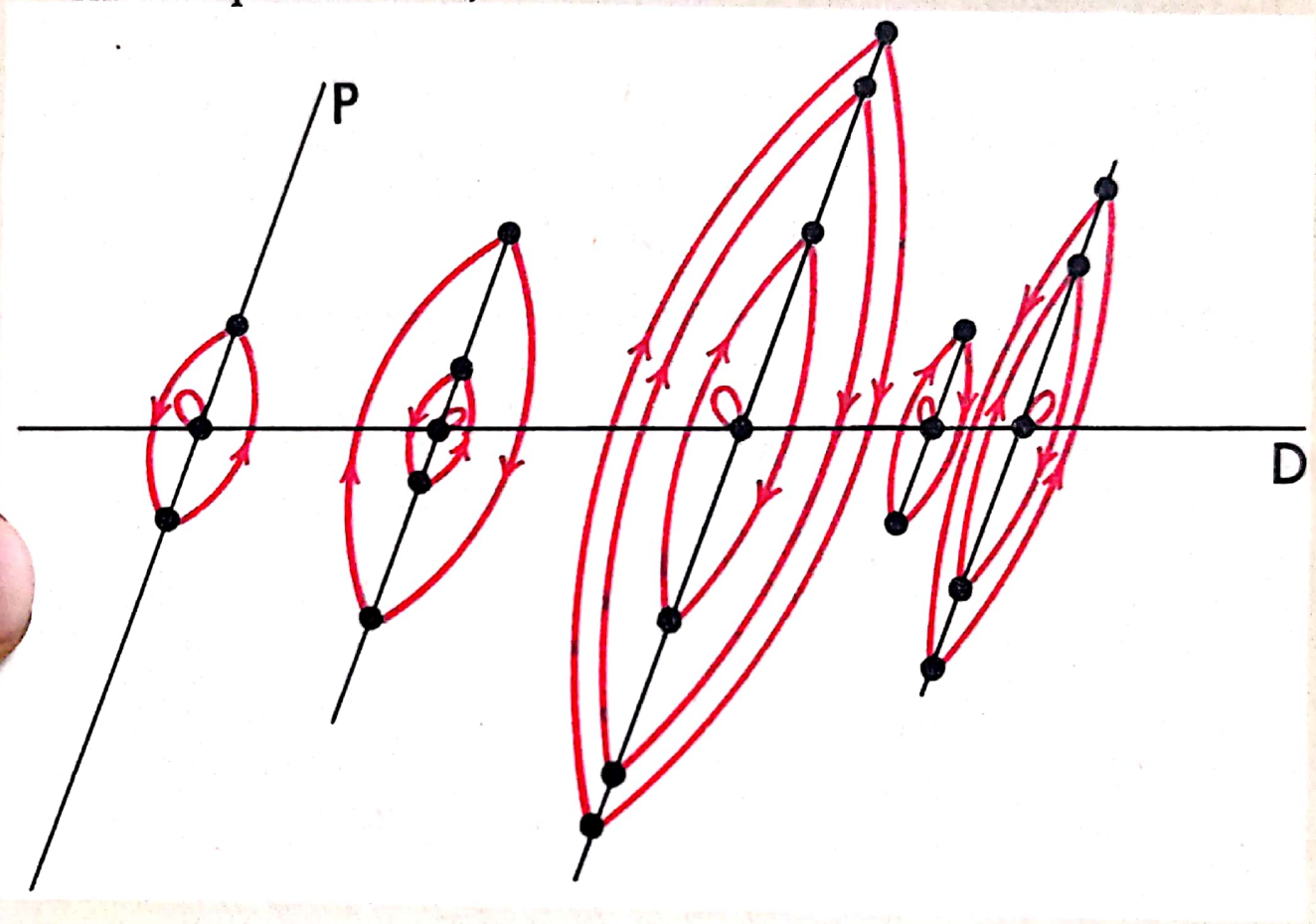
$$s_b \circ s_a = \vec{t} \neq -\vec{t} = s_a \circ s_b$$

2. Grupul translațiilor este un subgrup comutativ al grupului necomutativ al simetriilor centrale și al translațiilor.

Scanned with OKEN Scanner

5 — EXERCIŢII ŞI COMPLETĂRI

1. Priviţi acest desen. Veţi vedea în el cîteva săgeţi ale transformării numită **simetrie paralelă cu P, avînd axa D.**



s: SIMETRIE PARALELĂ CU P, AVÎND AXA D ∦ P
GRAFICUL 167

Care sînt punctele **fixe** ale lui s, adică punctele care au o buclă?
Axa lui s *este mulţimea punctelor sale fixe.*
Orice paralelă cu P este egală cu imaginea ei prin s (dar fiecare din ele nu conţine decît un singur punct fix).
Avem desigur $s = s^{-1}$, ceea ce dovedeşte că s este o *permutare* a lui Π.
Mai mult, dacă fiecare din literele x, y reprezintă un punct al lui Π:

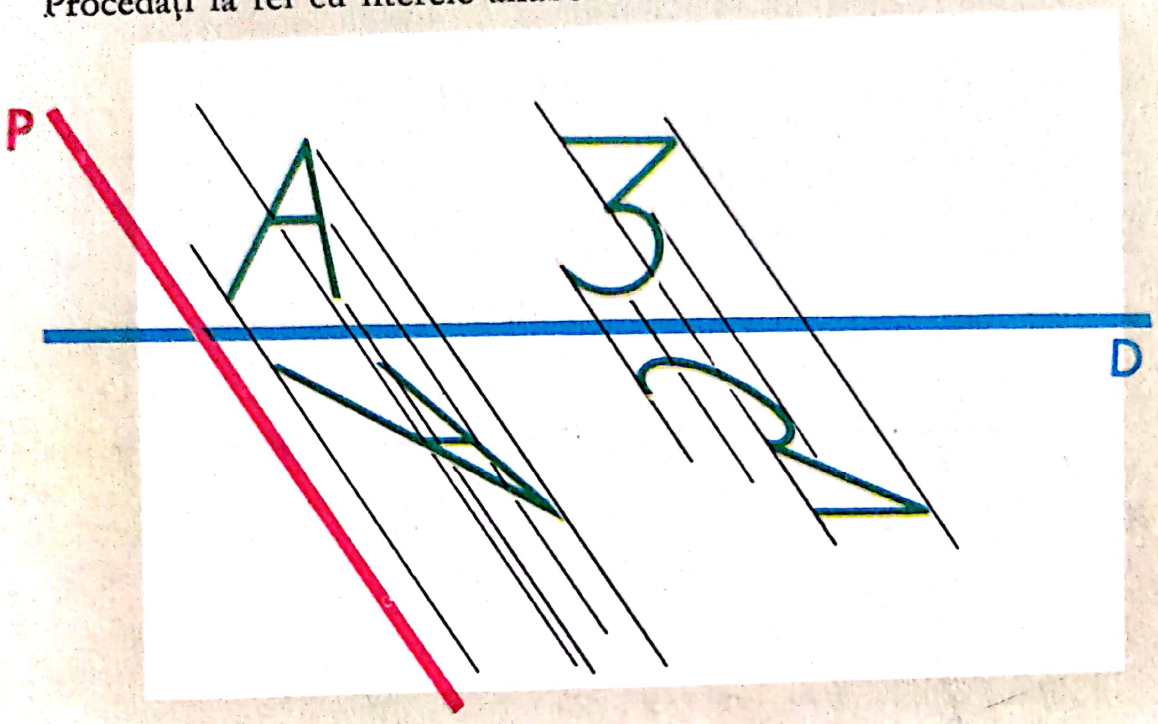
$$x = s(y) \iff y = s(x)$$

Din aceasta rezultă că pentru orice parte Q a lui Π

$$x \in s\,Q \iff s(x) \in Q$$

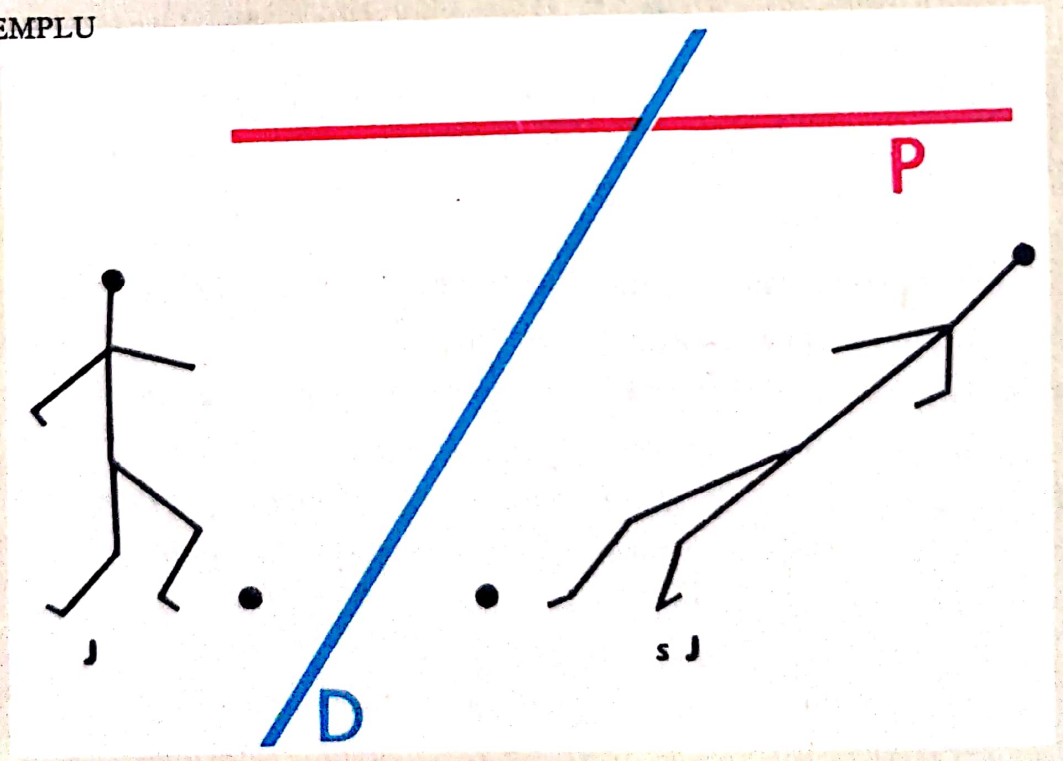
Scanned with OKEN Scanner

2. Desenați o frumoasă cifră 3 și drepte D și P neparalele.
Căutați imaginea acestui 3 prin simetria s paralelă cu P și având axa D.
Imaginea acestui 3 este tot un 3?.
Procedați la fel cu literele alfabetului.



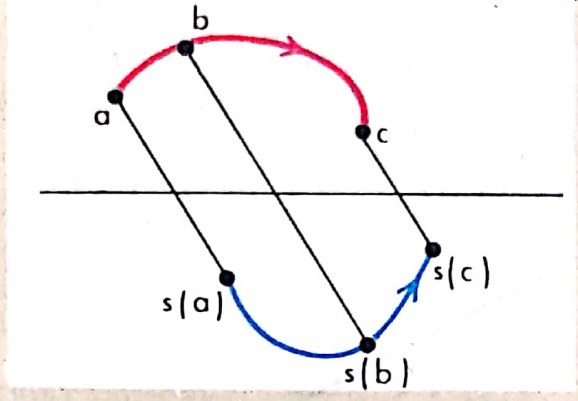
3. Trasați drepte P și D neparalele.
După fantezia voastră, luați diferite părți ale planului Π.
Căutați imaginile lor prin simetria paralelă cu P, de axă D.

EXEMPLU

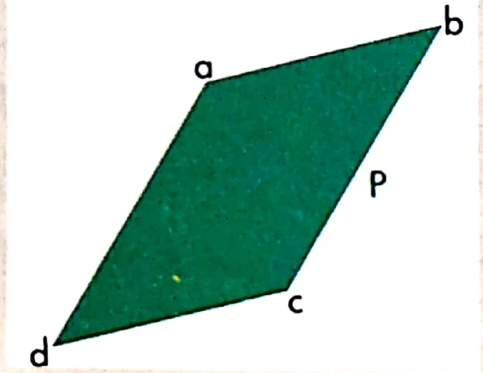


s: SIMETRIE PARALELĂ CU P, AVÎND AXA D.

4. Iată 3 puncte nealiniate a, b, c.
Notați sensul tripletului (a, b, c).
Iată o simetrie paralelă s.
Ce constatați cu privire la sensul tripletului $(s(a), s(b), s(c))$?



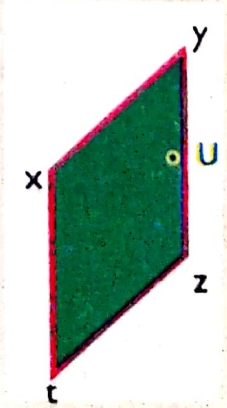
5. Să notăm cu a, b, c, d vîrfuri consecutive ale paralelogramului închis P



Care este imaginea lui P prin simetria paralelă cu bd și avînd axa ac?
Care este imaginea lui P prin simetria paralelă cu ac și avînd axa bd?

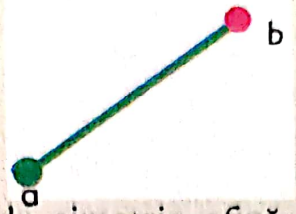
6. Fie s simetria paralelă cu P și avînd axa D.
Fie E o parte a lui Π.
Cînd $E = s\,E$, spunem că D este o **axă de simetrie afină** pentru mulțimea E.
Astfel, dreptele ac și bd sînt axe de simetrie afină ale paralelogramului P.

7. Găsiți 4 axe de simetrie afină ale paralelogramului deschis U.

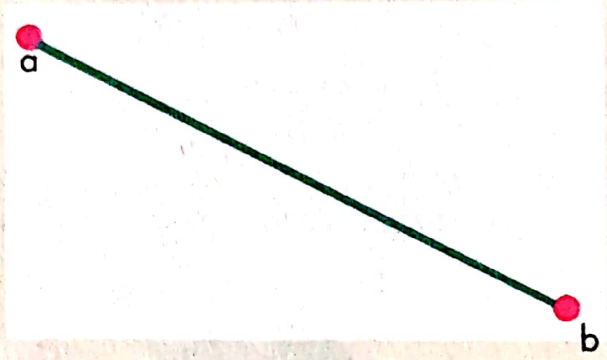


8. Care sînt axele de simetrie afină ale dreptei D?

9. Care este mulțimea axelor de simetrie afină ale segmentului semi-deschis $[ab[$?



10. Care este mulțimea axelor de simetrie afină ale segmentului deschis $]ab[$?

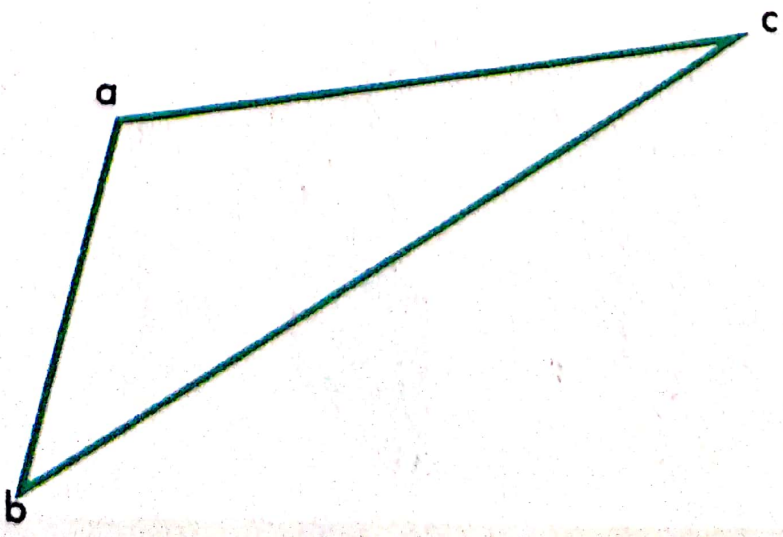


11. Fie A și B drepte astfel încît $\{o\} = A \cap B$.
Să notăm cu s simetria avînd axa A, paralelă cu B și prin t simetria avînd axa B, paralelă cu A.
Arătați că $s \circ t = t \circ s = s_0$ (simetrie avînd centrul o).

12. Arătați că orice simetrie centrală este compusa a două simetrii paralele.

13. Fie drepte $A \parallel B \nparallel P$.
Dacă a reprezintă simetria paralelă cu P avînd axa A, iar b simetria paralelă cu P, avînd axa B, arătați că $b \circ a$ este o translație paralelă cu P.

14. Care este mulțimea axelor de simetrie afină a triunghiului abc?



24

Grupuri

1 — DEFINIȚIA GRUPURILOR

— Amintiți exemple de grupuri pe care le-am întîlnit mai înainte.

— $Z, +$

$\mathcal{C}, o$ $\quad V, +$ $\quad \Pi_0, +$

$\mathcal{S} E, o$

$\mathcal{P} E, \Delta$

— Ce puteți spune de grupurile $\mathcal{C}, o$; $V, +$ și $\Pi_0, +$?

— Ele reprezintă același grup cu ajutorul unor notări diferite.

— Amintiți definiția grupurilor.

G, $*$ este un grup

dacă și numai dacă

1. Pentru orice $x, y \in G$: $\quad x * y \in G$
2. Pentru orice $x, y, z \in G$: $\quad (x * y) * z = x * (y * z)$
3. Există $v \in G$ astfel încît pentru orice $x \in G$: $\quad x * v = x = v * x$
4. Pentru orice $x \in G$ există $\bar{x} \in G$ astfel încît: $\quad x * \bar{x} = v = \bar{x} * x$

— Cu alte cuvinte, un grup G, $*$ este o mulțime G prevăzută cu o lege $*$

1. internă și definită peste tot
2. asociativă
3. care admite elementul neutru v
4. și astfel încît orice element $x \in G$ să posede un element simetric $\bar{x}$.

Scanned with OKEN Scanner

— Care este elementul neutru în fiecare din exemplele pe care ni le-ați dat?

— Elementul neutru al grupului Z, + este numărul 0.

Elementul neutru al grupului $\mathfrak{T}$, o este transformarea identică 1_Π.

Elementul neutru al grupului V, + este vectorul nul $\vec{o} = \vec{a}\,\vec{a}$.

Elementul neutru al grupului Π_0, + este punctul o.

Elementul neutru al grupului $\mathfrak{S}E$, o este transformarea identică 1_E.

Elementul neutru al grupului $\mathcal{P}E$, Δ este mulțimea vidă $\varnothing$.

— În fiecare din aceste exemple, descrieți simetricul unui element oarecare.

— În Z, +, simetricul numărului întreg rațional a este numărul întreg rațional $-a$.

În $\mathfrak{T}$, o simetrica translației t este translația reciprocă t^{-1}. (O obținem întorcînd toate săgețile translației t).

În V, +, simetricul vectorului $\vec{ab}$ este vectorul $-\vec{ab} = \vec{ba}$.

În Π_0, +, simetricul unui punct a este simetricul acestui punct în raport cu o. Îl notăm $-a$. (Putem scrie $-a = s_0(a)$).

În $\mathfrak{S}E$, o, simetrica permutării $f \in \mathfrak{S}E$ este permutarea reciprocă f^{-1}. (O obținem întorcînd toate săgețile permutării f).

În $\mathcal{P}E$, Δ, orice parte A din E este propria sa simetrică.

— Căutați în carte pasajele care arată exactitatea răspunsurilor voastre.

	grup	lege	element neutru	un element și simetricul lui	
Un grup în general	G, *	*	ν	g	$\bar{g}$
Grupul numerelor întregi raționale	Z, +	+	0	z	$-z$
Grupul translațiilor	$\mathfrak{T}$, o	o	1_Π	t	t^{-1}
Grupul vectorilor	V, +	+	$\vec{o}$	$\vec{v}$	$-\vec{v}$
Grupul planului punctat	Π_0, +	+	o	a	$-a$
Grupul simetric al mulțimii E	$\mathfrak{S}E$, o	o	1_E	f	f^{-1}
Grupul $\mathcal{P}E$, Δ	$\mathcal{P}E$, Δ	Δ	$\varnothing$	A	A

Scanned with OKEN Scanner

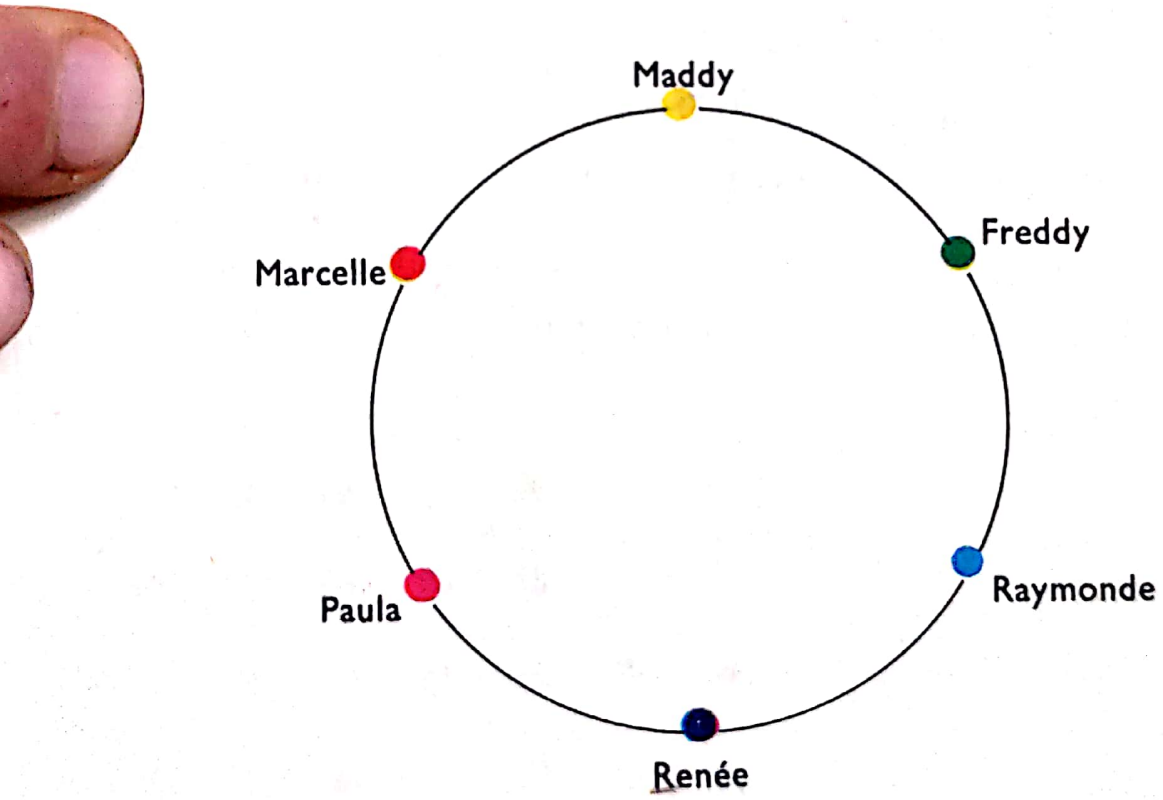
EXERCIȚII

1. Dacă E este o mulțime nevidă,
Atunci, $\mathcal{P}E, \cup$ și $\mathcal{P}E, \cap$ nu sînt grupuri.

2. $Z, -$ și $Z, \cdot$ nu sînt grupuri.

2 — UN JOC

Șase fetițe: Maddy, Freddy, Raymonde, Renée, Paula, Marcela se așază în jurul unei mese rotunde.



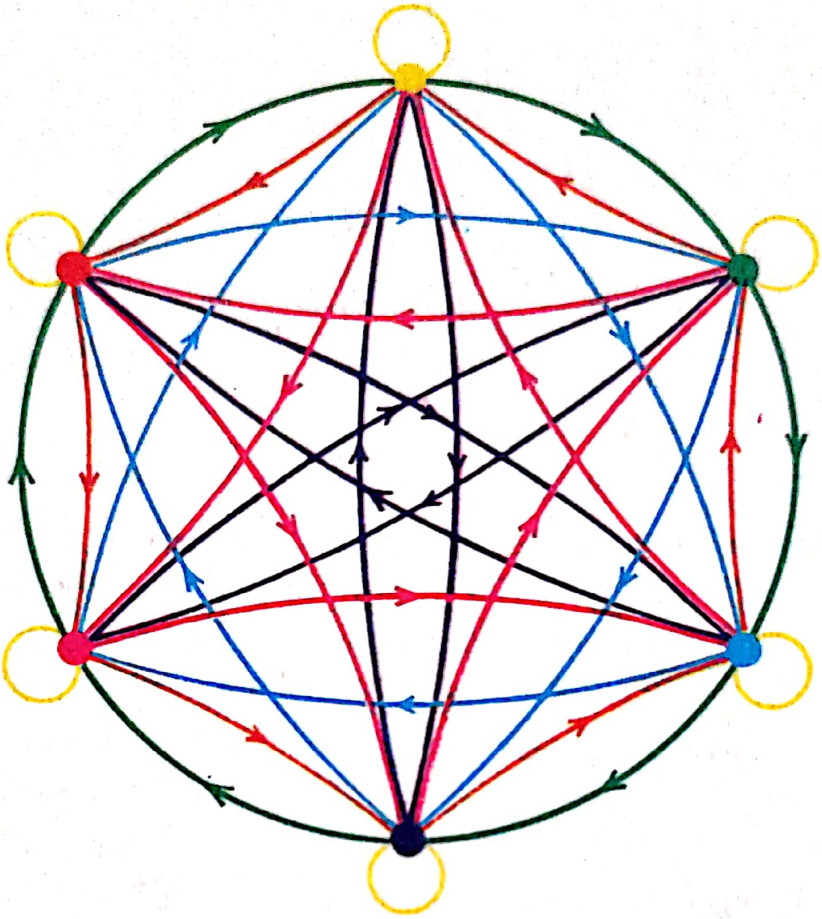
Vom prevedea mulțimea G a acestor șase fetițe cu o lege de grup.
Una din fetițe va trebui deci să aibă un rol special.

— Aceasta va fi elementul neutru.

— Să punem numele într-o pălărie și să tragem numele celei ce va fi elementul neutru . . . Hazardul a ales-o pe Maddy.

Scanned with OKEN Scanner

Fiecare din fețițe definește imediat o permutare a lui G.



GRAFICUL 168

— Stabiliți tabelul înmulțirii acestor permutări.

Atenție la ordinea permutărilor!

o		y
x		x o y

o						

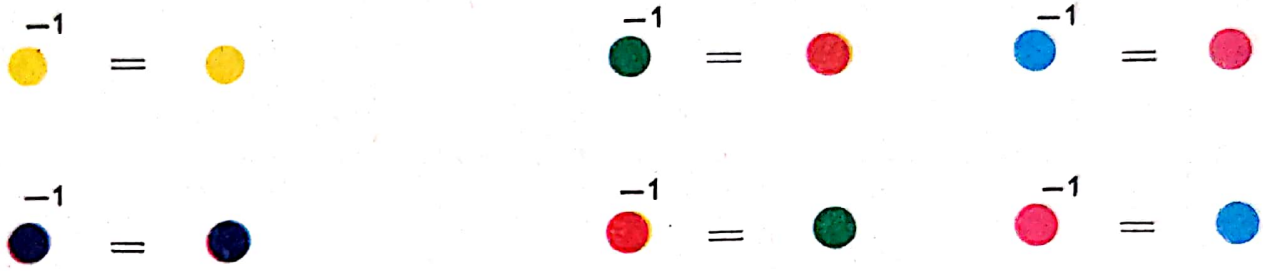
— Verificaţi dacă avem de-a face cu un grup.

1. Tabelul arată că compusa a două din aceste permutări este tot una din aceste permutări.

2. Legea este asociativă deoarece este vorba de **compunere de relaţii.**

3. Permutarea indicată prin culoarea galbenă (transformarea identică) este element neutru.

4. Tabelul arată că fiecare din aceste permutări admite o simetrică care nu este alta decît reciproca sa.



Avem de-a face, deci, cu un grup.

— Ştiţi că legea o nu este comutativă în general.
Ce remarcaţi, totuşi, examinînd tabla de înmulţire a grupului nostru?
— Legea este comutativă.
— Vom spune că **grupul este comutativ.**

Înlocuiţi fiecare culoare prin numele fetiţei corespunzătoare şi notaţi legea utilizînd + în loc de o.

— Iată tabelul de adunare a grupului G, +.

+	Maddy	Freddy	Raymonde	Renée	Paula	Marcela
Maddy	Maddy	Freddy	Raymonde	Renée	Paula	Marcela
Freddy	Freddy	Raymonde	Renée	Paula	Marcela	Maddy
Raymonde	Raymonde	Renée	Paula	Marcela	Maddy	Freddy
Renée	Renée	Paula	Marcela	Maddy	Freddy	Raymonde
Paula	Paula	Marcela	Maddy	Freddy	Raymonde	Renée
Marcela	Marcela	Maddy	Freddy	Raymonde	Renée	Paula

G, + este un grup comutativ

Scanned with OKEN Scanner

— Deoarece legea grupului a fost notată $+$, va fi ușor să reprezentăm elementul neutru prin 0 și să notăm cu $-a$ simetricul elementului a.

Scrieți amănunțit această convenție.

$$\begin{aligned} \text{Maddy} &= 0 \\ -\text{Maddy} &= \text{Maddy} = 0 \\ -\text{Freddy} &= \text{Marcela} \\ -\text{Marcela} &= \text{Freddy} \\ -\text{Raymonde} &= \text{Paula} \\ -\text{Paula} &= \text{Raymonde} \\ -\text{Renée} &= \text{Renée} \end{aligned}$$

— Calculați.

$$\text{Freddy} + \text{Paula}$$

$$\text{Marcela} + \text{Renée} + \text{Raymonde}$$

$$\text{Renée} + \text{Freddy} + \text{Paula}$$

$$\text{Maddy} + \text{Freddy} + \text{Raymonde} + \text{Renée} + \text{Paula} + \text{Marcela}$$

$$\text{Maddy} - \text{Freddy} - \text{Raymonde} - \text{Renée} + \text{Paula} - \text{Marcela}$$

$$\text{Maddy} + \text{Freddy} - \text{Raymonde} - \text{Renée} + \text{Paula} + \text{Marcela}$$

$$\text{Maddy} + \text{Freddy} + \text{Raymonde} - \text{Renée} - \text{Paula} - \text{Marcela}$$

Problemă: x este una din fetițele grupului.

Nu vă spun cine este x.

Dar vă semnalez că

$$x + \text{Freddy} = \text{Marcela}$$

Spuneți-mi cine este x?

Soluție: Știm că

$$\begin{aligned} & x + \text{Freddy} && = \text{Marcela} \\ \text{deci} \quad & x + \text{Freddy} - \text{Freddy} && = \text{Marcela} - \text{Freddy} \\ & x + 0 && = \text{Marcela} + \text{Marcela} \\ & x && = \text{Paula} \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIŢII

1. Rezolvaţi ecuaţiile de mai jos:

$$\begin{aligned} \text{Renée} + x &= \text{Raymonde} \\ \text{Marcela} + x + \text{Paula} &= \text{Freddy} \\ -\text{Renée} + x + \text{Marcela} &= \text{Maddy} \\ \text{Raymonde} - x - \text{Paula} &= -\text{Renée}. \end{aligned}$$

2. Care este cel mai mic subgrup al grupului G, + care o cuprinde pe Raymonde?

3. Care este cel mai mic subgrup al grupului G, + care o cuprinde pe Paula şi pe Renée?

4. Care sînt toate subgrupurile grupului G, + ?

5. Vom pune desigur

$$\begin{aligned} 3\ \text{Marcele} &= \text{Marcela} + \text{Marcela} + \text{Marcela} \\ (-2)\ \text{Raymonde} &= -(2\ \text{Raymonde}) \end{aligned}$$

Calculaţi:

Freddy + 2 Raymonde + 3 Renée + 4 Paula + 5 Marcela + 6 Maddy

217.389	Maddy
6	Freddy
7	Freddy
60	Freddy
62	Freddy
217.389	Freddy

Freddy + 17 Raymonde − 15 Renée + 6.666.666 Paula + 14 Marcela

6. Reîncepeţi jocul nostru cu toată clasa.
Dacă clasa voastră este destul de numeroasă, va fi foarte greu să desenaţi permutările, iar tabla adunării va fi foarte lungă. Va trebui deci să vă lipsiţi eventual de grafic şi chiar de tablă.
Puneţi elevele în cerc şi hazardul să hotărască pe zero.
Îndată trebuie să fie posibilă definirea sumei oricărei perechi de colege.

7. Reîncepeţi jocul nostru cu 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1 eleve.
În fiecare din aceste cazuri determinaţi toate subgrupurile.

Scanned with OKEN Scanner

3 — GRUPURI CICLICE

La paragraful precedent, am notat elementele unui anumit grup cu ajutorul culorilor pe care le-am înlocuit apoi cu prenume.

Acum le vom înlocui pe acestea cu numere păstrînd însă semnul + pentru adunare.

Maddy	Freddy	Raymonde	Renée	Paula	Marcela
0	1	2	3	4	5

Grupul astfel definit va fi notat $Z_6, +$

Alcătuiți tabelul adunării $Z_6, +$

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

TABELUL DE ADUNARE ÎN $Z_6, +$

Indicați simetricul fiecărui element al grupului Z_6.

$$-0 = 0$$
$$-1 = 5$$
$$-2 = 4$$
$$-3 = 3$$
$$-4 = 2$$
$$-5 = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII

1. Întocmiți tabele de adunare pentru Z_8, Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1.

2. Rezolvați următoarele ecuații:

în Z_5	$x + 4 = 2$
în Z_6	$x + 4 = 2$
în Z_7	$x + 4 = 2$
în Z_{50}	$x + 4 = 2$
în Z_5	$2 + x + 4 = 1$
în Z_{11}	$-3 + x + 7 = 2$
în Z	$3 + x - 87 = 5 - x + 87$

3. Găsiți toate subgrupurile grupurilor Z_{42} și Z_{43}.

4. Care este grupul aditiv definit în mod natural de zilele săptămînii știind că duminica = 0?
Calculați miercuri + joi
și rezolvați ecuația

$$-\text{ vineri} + x + \text{ sîmbătă} = \text{marți}$$

5. La cap. 22, paragr. 3, exercițiul 9, pag. 392, am alcătuit tabla de compunere a grupului simetric al unei perechi.
Elementul neutru era reprezentat printr-un punct galben, iar celălalt element al grupului printr-un punct roșu.
Întocmiți tabla grupului ciclic Z_2, + reprezentînd din nou elementul neutru printr-un punct galben, iar celălalt element printr-un punct roșu. Procedați la fel pentru grupul P $\{x\}$, Δ.
Perechea de numere întregi raționale $\{1, -1\}$ este un grup pentru înmulțire. Întocmiți tabla sa reprezentînd pe 1 printr-un punct galben și pe -1 printr-un punct roșu.
Iată un grup oarecare de două elemente $\{v, g\}$, $*$.
Fără să vă spun nimic mai mult, puteți întocmi tabla sa reprezentînd pe v printr-un punct galben și pe g printr-un punct roșu.
Ce concluzie trageți?

Scanned with OKEN Scanner

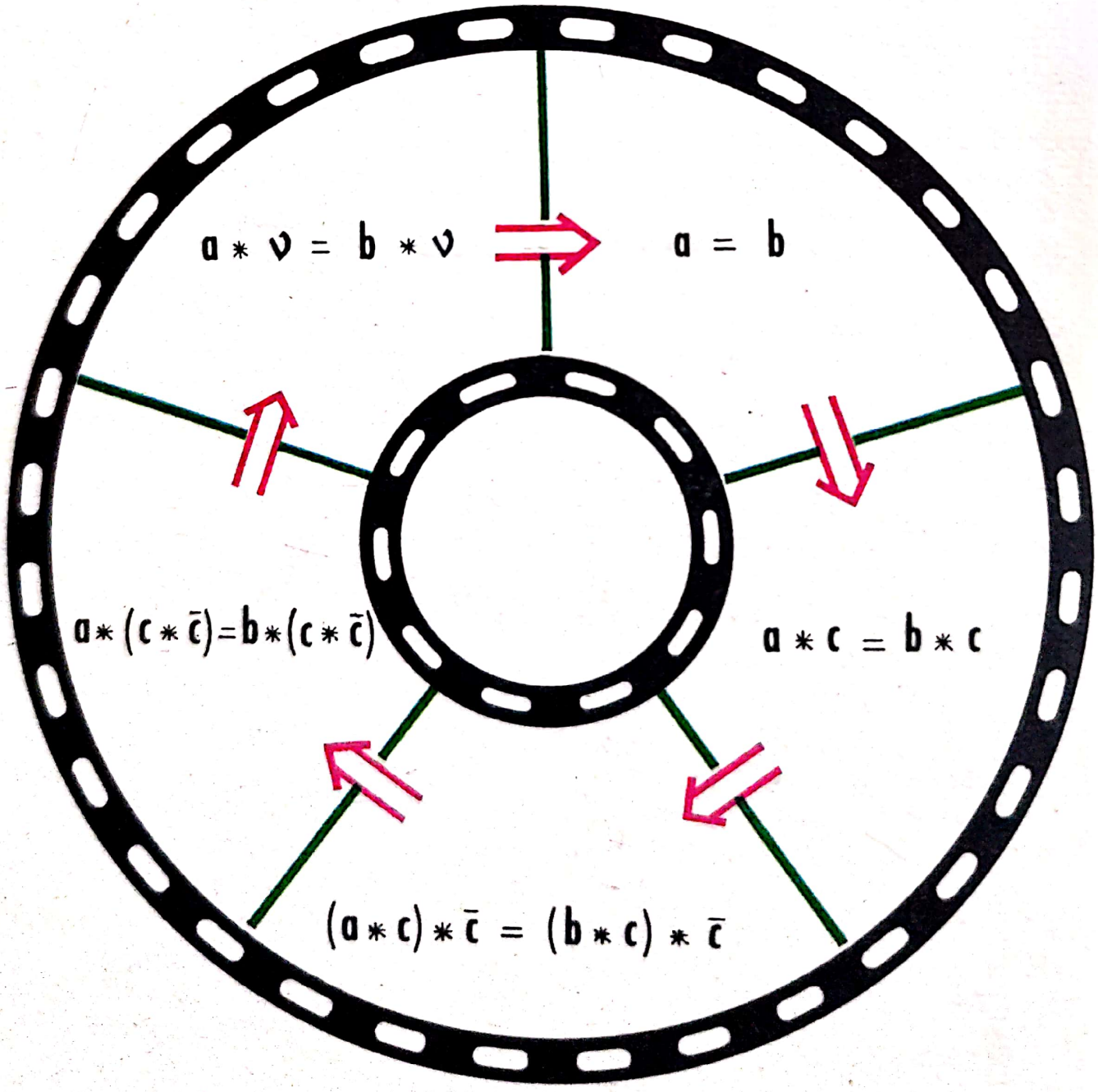
4 — CALCULUL ÎNTR-UN GRUP OARECARE

Am examinat multe grupuri foarte diferite și veți mai întîlni încă multe altele. Este, deci, important și recomandabil să învățăm să calculăm o dată pentru totdeauna, într-un grup oarecare.

Regulile învățate astfel vor fi valabile ori de cîte ori veți avea de-a face cu un grup. Va trebui să fiți atenți și să vedeți exact care este legea grupului, cum se notează ea, care este elementul neutru și cum se notează simetricul unui element în grupul considerat.

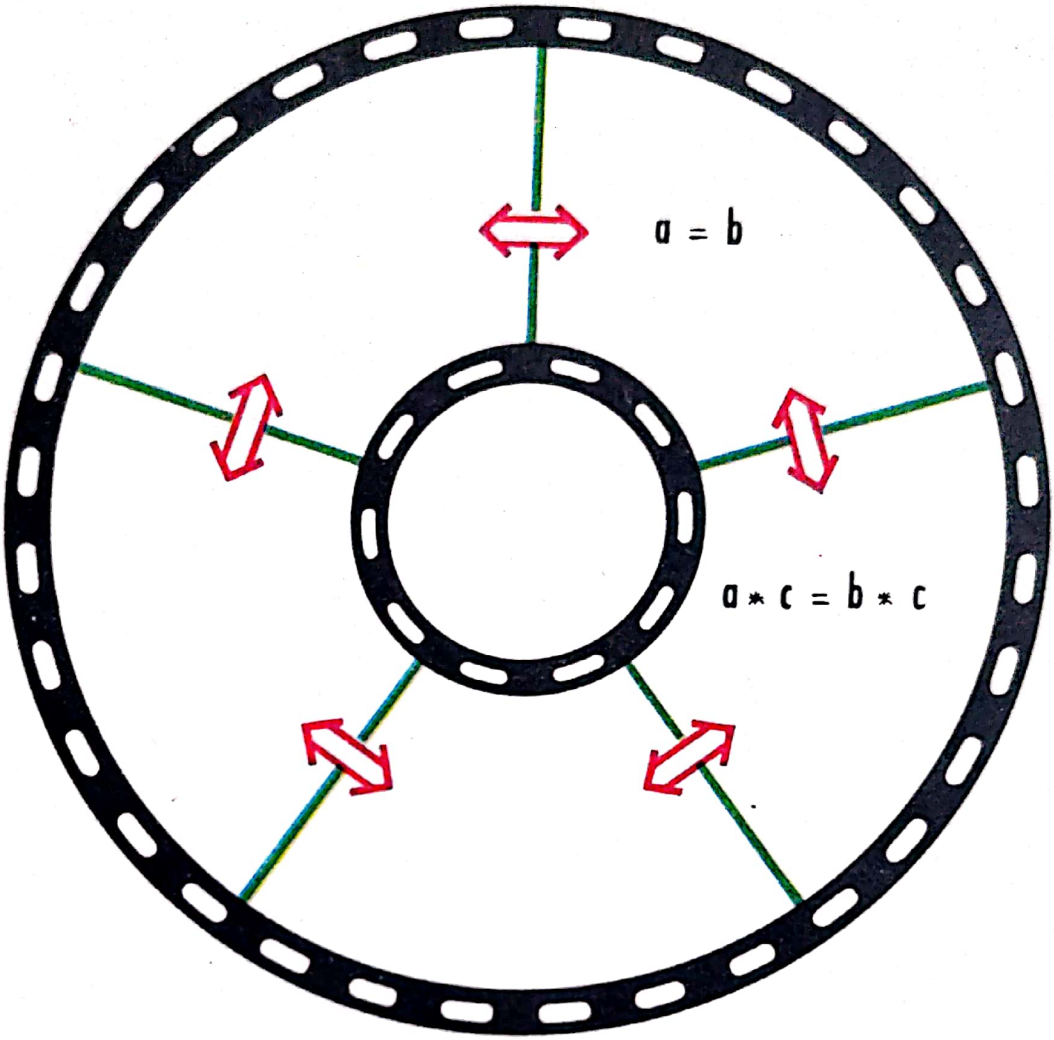
Să ne plasăm deci într-un grup G, $*$

Dacă fiecare din literele a, b, c reprezintă un element al acestui grup, veți obține imediat situația de mai jos



Scanned with OKEN Scanner

Deci,



Astfel formulele $a = b$ și $a * c = b * c$ dau exact aceeași informație.

Într-un grup $G, *$, dacă fiecare din literele a, b, c reprezintă un element al grupului:

$$a = b \iff a * c = b * c$$

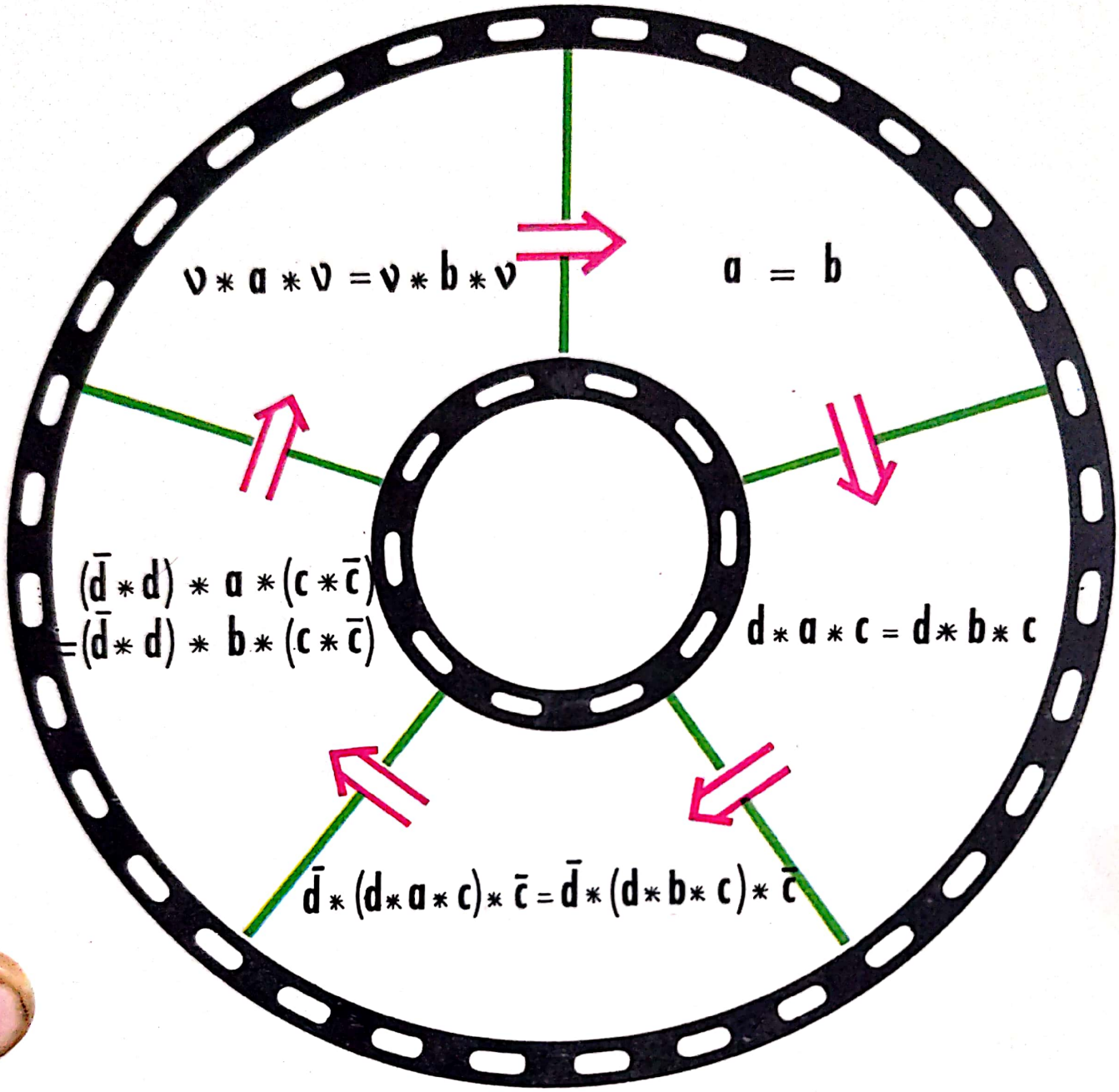
Pentru a ajunge la acest rezultat, am înmulțit la dreapta cu c și apoi cu $\bar{c}$. Faceți la fel înmulțind la stînga.

Veți găsi

$$a = b \iff c * a = c * b$$

De altfel, am fi putut înmulți simultan la stînga cu d și la dreapta cu $c \in G$.

Scanned with OKEN Scanner



Aici, de asemenea putem înlocui fiecare ⇒ prin ⇔

TEOREMA 1 — **Într-un grup G, ***

Dacă fiecare din literele *a*, *b*, *c*, *d* reprezintă cîte un element al grupului

Atunci $a = b$ ⇔ $d * a * c = d * b * c$

Scanned with OKEN Scanner

5 — UNICITATEA ELEMENTULUI NEUTRU ŞI A SIMETRICULUI ORICĂRUI ELEMENT

Am vorbit adesea despre elementul neutru al unui grup. Este natural să ne întrebăm dacă un grup poate conține mai multe elemente neutre. Este adevărat că în cazul grupurilor finite întîlnite mai sus, examinarea tabelei înmulțirii ne arată că aceste grupuri nu conțin decît un singur element neutru. De asemenea, în noile exemple de grupuri pe care le-am examinat, este destul de ușor să ne convingem că nu există decît un singur element neutru.

Să nu vă faceți însă nici o grijă în această privință. Veți vedea că este foarte simplu să stabiliți că un grup nu poate conține decît un singur element neutru.

Iată, într-adevăr, un grup $G, *$ și să presupunem că fiecare din literele ν, ν' reprezintă un element neutru al grupului $G, *$.

Calculați atunci produsul $\nu * \nu'$

Deoarece ν este neutru, $\nu * \nu' = \nu'$

Deoarece ν' este neutru, $\nu * \nu' = \nu$

Deci $\nu = \nu'$

Ceea ce trebuia să demonstrăm.

Știm acum că grupul $G, *$ nu conține decît **singurul element neutru** ν.

Deoarece $G, *$ este un grup, orice $g \in G$ admite un simetric pe care l-am notat cu $\bar{g}$, satisfăcînd condiția

$$g * \bar{g} = \nu = \bar{g} * g$$

Este firesc să ne întrebăm dacă $\bar{g}$ este singurul simetric al lui g în $G, *$.

Să presupunem, deci, că ați găsit un simetric în grupul G și că l-am numit g'.

Deoarece g' reprezintă un simetric, avem iarăși

$$g * g' = \nu = g' * g$$

Calculul de mai jos ne arată că $g' = \bar{g}$

$$\begin{aligned} & g' \\ & = g' * \nu && \nu \text{ este element neutru} \\ & = g' * (g * \bar{g}) && \bar{g} \text{ este simetric cu } g \\ & = (g' * g) * \bar{g} && \text{asociativitatea operației } * \\ & = \nu * \bar{g} && g' \text{ este simetric cu } g \\ & = \bar{g} && \nu \text{ este element neutru} \end{aligned}$$

LEMĂ — *Un grup nu conține decît un singur element neutru și fiecare din elementele sale admite un singur simetric.*

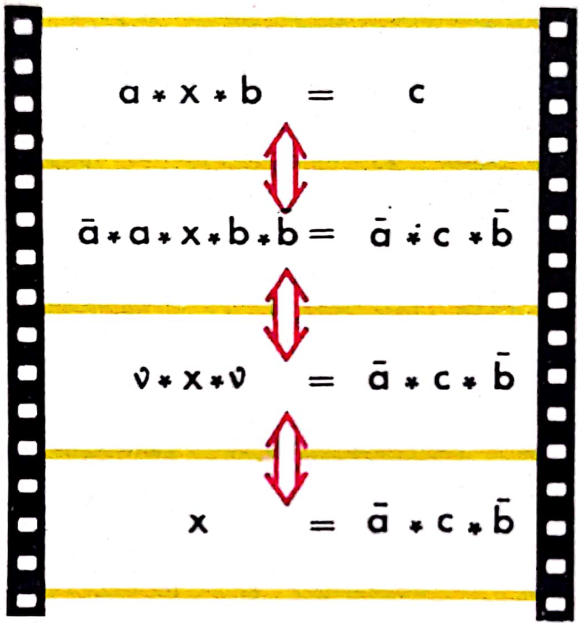
6 — ECUAȚII ÎNTR-UN GRUP

Ne situăm într-un grup G, $*$.

Dacă fiecare din literele a, b, c reprezintă cîte un element al grupului G, vom arăta că există un element $x \in G$ și numai unul singur astfel încît

$$a * x * b = c$$

Iată un film al acestei demonstrații



TEOREMA 2 — **Dacă fiecare din literele a, b, c reprezintă un element al grupului G, $*$, ecuația**

$$a * x * b = c$$

admite în G, $*$, soluția unică

$$x = \bar{a} * c * \bar{b}$$

Formulele

$$a * x * b = c \qquad \text{și} \qquad x = \bar{a} * c * \bar{b}$$

sînt **echivalente**: ele dau exact aceeași informație

$$a * x * b = c \quad \Leftrightarrow \quad x = \bar{a} * c * \bar{b}$$

ecuație **soluție**

EXERCIȚII

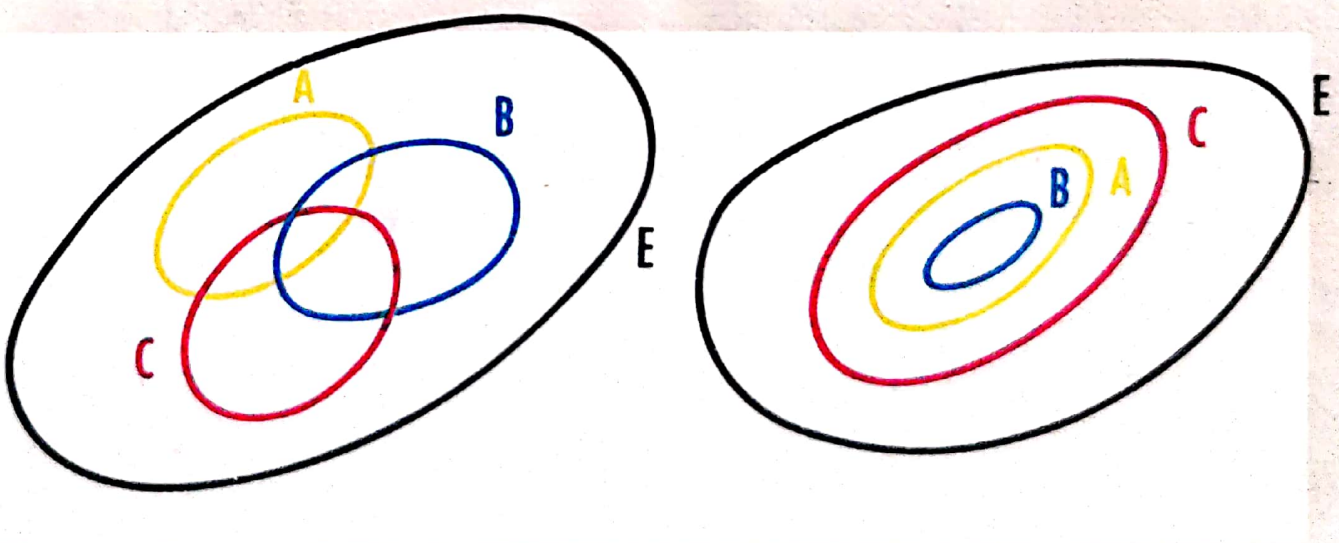
1. Dacă fiecare din literele a, b, c reprezintă un număr rațional, ecuația
$$a + x + b = c$$
admite, în Z, soluția unică
$$x = -a + c - b$$

2. Ecuația $2 + x - 87 = -68$ admite soluția unică
$$x = -2 - 68 + 87 = 17$$

3. În Z, rezolvați ecuațiile
$$-53 + x + 19 = -177$$
$$17 - 81 + x - 48 = -103$$

4. În $\mathcal{P}$ E, Δ, ecuația
$$A \Delta X \Delta B = C$$
admite soluția unică
$$X = A \Delta C \Delta B$$

5. În $\mathcal{P}$ E, Δ, desenați soluția ecuației $A \Delta X \Delta B = C$ în fiecare din următoarele situații



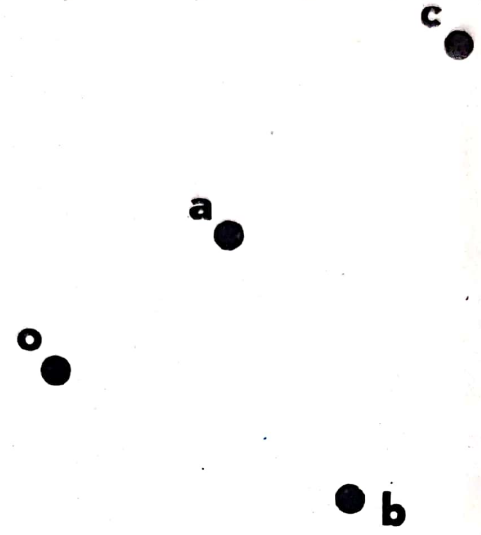
6. În Π_0, $+$, ecuația

$$a + x + b = c$$

admite soluția unică

$$x = -a + c - b$$

7. În Π_0, $+$, construiți soluția ecuației $a + x + b = c$ în situația de mai jos



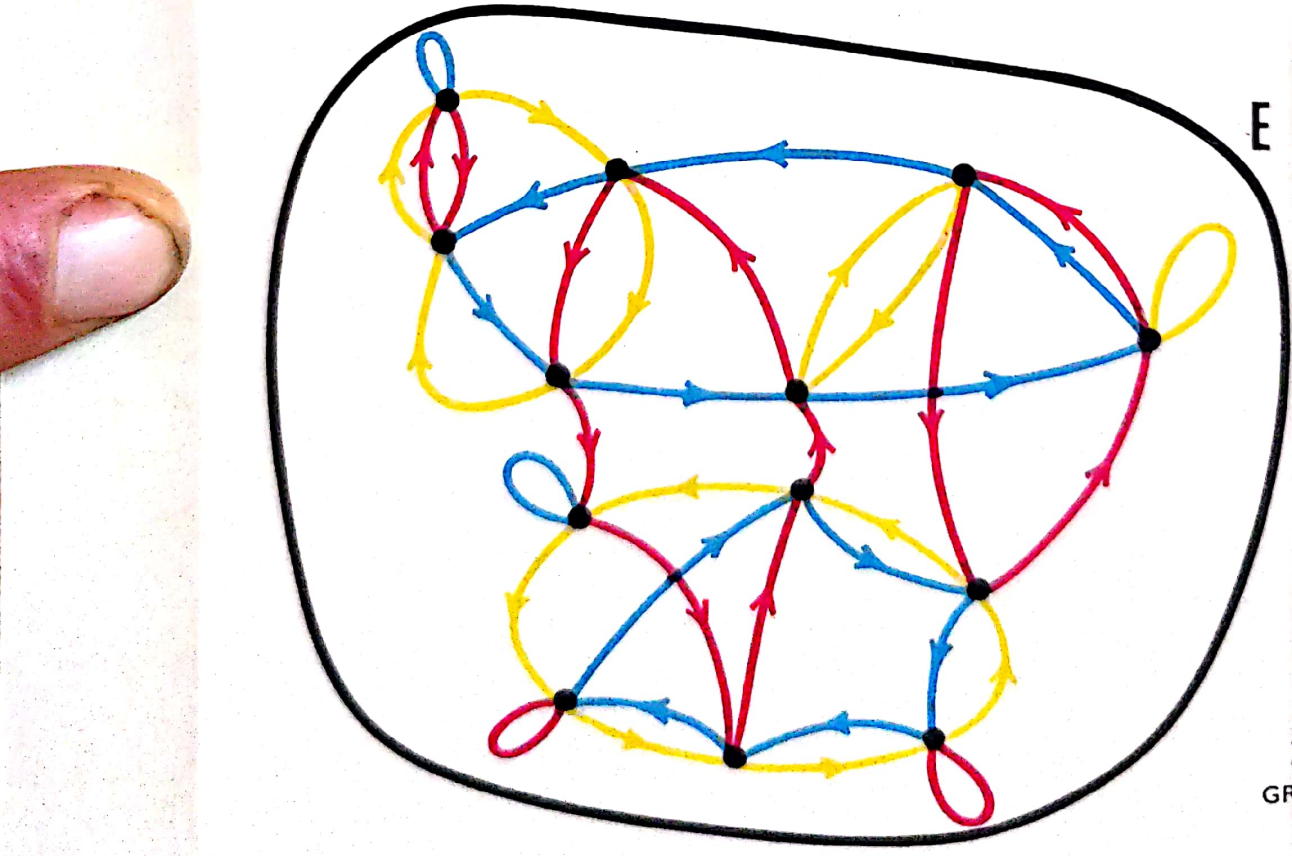
8. În $\mathfrak{S}$ E, o, ecuația

$$f \circ x \circ g = h$$

admite soluția unică

$$x = f^{-1} \circ h \circ g^{-1}$$

9. În $\mathfrak{S}$ E, o, rezolvați ecuația $f \circ x \circ g = h$ în următoarea situație



f, g, h

GRAFICUL 169

Scanned with OKEN Scanner

10. În $\mathcal{P}$ E, Δ, cele șase ecuații de mai jos admit aceeași soluție

$$\begin{aligned} A\Delta X\Delta B &= C \\ A\Delta X\Delta C &= B \\ B\Delta X\Delta A &= C \\ B\Delta X\Delta C &= A \\ C\Delta X\Delta A &= B \\ C\Delta X\Delta B &= A \end{aligned}$$

11. Rezolvați ecuațiile de mai jos

În Z_5, $+$	:	$-2 + x + 4 = 1$
În $\mathcal{S}$ E, $\circ$	:	$g \circ x = I_E$
În $\mathcal{P}$ E, Δ	:	$A \Delta X \Delta A = B$
În G, $*$	:	$a * b * x * c * d = v$

12. Dacă fiecare din literele a, b, c, d reprezintă cîte un punct al lui Π, care este punctul x astfel încît

$$\vec{ab} + \vec{bx} + \vec{ca} = \vec{cd}$$

13. În grupul G, $*$, vi se semnalează că

$$g * h = h$$

Ce concluzie trageți din aceasta cu privire la g?

14. În grupul $\mathcal{S}$ E, $\circ$, vi se semnalează că

$$f \circ g = f$$

Care este permutarea g?

15. În grupul G, $*$, vi se semnalează că

$$a * b = v$$

De aci puteți trage concluzia că $\bar{a} = b$ și $\bar{b} = a$. De ce?

16. În grupul $\mathcal{S}$ E, $\circ$, vi se semnalează că

$$f \circ g = 1_E$$

De aci puteți trage concluzia că $f \circ g = g \circ f$.
Ce știți cu privire la permutările f și g?

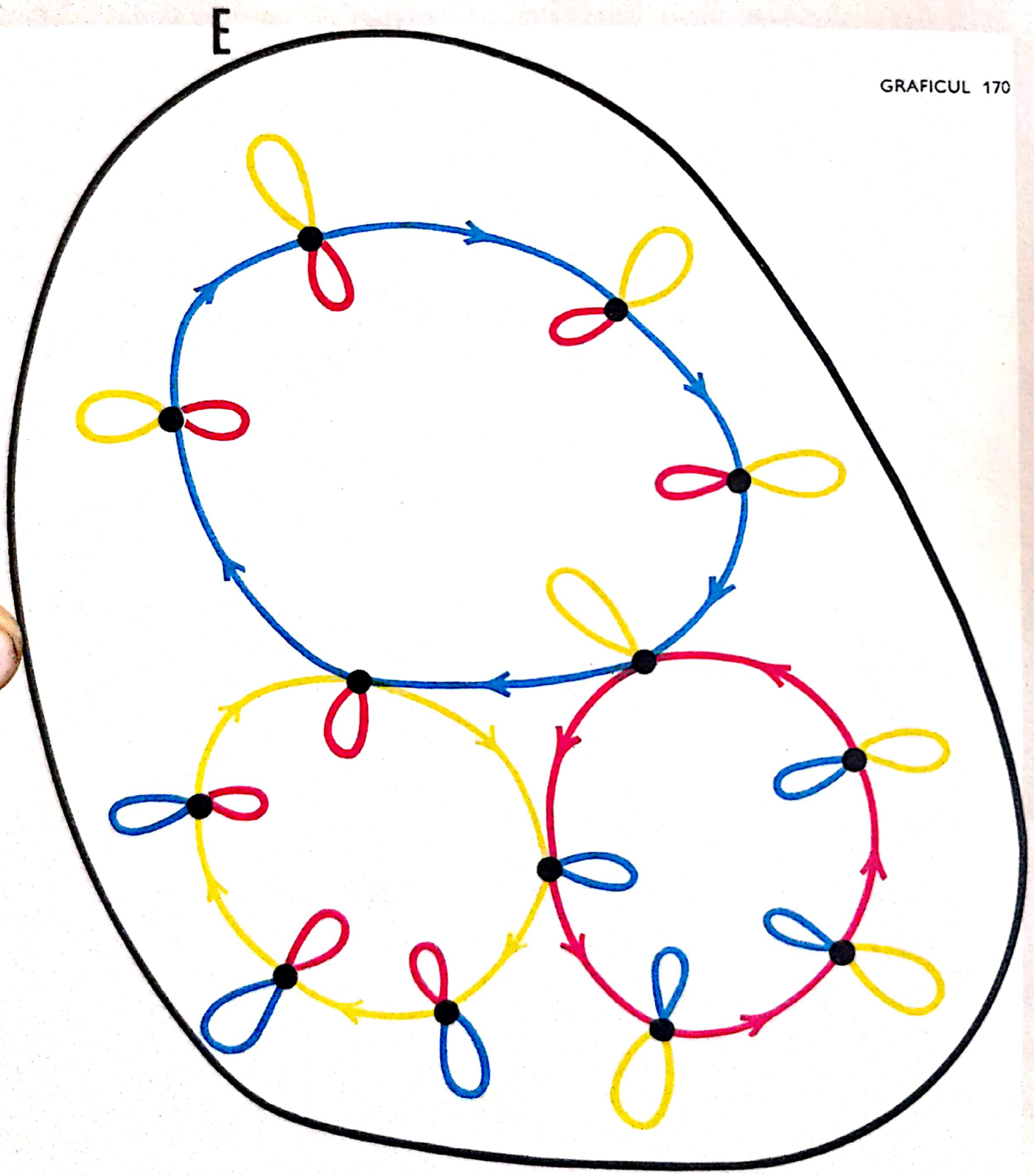
17. Într-un grup G, $*$

$$g * g = g \Rightarrow g = v$$

Scanned with OKEN Scanner

18. În Π_0, $+$, vi se semnalează că $2a = a$
Puteți trage concluzia că $a = 0$. De ce?

19. Iată trei permutări f, g, h ale mulțimii E.

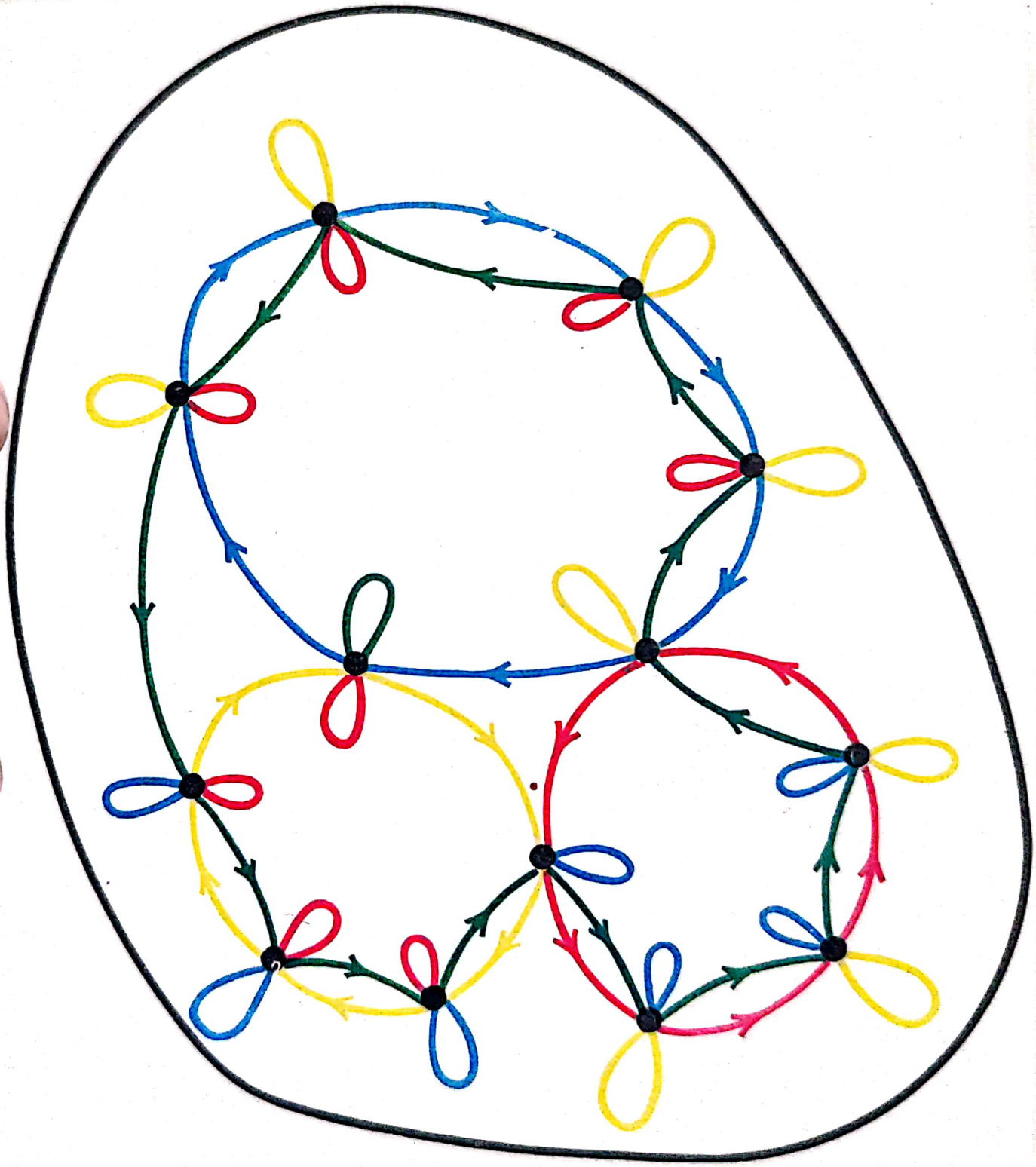


GRAFICUL 170

Trasați permutarea x a mulțimii E astfel încît $f \circ x \circ g = h$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție:

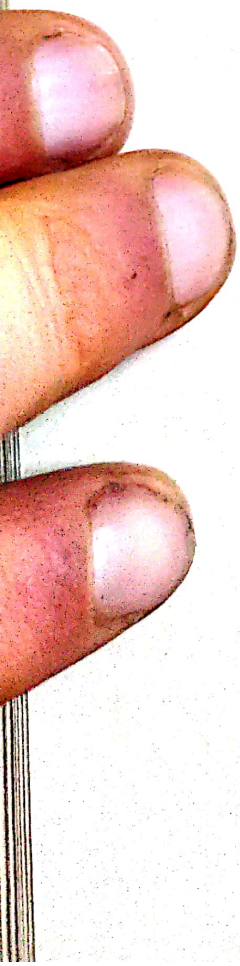


$f \circ x \circ g = h$ $\Leftrightarrow$ $x = f^{-1} \circ h \circ g^{-1}$

GRAFICUL 171

Scanned with OKEN Scanner

INDICE



Scanned with OKEN Scanner

	Pag.
absorbant (element)	276
antireflexivitate	128
antisimetrie	131
apartenență	2
aplicație	188
aplicație biunivocă	192
aplicație în	195
aplicație pe	195
asociativitate	34
axiomă	63
binar (sistem de numerație)	296
centrul (unei mulțimi de puncte)	427
centrul (unei perechi)	356
centrul (unei simetrii)	422
compunere	139
comutativitate	43
convexă (parte)	177
diferență	27
diferență simetrică	43
direcție	74
disjuncte (mulțimi)	27
distributivitate	36
divizibilitate	283
echipolență	342
echipotență	236
echivalență	156
egalitate	3
element	2
funcție	181
grafic	89
grup	391
imagine	119
includere	19
inel	338
intersecție	27
încrucișarea echipolențelor	368
mijloc	356
mulțime	1
mulțime finită	241
mulțime infinită	243
mulțime vidă	11
mulțime cu un singur element	11
neutru	207
număr cardinal	236
numere întregi naturale	240
numere întregi raționale	319
ordine	161
ordine pe o dreaptă	169
ordine totală	162
orientarea unei drepte	168
orientarea planului	174
paralelism	72
parte	18
partiție	47
pereche	11
perechi	90
perechi echipolente	344
perechi identice	90
perechi paralele	228
permutare	103
perpendicularitate	79
produs de mulțimi	107
proiecție	215
reciproc	113
reflexivitate	126
relație	90
reuniune	27
segment (deschis-închis)	172
semidreaptă	170
semiplan	230
simetria (unei relații)	129
simetrie centrală	422
simetrie paralelă	437
simplificabilitate	269
subgrup	412
șir	243
termen	3
transformare	213
translație	378
tranzitivitate	133
valoare absolută	334
valoarea unei funcții într-un punct	182
vector	394

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Pag.

CAPITOLUL 1 — *Mulțimi* 1

1. Mulțime 1
2. Exemple 1
3. Obiect 2
4. Elemente 2
5. Termeni — egalitate 3
6. Proprietățile egalității 4
7. Semnul apartenenței 4
8. Să formăm mulțimi după fantezia noastră 4
9. Scheme 5
10. Definiție analitică 7
11. Mulțimi cu două elemente — mulțime cu un singur element — mulțime vidă 8
12. Egalitatea mulțimilor. Mulțimea $\varnothing$ 10

CAPITOLUL 2 — *Părți* 18

1. Părțile unei mulțimi 18
2. Proprietatea incluziunii 21
3. Totalitatea părților unei mulțimi 22

CAPITOLUL 3 — *Intersecție — Reuniune — Diferență* 26

$\cap$ $\cup$ $\setminus$

CAPITOLUL 4 — *Algebra mulțimilor* 33

1. Diagrama « frunză de trifoi » 33
2. Asociativitatea intersecției și reuniunii 34
3. Neasociativitatea diferenței 35
4. Distributivitatea 36
5. Antidistributivitatea 37

GEORG CANTOR 45

CAPITOLUL 5 — *Diviziuni* 46

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 6 — *Primele elemente de geometrie* 53
1. Mulțimi de puncte 53
2. Plan și axiome 62
3. Drepte 66
4. Paralelism 72
5. Direcții 73
6. Perpendicularitate 78

EUCLID 87

CAPITOLUL 7 — *Relații* 88
1. Jocul « Prenume/Nume » 88
2. Jocul « Prenume/Prenume » 92
3. Relația . . . are ca soră . . . într-o mulțime de fete și băieți 95
4. Relația . . . are ca soră . . . într-o mulțime de fete 96
5. Relația . . . are ca frate sau soră 97
6. Relația . . . divide . . . într-o mulțime de numere naturale întregi 98
7. Relația . . . are ca tată 101
8. O relație în mulțimea Z a numerelor întregi 102
9. O permutare într-o mulțime de elevi 104
10. Relația de la A spre B — Produsul A × B 106
11. Distributivitatea lui × în raport cu $\cup$ 111
12. Reciprocitatea unei relații 112
13. Relațiile $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$ 114
14. Relații într-o mulțime de mulțimi 117
15. Imaginea unei mulțimi printr-o relație 119
16. Exerciții recapitulative 121

ARTHUR CAYLEY 125

CAPITOLUL 8 — *Punerea în evidență a proprietăților anumitor relații* 126
1. Introducere 126
2. Reflexivitatea 126
3. Antireflexivitatea 128
4. Simetrie 129
5. Antisimetrie 131
6. Tranzitivitate 133

CAPITOLUL 9 — *Compunere de relații* 139
1. Bunicii 139
2. Copii și părinți 142
3. Tabla de compunere 144
4. Compunerea unor relații oarecare 145
5. Dacă A și B sînt relații, avem formula $(B \circ A)^{-1} = A^{-1} \circ B^{-1}$ 146
6. Compunerea relațiilor este asociativă 147

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 10 — *Echivalențe* 154
1. A clasa pentru a cunoaște, a înțelege, a reține 154
2. Diviziunea definită de o relație 157

CAPITOLUL 11 — *Ordine* 161
1. Ierarhii și ordine 161
2. Două proprietăți ale ordinelor 164
3. Dreapta orientată 167
4. Semidrepte 170
5. Intervale sau segmente 172
6. Orientarea planului 173
7. Convexitate 176

CAPITOLUL 12 — *Funcții* 181
1. Definiția funcțiilor 181
2. Valoarea unei funcții într-un punct 182
3. Compunerea funcțiilor 184
4. Aplicații 188
5. Aplicații biunivoce 192
6. Aplicația unei mulțimi *în* o altă mulțime și *pe* o altă mulțime 195
7. Compunerea aplicațiilor 202

CAPITOLUL 13 — *Permutări* 205
1. Permutări 205
2. Grupul permutărilor unei mulțimi 206

EVARISTE GALOIS 215

CAPITOLUL 14 — *Transformările planului* 216
1. Definiție 216
2. Transformările constante 217
3. Transformarea identică 219
4. Încă o transformare a lui Π 220
5. Proiecție paralelă 221
6. Proiecții coordonate 224
7. Proiecție paralelă a unei drepte pe o dreaptă 225

CAPITOLUL 15 — *Proiecții paralele și ordine* 226
1. Proiecția paralelă a unei drepte orientate pe o dreaptă orientată 226
2. Perechi paralele 228
3. Semiplane 229
4. Semiplane definite de o dreaptă 232
5. Diagonalele unui paralelogram 233
6. Teorema lui Pasch 234

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 16 — *Numere cardinale* 236

1. Echipotență 236
2. Numerele naturale 240
3. Mulțimi infinite 241
4. Numărul δ 241
5. Teorema lui Dedekind 243
6. Mulțimi intermediare 247
7. Ordinea numerelor cardinale 248

CAPITOLUL 17 — *Adunarea* 254

1. Definiția adunării 254
2. Comutativitatea adunării 261
3. Asociativitatea adunării 262
4. Element neutru 262
5. Adunare și ordine 266
6. Simplificabilitatea adunării numerelor naturale 269

CAPITOLUL 18 — *Înmulțirea* 271

1. Definiția înmulțirii 271
2. Rolul lui 0 și 1 în raport cu înmulțirea 276
3. Comutativitatea înmulțirii 277
4. Asociativitatea înmulțirii 278
5. Înmulțirea este distributivă în raport cu adunarea 280
6. Înmulțirea și ordinea 281
7. Divizibilitatea 283

CAPITOLUL 19 — *Sistemul de numerație binar* 296

1. Sisteme de numerație 296
2. Sistemul binar 296
3. Adunarea în sistemul binar 307
4. Compararea numerelor scrise în sistemul binar 310
5. Înmulțirea numerelor întregi naturale în sistemul binar 313

LEIBNIZ 315

CAPITOLUL 20 — *Numerele întregi raționale* 316

1. O luptă de exterminare sau numerele negative 316
2. Schimbarea semnului 320
3. Proprietățile lui Z 323
4. Ecuațiile în Z, + ... 326
5. Scăderea 331
6. Definiția înmulțirii numerelor întregi raționale 333
7. Inelul Z, +, * 337

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 21 — *Echipolență* 342

1. Perechi echipolente 342
2. Proprietățile echipolenței 345
3. Construirea perechilor echipolente 349
4. Centru — Mijloc 353
5. Proiecții paralele de perechi echipolente 357
6. Aplicații 365
7. Încrucișarea echipolențelor 368
8. Construcții 374

CAPITOLUL 22 — *Translații* 377

1. Translații 377
2. Grupul translațiilor 386
3. Comutativitatea grupului translațiilor 389
4. Vectori, adunarea vectorilor 394
5. Grupul $\Pi_0, +$ 399
6. Înmulțirea vectorilor cu numere raționale întregi 404
7. Proprietățile înmulțirii unui vector cu un număr întreg rațional 407
8. Aplicațiile calculului vectorial 408
9. Subgrupuri 412
10. Adunarea părților $\Pi_0, +$ 415
11. Proiecții de vectori 418

CAPITOLUL 23 — *Simetrii centrale* 422

1. Simetrii centrale 422
2. Imaginea unei drepte printr-o simetrie centrală 424
3. Simetrii centrale și translații 430
4. Grupul simetriilor centrale și al translațiilor 435
5. Exerciții și completări 437

CAPITOLUL 24 — *Grupuri* 441

1. Definiția grupurilor 441
2. Un joc 443
3. Grupuri ciclice 448
4. Calculul într-un grup oarecare 450
5. Unicitatea elementului neutru și a simetricului oricărui element 453
6. Ecuații într-un grup 454

Indice 462

Scanned with OKEN Scanner

Redactor responsabil: DUDCOVSCHI PETRE
Tehnoredactor: CONSTANȚA VULCĂNESCU

Dat la cules 22.03.1966. Bun de tipar 14.10.1967. Apărut 1967 Comanda nr. 7356. Tiraj 20.140. Hîrtia tipar înalt A de 125 g/m² 700×920/16. Coli editoriale 46,05. Coli de tipar 29,75. A 298. C. Z. pentru bibliotecile mici 84—51=R.

Tiparul executat sub comanda nr. 70 la Întreprinderea poligrafică „ARTA GRAFICĂ", București, Calea Șerban Vodă 133
Republica Socialistă România

Scanned with OKEN Scanner

Lei 1.7
EDITURA TINERETULUI
Scanned with OKEN Scanner